

ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET
TECHNOLOGICZNY W SZCZECINIE
WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

mgr inż. Przemysław Pietrzak

**Szybka filtracja sygnałów
występujących w dynamicznych procesach ważenia
z wykorzystaniem
dyskretnych liniowych układów niestacjonarnych**

Rozprawa doktorska

Promotor

dr hab. inż. Roman Kaszyński, prof. nadzw. ZUT

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008 – 2010
jako projekt badawczy nr N N514 298735

SZCZECIN, 2011

Pracę tę dedykuję moim najbliższym – Dalii i Marii

Spis treści

1	Wstęp	1
1.1	Analiza problemu na podstawie przykładu	2
1.2	Teza i cel pracy	4
1.3	Treść pracy	6
2	Szczegółowy cel filtracji	8
2.1	Kontrola towarów paczkowanych	8
2.2	Automatyczna waga kontrolująca	10
2.2.1	Terminologia i definicje	10
2.2.2	Cykl pracy automatycznej wagi kontrolującej	10
2.3	Wymagania metrologiczne	13
2.3.1	Klasy dokładności	14
2.3.2	Dopuszczalne wartości błędów ważenia	15
2.4	Prace eksperymentalne	17
2.4.1	Przyrząd pomiarowy	17
2.4.2	Zakres i cel badań	18
2.5	Cel filtracji	20
2.5.1	Ogólna charakterystyka występujących zakłóceń	20
2.5.2	Cel filtracji	25
3	Dyskretny liniowyniestacjonarny układ filtrujący	26
3.1	Synteza układu	26
3.1.1	Struktura układu	26
3.1.2	Podstawowy element struktury	27
3.1.3	Sekwencja działania układu	29
3.2	Rekurencyjne równanie układu	31
3.3	Stabilność układu	32
3.3.1	Warunki stabilności układu	34
3.4	Funkcja uzmienniająca układu	37
3.5	Realizacja układu	40
4	Optymalizacja procesu filtracji	43
4.1	Sformułowanie problemu	43
4.2	Etap ważenia dynamicznego	45

4.2.1	Wstępne przygotowanie sygnałów pomiarowych	45
4.3	Wynik ważenia dynamicznego	46
4.4	Kryterium optymalizacji δ	48
4.5	Pierwsze zadanie optymalizacji	49
4.5.1	Definicja siatki	49
4.5.2	Dobór parametrów siatki	51
4.5.3	Klasyfikacja węzłów siatki	52
4.5.4	Maksymalna prędkość przenośników taśmowych	56
4.5.5	Interpretacja uzyskanych wyników	59
4.6	Kryterium optymalizacji κ	64
4.7	Drugie zadanie optymalizacji	66
4.7.1	Sformułowanie zadania	66
4.7.2	Algorytm sympleksów Nelder – Meada	67
4.7.3	Konstrukcja sympleksu początkowego	69
4.7.4	Wyznaczanie wartości rozszerzonej funkcji celu	73
4.7.5	Wyniki optymalizacji	74
4.8	Optymalizacja stacjonarnego procesu filtracji	78
5	Eksperymentalna weryfikacja uzyskanych wyników	81
5.1	Ciągły tryb pracy układu filtrującego	81
5.2	Wyniki weryfikacji	84
5.3	Przebiegi czasowe	89
6	Podsumowanie	95
	Bibliografia	98

Spis ważniejszych oznaczeń

L	Długość przenośnika ważącego
l	Aktywna długość przedmiotu ważonego
D	Odległość pomiędzy dwoma kolejnymi przedmiotami ważonymi
$v, v_{\max}$	Prędkość przenośników taśmowych oraz prędkość maksymalna
t_i, t_w, t_o, t_z	Czasy trwania kolejnych etapów cyklu pracy automatycznej wagi kontrolującej z przenośnikiem taśmowym
m	Masa przedmiotu ważonego – wartość prawdziwa
$\hat{m}$	Wynik ważenia dynamicznego
e	Działka legalizacyjna
d	Działka elementarna
$e_{\max}$	Maksymalny bezwzględny błąd
e_d	Maksymalny dopuszczalny błąd
e_{μ}	Błąd średni
μ_d	Maksymalny dopuszczalny błąd średni
σ_e	Odchylenie standardowe błędu
σ_d	Maksymalne dopuszczalne odchylenie standardowe błędu
$\mathbb{N}$	Zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$	Zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{R}$	Zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
I_H	Skończony podzbiór pierwszych N elementów zbioru $\mathbb{N}_0$, tj. zbiór $I_H = \{n \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq n \leq N - 1\}$
Λ	Zbiór $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : -1 + \varepsilon < \lambda < 1 - \varepsilon\}$
Ω	Zbiór $\Omega = \{\omega_g \in \mathbb{R} : \frac{2\xi_k}{\Delta} \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < \omega_g < \frac{2\xi_k}{\Delta} \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\}$

$\{x(n)\}$	Ciąg x
$x(n)$	n -ty wyraz ciągu x
$\{x(n)\}_a^b$	Ciąg x , określony dla $a \leq n \leq b$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$
$\{x(n)\}_a^\infty$	Ciąg x , określony dla $a \leq n < \infty$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$
ω_g	W przypadku układu stacjonarnego pulsacja graniczna, w przypadku układu niestacjonarnego funkcja uzmienniająca $\omega_g : I_H \rightarrow \Omega$ lub $\omega_g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \Omega$
λ, λ^*	Współczynniki równania opisującego układ filtrujący, $\lambda^* = \frac{1}{2}(1 - \lambda)$
$\omega_\infty, \omega_0, N_\alpha$	Parametry funkcji uzmienniającej
k	Rząd układu filtrującego
δ	Liczba wyrażająca wartość kryterium optymalizacji zdefiniowanego w podrozdziale 4.4
κ	Liczba wyrażająca wartość kryterium optymalizacji zdefiniowanego w podrozdziale 4.6
$\mathcal{S}$	Obszar poszukiwań $\mathcal{S} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \subset \mathbb{R}^2$
p_1, p_2, p_3, p_4	Proste: $p_1 : \omega_0 = a_1$, $p_2 : N_\alpha = b_1$, $p_3 : \omega_0 = a_2$ i $p_4 : N_\alpha = b_2$, ograniczające obszar poszukiwań $\mathcal{S}$
S	Siatka węzłów $(w_0, N_\alpha) \in \mathcal{S}$
$X_{i,j}$	Zbiór sygnałów zarejestrowanych w ramach prowadzonych prac eksperymentalnych zawierający przebiegi ważenia i -tego przedmiotu testowego, zarejestrowany przy j -tej prędkości prędośników taśmowych
$Y_{i,j}$	Zbiór odpowiedzi układu filtrującego wyznaczony względem zbioru $X_{i,j}$
$Z_{i,j}$	Zbiór wyników ważenia dynamicznego wyznaczony względem zbioru $Y_{i,j}$
$g_{i,j}, g_j$	$g_{i,j}$ – eksperymentalna funkcja celu wyznaczona względem i -tego przedmiotu testowego oraz j -tej prędkości prędośników taśmowych, g_j – eksperymentalna funkcja celu niezależna od masy przedmiotu testowego
$h_{i,j}, h_j$	$h_{i,j}$ – pomocnicza funkcja celu wyznaczona względem i -tego przedmiotu testowego oraz j -tej prędkości prędośników taśmowych, h_j – pomocnicza funkcja celu niezależna od masy przedmiotu testowego
$f_{i,j}, f_j$	$f_{i,j}$ – rozszerzona funkcja celu wyznaczona względem i -tego przedmiotu testowego oraz j -tej prędkości prędośników taśmowych, f_j – rozszerzona funkcja celu niezależna od masy przedmiotu testowego
$D_{i,j}, D_j$	$D_{i,j}$ – zbiór rozwiązań dopuszczalnych wyznaczony względem wybranej funkcji celu, D_j – zbiór rozwiązań dopuszczalnych niezależny od masy przedmiotu testowego

Rozdział 1

Wstęp

W zastosowaniach przemysłowych istnieje potrzeba pomiaru masy w warunkach dynamicznych w taki sposób, aby uzyskać wynik pomiaru w możliwie najkrótszym czasie. Szybkie ważenie, w czasie znacznie krótszym od czasu ustalania przyrządu pomiarowego zastosowanego w procesie ważenia, jest jednym z podstawowych problemów występujących w dziedzinie dynamicznych pomiarów masy [57].

Istotnym obszarem zastosowań ważenia dynamicznego jest obszar związany z wykonywaniem wewnętrznej kontroli ilości towaru paczkowanego. Jednymi z powszechnie wykorzystywanych urządzeń do przeprowadzenia wewnętrznej kontroli ilości towaru paczkowanego są automatyczne wagi kontrolujące (*ang.* checkweighers), spośród których najczęściej wykorzystuje się wagi dynamiczne, których konstrukcje oparte są o przenośnik taśmowy [48]¹. Ponieważ w trakcie ważenia dynamicznego system transportowy automatycznej wagi kontrolującej i wraz z nim obiekt ważony są w ruchu, przetwornik pomiarowy, który również cechuje się swoją dynamiką, jest poddany działaniu zakłóceń. Powoduje to, iż w trakcie wykonywania pomiaru przetwornik znajduje się stale w stanie przejściowym a wskazanie przyrządu pomiarowego nie osiąga stanu ustalonego. Tymczasem obowiązujące przepisy prawne [1],[4] nie różnicują pomiaru wykonywanego automatycznie i statycznie od pomiaru wykonywanego automatycznie i dynamicznie², w obu przypadkach obowiązują jednakowe wartości dopuszczalnych błędów. Stąd, aby umożliwić poprawne wykonanie pomiaru w trakcie ważenia dynamicznego, konieczne jest zastosowanie dodatkowego urządzenia lub metody.

Traktując ważenie dynamiczne jako pewien proces technologiczny, którego charakterystycznymi wielkościami są:

- czas wykonywania pojedynczego pomiaru, który w przypadku określonej serii pomiarów przekłada się bezpośrednio na wydajność procesu,
- dokładność pomiaru,

okazuje się, iż obie wymienione wielkości są względem siebie *przeciwstawne* i najczęściej *nie mogą być rozpatrywane niezależnie*. Wysokie wymagania co do dokładności wyników

¹W dalszej części niniejszej rozprawy, o ile nie zostanie to wyraźnie zaznaczone, termin *ważenie dynamiczne* należy rozumieć właśnie jako wykonywanie pomiaru masy z wykorzystaniem automatycznej wagi kontrolującej z przenośnikiem taśmowym.

²Definicje automatycznego ważenia statycznego i dynamicznego zostaną przedstawione w rozdziale 2.

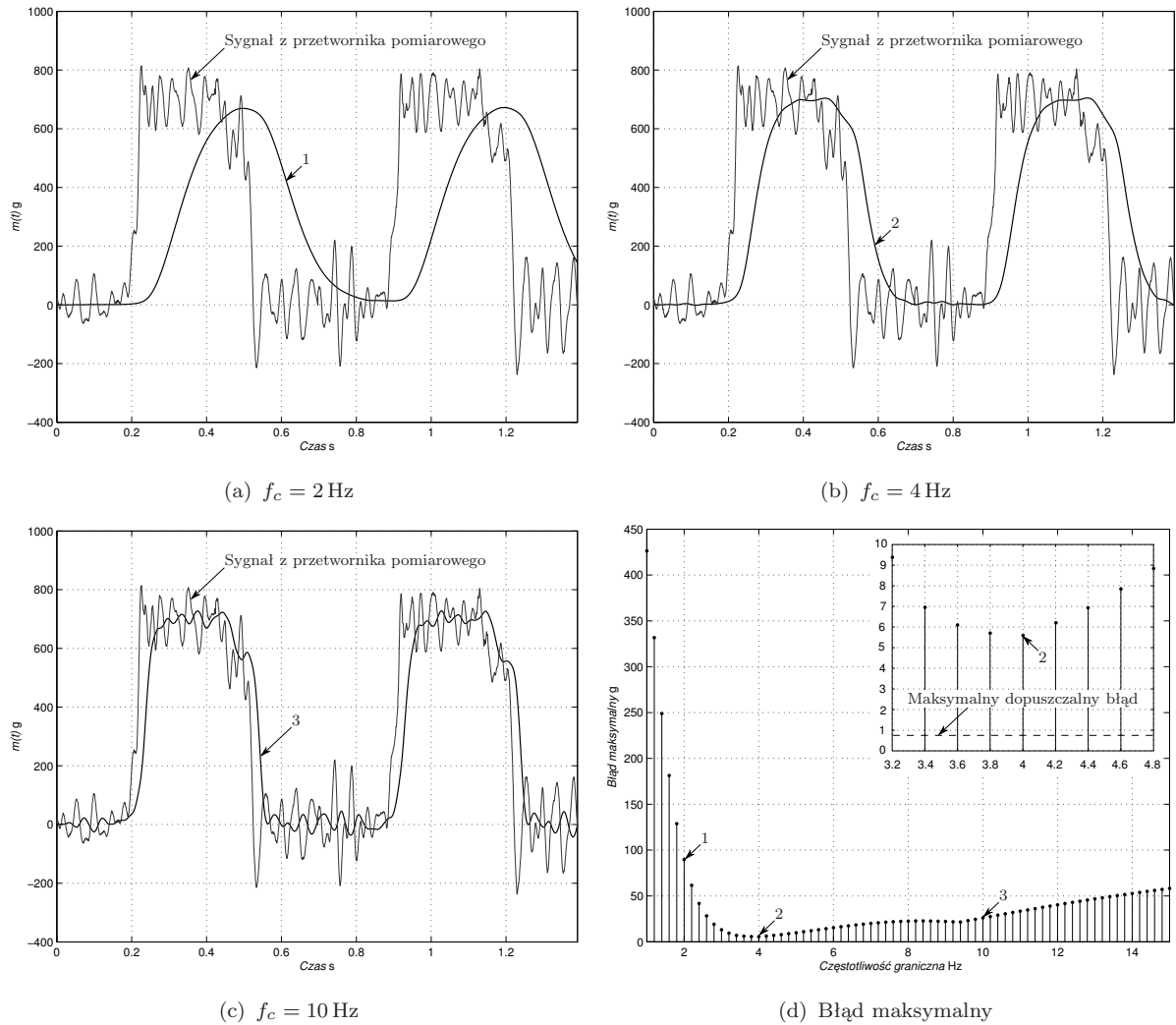
pomiaru pociągają za sobą konieczność wydłużenia jego czasu trwania i odwrotnie. Jak się okazuje, jest to problem uniwersalny, który często pomimo istotnych różnic w sposobie realizacji i wykonywania pomiaru znajduje swoje odzwierciedlenie w większości rozwiązań powstałych w obszarze dotyczącym dynamicznych pomiarów masy, także tych, które wykraczają poza obszar ważenia dynamicznego z wykorzystaniem automatycznych wag kontrolujących [8],[14],[15],[18],[19],[31],[32],[34],[49].

Wśród metod dostępnych dla automatycznych wag kontrolujących ważną rolę odgrywają metody z szeroko rozumianej dziedziny cyfrowego przetwarzania sygnałów [12],[14],[16],[47],[52],[53],[54],[58],[59]. Metodom tym poświęcona jest także treść niniejszej rozprawy. Kontynuując wybrane wątki zaczerpnięte z literatury, w rozprawie podjęto wysiłek opracowania metody dyskretnej filtracji sygnałów występujących w dynamicznych procesach ważenia. Zanim jednak sformułowane zostaną teza oraz cel pracy, dokonamy analizy prostego przypadku w celu uwypuklenia pewnego podstawowego problemu występującego w poruszanej tematyce.

1.1 Analiza problemu na podstawie przykładu

W przypadku ważenia dynamicznego z wykorzystaniem układów filtrujących pomiaru masy dokonuje się w oparciu o filtrowany sygnał pomiarowy pochodzący z przetwornika pomiarowego. *Również w tym obszarze występuje sprzeczność pomiędzy wymaganiami dotyczącymi wysokiej wydajności oraz wysokiej dokładności wyników ważenia.* Źródłem zakłóceń występujących w trakcie ważenia dynamicznego są przede wszystkim drgania mechaniczne [51], które objawiają się w widmie sygnału w postaci dominujących składowych harmonicznym występujących zazwyczaj w dolnych zakresach częstotliwości [31],[58], w paśmie od kilku do kilkudziesięciu Hz [11],[32]. Z uwagi na fakt, iż skład widmowy zakłóceń wykazuje wysoki stopień losowości, projektując układ filtrujący bezpiecznie jest założyć najgorszy możliwy przypadek. Odpornym rozwiązaniem może okazać się zastosowanie filtra dolnoprzepustowego zapewniającego wysoki stopień tłumienia najniższej składowej harmonicznym zaobserwowanej w widmie sygnału pomiarowego. W tym sensie ograniczenie pasma przepustowego filtra minimalizuje wpływ zakłóceń występujących w sygnale pomiarowym i przyczynia się do zwiększenia dokładności pomiaru.

Jednak ograniczenie pasma niesie ze sobą niepożądany efekt w postaci wydłużenia czasu, jaki jest niezbędny do ustalenia się odpowiedzi układu filtrującego względem danego sygnału wejściowego. Analizując cykl pracy automatycznej wagi kontrolującej z przenośnikiem taśmowym, można zauważyć, iż w kolejnych etapach dochodzi do niemal skokowej zmiany składowej stałej sygnału pomiarowego w momentach, gdy przedmiot ważony zostaje umieszczony a następnie po zważeniu opuszcza szalkę wagi. W układzie dynamicznym, jakim jest filtr, wywołuje to stan przejściowy, który w przypadku stacjonarnych układów liniowych uzależniony jest od wartości jakie przyjmują części rzeczywiste biegunów układu. Mając na uwadze wymienione wyżej ograniczenia, dokonajmy interpretacji odpowiedzi wybranych dolnoprzepustowych układów filtrujących na wymuszenie stanowiące sygnał pomiarowy zawierający serię kolejnych ważeń przedmiotu o znanej masie m , zarejestrowany przy stałej wartości prędkości v przenośnika taśmowego. Rozpocznijmy od



Rysunek 1.1: Przykładowe wyniki filtracji sygnału pomiarowego automatycznej wagi kontrolującej z prze-nośnikiem taśmowym, zarejestrowanego przy $m = 700\text{ g}$ i $v = 1,2\frac{\text{m}}{\text{s}}$, uzyskane z wykorzystaniem dolno-przepustowego filtra NOI rzędu czwartego o tłumieniu krytycznym dla różnych wartości częstotliwości granicznej (1.1(a)–1.1(c)) a także maksymalna wartość błęd charakteryzująca serię uzyskanych wyników pomiaru w funkcji częstotliwości granicznej układu filtrującego oraz maksymalny dop. błąd (1.1(d)).

układu o względnie niskiej wartości częstotliwości granicznej, którego odpowiedź przed-stawiono na rysunku 1.1(a). Ze względu na ograniczone pasmo przepustowe układu stan przejściowy wywołany zmianą składowej stałej sygnału pomiarowego zostaje rozciągnięty w czasie i przekracza czas trwania etapu ważenia. W efekcie wartość maksymalna odpo-wiedzi układu filtrującego nie osiąga wartości odpowiadającej masie obiektu ważonego. W przeciwieństwie do omawianego przypadku na rysunku 1.1(c) przedstawiono odpo-wieź układu cechującego się znacznie krótszym w porównaniu z poprzednim układem stanem przejściowym. Tym razem skrócenie czasu trwania stanu przejściowego układu filtrującego odbywa się kosztem jego zdolności do tłumienia zakłóceń w stanie ustalonym. W obu przypadkach wynik pomiaru obarczony jest błędem przekraczającym dopuszczalną wartość³.

³Szczegółowe informacje dotyczące sposobów wyznaczania błędów pomiarowych oraz ich dopuszczal-nych wartości zostały przedstawione w rozdziałach 2 i 4.

Jak można przypuszczać, przedstawione przypadki ukazują dwa skrajne oblicza rozpatrywanego problemu – rozwiązanie optymalne zapewne znajduje się gdzieś pomiędzy omawianymi przykładami. Rozszerzmy zatem zakres studium, dokonując wielokrotnej filtracji zarejestrowanego sygnału przy pomocy dyskretnego filtra dolnoprzepustowego dla różnych wartości częstotliwości granicznej filtra, zapamiętując przy tym uzyskane wyniki pomiaru. Następnie określonej wartości częstotliwości granicznej przyporządkujemy maksymalny błąd pomiaru, jaki cechuje każdą z uzyskanych w procesie filtracji serii wyników. Otrzymaną w ten sposób zależność przedstawia wykres z rysunku 1.1(d). Jak można zauważyć, we wszystkich rozpatrywanych przypadkach wynik pomiaru obarczony jest błędem przekraczającym maksymalną dopuszczalną wartość wynikającą z obowiązujących regulacji, którą również umieszczono na rysunku 1.1(d). Odpowiedź układu, którego wyniki cechują się najmniejszą maksymalną wartością błędu, przedstawiono na rysunku 1.1(b).

Przedstawione rozważania sygnalizują poważne ograniczenie, jakie cechuje klasyczne filtry dolnoprzepustowe wykorzystywane w procesie filtracji sygnałów pomiarowych występujących w dynamicznych procesach ważenia. Jak to zostało przedstawione, żądania zapewnienia krótkiego czasu trwania stanu przejściowego oraz zapewnienia wymaganego poziomu tłumienia występujących w sygnale pomiarowym zakłóceń *wykluczają się wzajemnie*. Zmiana szerokości pasma przepustowego wpływa *jednocześnie* na oba wymienione atrybuty układu filtrującego. W efekcie w układach tych nie ma możliwości tłumienia na zadanym poziomie zakłóceń występujących w sygnale pomiarowym *niezależnie* od czasu trwania stanu przejściowego układu wywołanego skokową zmianą składowej stałej sygnału, do jakiej dochodzi w trakcie ważenia dynamicznego. Powoduje to, iż w przypadku szybkich procesów ważenia dynamicznego klasyczne metody filtracji mogą okazać się bezużyteczne.

1.2 Teza i cel pracy

Problem ten dostrzeżono w literaturze z zakresu przetwarzania sygnałów. W pracach [23],[27],[40],[42],[43] wskazano możliwość znacznego ograniczenia czasu trwania stanu przejściowego analogowych filtrów dolnoprzepustowych względem danego sygnału wejściowego, poprzez chwilową zmianę wartości współczynników filtra w przedziale czasowym, w którym spodziewane jest wystąpienie stanu przejściowego. Zmiana wartości współczynników dotyczy m.in. parametru związanego z częstotliwością graniczną układu. W momencie rozpoczęcia uzmienniania wartość częstotliwości granicznej doznaje zmiany do pewnej wyższej wartości początkowej po czym z czasem, w sposób ciągły, ustala się z powrotem na wartości, jaką parametr ten posiadał przed rozpoczęciem uzmienniania.

Istnieje jednak pewna przeszkoda, która utrudnia bezpośrednią implementację przytoczonego rozwiązania w dziedzinie dyskretnego przetwarzania sygnałów. Zmienne w czasie współczynniki układu filtrującego oznaczają, że również wartości współczynników opisującego ten układ równania różniczkowego są zależne od czasu. Aby dokonać implementacji omawianej metody, należy więc uzyskać dyskretny odpowiednik niestacjonarnego

układu analogowego. Jak to zostało przedstawione w [30], część autorów posługuje się w takich sytuacjach nieco heurystyczną metodą, która polega na „zamrożeniu” w czasie współczynników równania różniczkowego. Następnie, wykorzystując metodę transformacji biliniowej, ciągowi funkcji przejścia układu analogowego z zamrożonymi współczynnikami przyporządkowuje się ciąg funkcji przejścia układu dyskretnego. Otrzymany ciąg dyskretnych funkcji przejścia służy dalej do wyznaczenia uogólnionej funkcji przejścia układu [21]. Okazuje się jednak, iż uzyskana w ten sposób uogólniona funkcja przejścia w ogólnym przypadku nie może być zrealizowana w postaci rekurencyjnej jako równanie różnicowe o zmiennych w czasie współczynnikach. W takim przypadku konieczne jest zastosowanie jednej z metod aproksymacji uogólnionej funkcji przejścia przedstawionych w pracach [20],[36].

Zbliżone rozwiązanie przedstawiono w pracy [31]. W celu ograniczenia czasu trwania stanu przejściowego układu filtrującego autorzy zaproponowali wykorzystanie zestawu dyskretnych filtrów dolnoprzepustowych o komplementarnych własnościach. Zdaniem autorów w układzie takim powinien znajdować się przynajmniej jeden filtr o niskiej częstotliwości granicznej oraz jeden filtr charakteryzujący się krótkim czasem trwania stanu przejściowego. W praktyce zaproponowany przez autorów układ składa się z dwóch filtrów SOI typu średnia krocząca oraz filtra Kalmana, który z uwzględnieniem założeń upraszczających proponowanych przez autorów realizuje proces uśredniania sygnału wejściowego. Przełączanie pomiędzy filtrami następuje w oparciu o zadane kryteria dotyczące stanu ustalonego sygnałów występujących na wyjściach filtrów SOI. Filtr Kalmana stanowi układ pośredni, który w normalnym trybie jest włączany pomiędzy okresem działania filtra SOI o wyższej częstotliwości granicznej a okresem działania filtra SOI o niższej częstotliwości granicznej. Zgodnie z deklaracją autorów, uwzględniając szczegółowe warunki podane w artykule, w sygnale wyjściowym opisanego układu nie występują nieciągłości związane z przełączaniem pomiędzy kolejnymi filtrami.

Możliwość skrócenia czasu trwania stanu przejściowego jest jednak okupiona kosztem wysokiej złożoności prezentowanego układu, co utrudnia sformułowanie jego matematycznego opisu. W konsekwencji otwartą pozostaje kwestia optymalizacji parametrów układu. Do jego poprawnego działania niezbędne jest bowiem określenie rzędów obu filtrów SOI oraz ich częstotliwości granicznych. Dodatkowo określić należy wartości parametrów kryteriów odpowiadających za przełączanie pomiędzy filtrami, przy czym zgodnie z uwagami autorów kluczowe jest tu kryterium wyznaczające moment przełączenia pomiędzy filtrem SOI o wyższej częstotliwości granicznej a filtrem Kalmana. Włączenie tego ostatniego zbyt wcześnie lub za późno skutkuje brakiem znaczącego ograniczenia stanu przejściowego.

Cenna jest jednak zawarta w artykule idea, która w pewnym stopniu rozwiązuje problem dotyczący dyskretnego odpowiednika niestacjonarnego układu analogowego – zbliżony efekt można uzyskać wykorzystując odpowiednio dobrany zestaw filtrów dolnoprzepustowych. Abstrahując na moment od faktu, iż rozwiązanie przedstawione w pracach [23],[27],[40],[42],[43] dotyczy analogowych a rozwiązanie [31] dyskretnych układów filtrujących oraz dokonując zestawienia wyżej wymienionych rozwiązań, nietrudno jest dostrzec występującą pomiędzy nimi analogię – w obu przypadkach w trakcie procesu filtracji *własności układu filtrującego zmieniają się w czasie*. Zmiany te mają różny charakter.

W przypadku rozwiązania [23],[27],[40],[42],[43] zmianie podlegają wartości parametrów układu filtrującego, podczas gdy struktura układu pozostaje niezmienną. Odwrotna sytuacja ma miejsce w rozwiązaniu [31]. Tutaj parametry poszczególnych filtrów są stałe a w wyniku przełączania pomiędzy układami zmienia się wewnętrzna struktura układu filtrującego. W obu przypadkach można jednak mówić o *niestacjonarności* układu filtrującego, która przyczynia się do skrócenia czasu trwania występującego w nim stanu przejściowego. Ograniczenie stanu przejściowego nie wyklucza jednak, aby w normalnym trybie pracy układ filtrujący cechował się niską wartością częstotliwości granicznej.

W odniesieniu do ważenia dynamicznego wyżej wymienione własności niestacjonarnego układu filtrującego wskazują na możliwość *jednoczesnego* tłumienia na zadanym poziomie zakłóceń występujących w sygnale pomiarowym oraz skrócenia czasu trwania stanu przejściowego wywołanego skokową zmianą składowej stałej sygnału pomiarowego. W ten sposób w przeciwieństwie do stacjonarnego dolnoprzepustowego układu filtrującego, który podlega ograniczeniom przedstawionym w poprzednim podrozdziale, niestacjonarny układ filtrujący wydaje się być tych ograniczeń pozbawiony. W świetle powyższych rozważań omówiona własność niestacjonarnych układów filtrujących pozwala na sformułowanie następującej tezy:

zastosowanie dyskretnych liniowych układów niestacjonarnych w procesie filtracji sygnałów pomiarowych występujących w dynamicznych procesach ważenia umożliwia znaczne, w odniesieniu do ich stacjonarnych odpowiedników, skrócenie czasu trwania pomiaru przy jednoczesnym zachowaniu wymaganej dokładności.

Celem niniejszej rozprawy jest udowodnienie tak sformułowanej tezy poprzez osiągnięcie następujących celów szczegółowych:

1. *Opracowanie metody filtracji sygnałów pomiarowych występujących w dynamicznych procesach ważenia z wykorzystaniem dyskretnych układów niestacjonarnych.*
2. *Sformułowanie i rozwiązanie problemu optymalizacji procesu filtracji prowadzonego z wykorzystaniem opracowanej metody.*
3. *Eksperymentalna weryfikacja skuteczności opracowanej metody.*

1.3 Treść pracy

Praca składa się z sześciu rozdziałów oraz bibliografii. Rozdziały pierwszy i drugi mają charakter wprowadzenia, rozdziały trzeci i czwarty zawierają główne wyniki teoretyczne i praktyczne uzyskane w rozprawie, w rozdziale piątym dokonano weryfikacji skuteczności opracowanej metody filtracji, rozdział szósty stanowi zaś podsumowanie rozprawy.

W szczegółowym omówieniu treści pracy, rozdział pierwszy zawiera wprowadzenie do tematyki badań, tezę i cel pracy oraz opis logicznej struktury pracy.

W rozdziale drugim wprowadzono podstawową terminologię oraz definicje dotyczące automatycznych wag kontrolujących. Omówiono cykl pracy automatycznej wagi kontrolującej oraz przedstawiono wymagania metrologiczne, jakie nakładają na ten przyrząd obo-

wiążące przepisy prawne. Ponadto przedstawiono zakres przeprowadzonych prac eksperymentalnych oraz na przykładzie zarejestrowanych sygnałów pomiarowych zilustrowano typowe zakłócenia występujące w trakcie ważenia dynamicznego. W oparciu o zebrane informacje sformułowano szczegółowy cel filtracji.

W rozdziale trzecim dokonano syntezy dyskretnego liniowego i niestacjonarnego układu filtrującego. Wykazano, iż opracowany układ jest układem stabilnym asymptotycznie oraz w sensie wejściowo–wyjściowym, podano również warunki stabilności układu. Na zakończenie rozdziału omówiono zagadnienie realizacji opracowanego układu w systemie mikroprocesorowym.

W rozdziale czwartym, uwzględniając przedstawiony w rozdziale drugim cel szczegółowy, sformułowano i rozwiązano problem optymalizacji procesu filtracji sygnałów pomiarowych występujących w trakcie ważenia dynamicznego. Wyznaczono w ten sposób dwa zestawy parametrów cechujące: optymalny niestacjonarny układ filtrujący, opracowany w rozdziale trzecim, oraz optymalny układ filtrujący, będący stacjonarnym odpowiednikiem opracowanego układu niestacjonarnego.

W rozdziale piątym porównano ze sobą wyniki filtracji uzyskane z wykorzystaniem optymalnego stacjonarnego i optymalnego niestacjonarnego układu filtrującego, weryfikując tym samym słuszność sformułowanej w rozprawie tezy. Przedstawiono również wybrane przebiegi czasowe ukazujące odpowiedzi porównywanych układów.

Całość zawartych w pracy rozważań podsumowano w rozdziale szóstym.

Podziękowania

Autor pragnie złożyć w tym miejscu podziękowania osobom, które przyczyniły się do powstania niniejszej rozprawy oraz wspomogły proces jej tworzenia, w szczególności: promotorowi – Panu Profesorowi Romanowi Kaszyńskiemu, Panu Andrzejowi Kaszkinowi – za zwrócenie uwagi na poruszoną w rozprawie tematykę, Panu Doktorowi Tomaszowi Barcińskiemu, Panu Doktorowi Januszowi Paplińskiemu, Panu Mirosławowi Nawrockiemu oraz firmie Automatyka Serwis E. Majdański Sp. J. i firmie Dys-Pak Sp. z o. o. – za pomoc w przygotowaniu stanowiska badawczego zakupionego ze środków grantu, Panu Dyrektorowi Doktorowi Witoldowi Lewandowskiemu oraz Panu Tomaszowi Misiewiczowi i firmie Radwag Wagi Elektroniczne – za udostępnienie dodatkowego stanowiska badawczego.

Rozdział 2

Szczegółowy cel filtracji

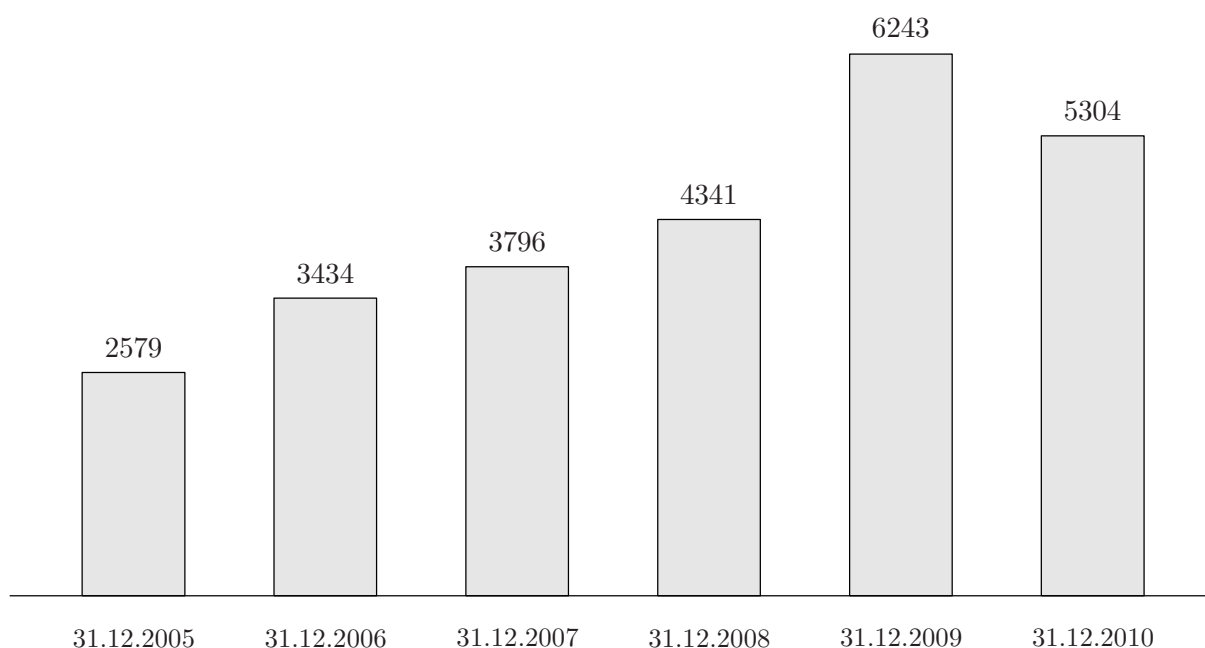
Skuteczność opracowanej w ramach niniejszej rozprawy metody filtracji poddana została eksperymentalnej weryfikacji. W rozdziale tym omówimy zakres przeprowadzonych prac oraz scharakteryzujemy wykorzystywany w tym celu przyrząd pomiarowy. Na przykładzie sygnałów pomiarowych zarejestrowanych w ramach przeprowadzonych badań zilustrujemy również typowe zakłócenia występujące w trakcie ważenia dynamicznego. Wprowadzimy podstawową terminologię oraz definicje dotyczące automatycznych wag kontrolujących. Omówimy cykl pracy automatycznej wagi kontrolującej oraz, w stopniu niezbędnym do zdefiniowania kryteriów optymalizacji procesu filtracji, przedstawimy wymagania metrologiczne, jakie nakładają na ten przyrząd obowiązujące przepisy prawne. Zebrane informacje posłużą do sformułowania celu filtracji sygnałów pomiarowych występujących w dynamicznych procesach ważenia prowadzonych z wykorzystaniem automatycznych wag kontrolujących.

2.1 Kontrola towarów paczkowanych

Towar paczkowany, to zgodnie z ustawą [2] produkt umieszczony w opakowaniu jednostkowym dowolnego rodzaju, którego ilość nominalna, jednakowa dla całej partii, odmierzona bez udziału nabywcy i nieprzekraczająca 50 kg lub 50 l, nie może zostać zmieniona bez naruszenia opakowania.

W myśl przywołanej ustawy, wprowadzanie do obrotu na terytorium Rzeczypospolitej Polskiej towaru paczkowanego jest czynnością ściśle usankcjonowaną. Do obrotu wprowadzane mogą być bowiem wyłącznie towary paczkowane spełniające określone ustawą wymagania.

W ogólnym przypadku przedsiębiorca, który paczkuje i/lub wprowadza do obrotu towary paczkowane jest odpowiedzialny za to, aby *zawarta w opakowaniu ilość rzeczywista towaru odpowiadała podanej na opakowaniu ilości nominalnej*. Ponosi on także odpowiedzialność za zorganizowanie i przeprowadzenie kontroli wewnętrznej ilości towaru paczkowanego. Zgodnie z art. 12 i 13 ustawy przedsiębiorca ma obowiązek zgłosić dyrektorowi okręgowego urzędu miar właściwego ze względu na miejsce paczkowania fakt rozpoczęcia paczkowania produktów lub ich wprowadzania do obrotu. Na podstawie danych Biura



Rysunek 2.1: Stan zgłoszeń podmiotów paczkujących, zgodnie z art. 12 i 13 ustawy o towarach paczkowanych w latach 2005 – 2010, na podstawie informacji Biura Nadzoru Głównego Urzędu Miar o realizacji zadań dotyczących nadzoru organów administracji miar nad paczkowaniem.

Nadzoru Głównego Urzędu Miar na dzień 31 grudnia 2010 r. ogółem w Polsce fakt paczkowania lub wprowadzania towarów paczkowanych do obrotu na terytorium kraju zgłosiło 5304 podmiotów paczkujących. Stan zgłoszeń na przestrzeni ostatnich sześciu lat przedstawia wykres umieszczony na rysunku 2.1.

Istotną rolę w procesie kontroli ilości szerokiej gamy dostępnych na rynku towarów paczkowanych odgrywają automatyczne wagi kontrolujące. Dokumenty regulujące sferę związaną z wykonywaniem kontroli ilości towarów paczkowanych skupiają się wokół dwóch zasadniczych obszarów. Pierwszy z nich dotyczy zasad paczkowania produktów, szczegółowych zasad prowadzenia kontroli oraz wymagań określających dopuszczalną wartość niedoboru ilości rzeczywistej towaru paczkowanego. Drugi obszar dotyczy zasadniczych wymagań metrologicznych, jakie powinny spełniać przyrządy pomiarowe stosowane do kontroli towarów paczkowanych. Mając na uwadze tezę oraz cel rozprawy, w niniejszym rozdziale skupimy się przede wszystkim na technologicznych aspektach procesu, jakim jest ważenie dynamiczne prowadzone z wykorzystaniem automatycznych wag kontrolujących z przenośnikiem taśmowym. Dodatkowo, w stopniu niezbędnym do zdefiniowania kryteriów optymalizacji procesu filtracji, przedstawimy także wymagania metrologiczne, jakie nakładają na ten przyrząd pomiarowy obowiązujące przepisy prawne. Czytelnik zainteresowany zagadnieniami dotyczącymi zasad i metod wykonywania kontroli czy dopuszczalnych wartości niedoboru ilości towaru paczkowanego powinien oprócz wymienionej wcześniej ustawy zapoznać się także z treścią dokumentów [3],[13],[55].

2.2 Automatyczna waga kontrolująca

2.2.1 Terminologia i definicje

Waga automatyczna to przyrząd pomiarowy, który wyznacza masę produktu bez udziału operatora, działający według założonego cyklu pracy [4].

Do rodziny wag automatycznych należą m.in. *automatyczne wagi dla pojedynczych ładunków* (ang. *automatic catchweighing instruments* lub *catchweighers*). Są to urządzenia, które wyznaczają masę wcześniej przygotowanych oddzielnych ładunków (np. towarów paczkowanych) lub pojedynczych ładunków materiału luzem. Jeżeli automatyczna waga dla pojedynczych ładunków jest dodatkowo wyposażona w urządzenie, które umożliwia rozdzielenie ważonych artykułów na dwie lub więcej grup według różnicy ich masy i wartości nastawy, to całe urządzenie, tj. waga wraz z urządzeniem rozdzielającym, nosi nazwę *automatycznej wagi kontrolującej* (ang. *checkweigher*).

Przytoczona powyżej definicja automatycznej wagi dla pojedynczych ładunków sugeruje wyraźnie, iż produkt ważony nie powstaje w trakcie lub po zakończeniu ważenia. W przypadku kontroli towarów paczkowanych mamy dodatkowo do czynienia z sytuacją, w której w momencie pomiaru masy określonego produktu na jego opakowaniu znajduje się już informacja dotycząca jego masy netto. W trakcie prowadzenia kontroli automatyczne wagi kontrolujące rejestrują każdy z wyników ważenia, w celu wyznaczenia błędów przypadkowych i systematycznych charakteryzujących kontrolowaną partię towarów paczkowanych. Jednym z zasadniczych celów prowadzenia kontroli ilości towarów paczkowanych jest ewentualna eliminacja towaru, którego masa nie spełnia wymagań określonych w ustawie [2].

Ważenie z wykorzystaniem automatycznych wag kontrolujących może przebiegać w sposób statyczny bądź dynamiczny. W obu przypadkach do zdefiniowania sposobu ważenia wykorzystuje się termin stanu uspokojenia.

Stan uspokojenia jest to stan przyrządu pomiarowego, w którym wskazanie przyrządu przyjmuje co najwyżej dwie sąsiadujące na skali wartości, przy czym jedna ze wskazywanych wartości jest wskazaniem ostatecznym [4].

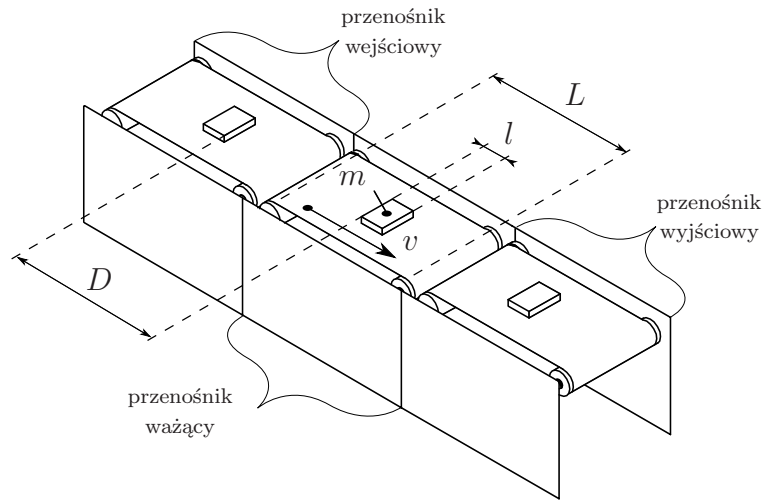
Wskazanie ostateczne to wartość na skali przyrządu pomiarowego wskazywana w momencie, gdy przyrząd znajduje się całkowicie w spoczynku i równowadze oraz gdy na przyrząd nie oddziałują żadne zakłócenia [4].

W przypadku *ważenia statycznego* w momencie wyznaczania wyniku pomiaru przyrząd pomiarowy powinien znajdować się w stanie uspokojenia a system transportowy powinien być zatrzymany [4].

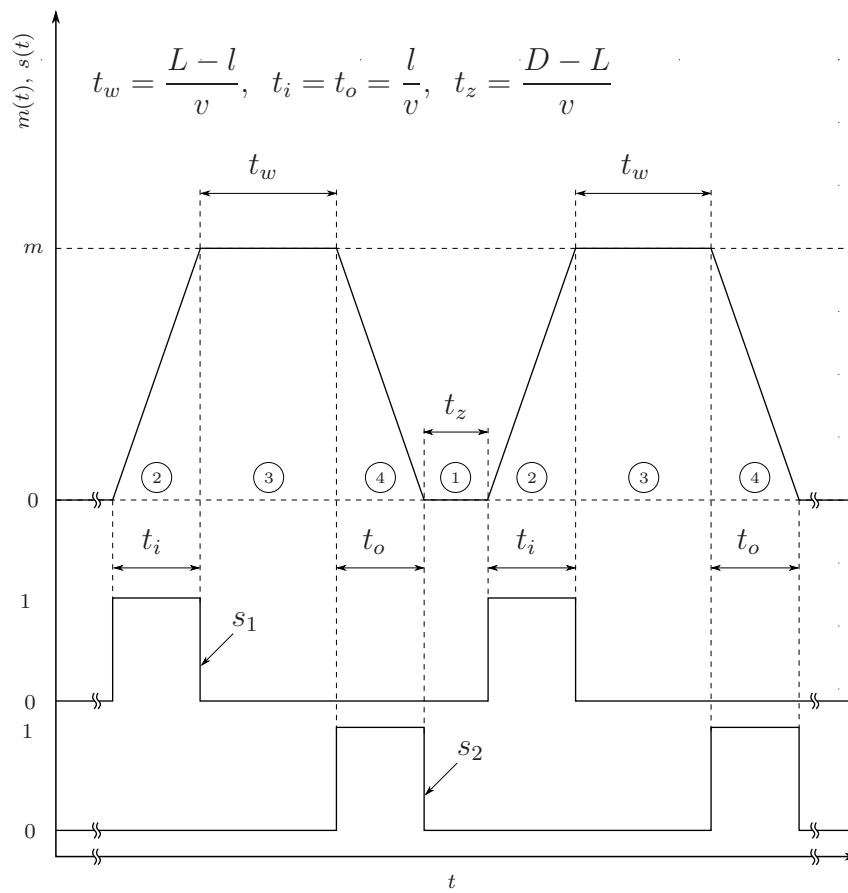
Ważenie dynamiczne przebiega poza stanem uspokojenia przyrządu pomiarowego, przy czym w trakcie ważenia system transportowy jest w ruchu [4].

2.2.2 Cykl pracy automatycznej wagi kontrolującej

Automatyczne wagi kontrolujące stanowią zazwyczaj jeden z końcowych fragmentów linii produkcyjnej i są zintegrowane z jej systemem transportowym. Typowa konstrukcja automatycznej wagi kontrolującej z przenośnikiem taśmowym (z pominięciem urządzenia rozdzielającego) została przedstawiona w sposób poglądowy na rysunku 2.2. W trakcie



(a) Automatyczna waga kontrolująca z przenośnikiem taśmowym.



(b) Cykl pracy automatycznej wagi kontrolującej.

Rysunek 2.2: Automatyczna waga kontrolująca z przenośnikiem taśmowym 2.2(a) oraz jej przykładowy cykl pracy wraz z odpowiadającymi mu przebiegami sygnałów fotokomórek umieszczonych odpowiednio pomiędzy przenośnikiem wejściowym a przenośnikiem ważącym (s_1) oraz pomiędzy przenośnikiem ważącym a przenośnikiem wyjściowym (s_2) 2.2(b). Przy tworzeniu rysunku 2.2(b) przyjęto założenie, iż masa produktu ważonego jest równomiernie rozłożona w jego objętości (jednorodna gęstość produktu).

prawidłowej pracy linii produkcyjnej transportowane produkty kolejno jeden po drugim przemieszczają się wzdłuż przenośnika zamontowanego na przetworniku pomiarowym, zwanego przenośnikiem ważącym. Aby zagwarantować poprawne warunki prowadzenia pomiaru, wymiary geometryczne, tj. długość przenośnika ważącego L , tzw. aktywna długość przedmiotu ważonego l oraz odległość pomiędzy dwoma kolejnymi przedmiotami D , zdefiniowane na rysunku 2.2, powinny spełniać następujące wymagania:

- a) długość przenośnika ważącego L powinna być większa od aktywnej długości przedmiotu ważonego l , tj.

$$L > l, \quad (2.1)$$

- b) odległość pomiędzy dwoma kolejnymi przedmiotami D powinna być większa lub równa minimalnej dopuszczalnej odległości $D_{\min}$, tj.

$$D \geq D_{\min} = L - l. \quad (2.2)$$

Z punktu widzenia dokładności wyników pomiaru istotną rolę odgrywa wykonywanie zerowania. Zgodnie z rekomendacją [4] waga kontrolująca powinna posiadać przynajmniej jedno urządzenie zerujące, tj. urządzenie, które sprowadza do zera wartość wskazywaną na skali przyrządu przy nieobciążonym przenośniku ważącym. Urządzenie to może pracować w trybach: *nieautomatycznym* – operację zerowania wykonuje operator; *półautomatycznym* – operacja zerowania wykonywana jest automatycznie, jednak po wywołaniu przez operatora komendy zerowania; *automatycznym* – operacja zerowania wykonywana jest bez udziału operatora. Zerowanie automatyczne może być wykonywane w momencie rozpoczęcia ważenia automatycznego, może być stałą częścią automatycznego cyklu pracy wagi bądź może być wykonywane co pewien programowalny interwał czasowy, przy czym wartość maksymalnego dopuszczalnego interwału powinna być określona przez producenta urządzenia. W przypadku, gdy wykonywane jest automatyczne zerowanie, aby zagwarantować pewien przedział czasowy w cyklu pracy wagi, w którym przenośnik ważący pozostaje pusty, odległość D powinna być większa od długości L przenośnika ważącego. Zapewnienie prawidłowych odstępów pomiędzy ważonymi produktami jest zadaniem przenośników przygotowawczych znajdujących się przed przenośnikiem ważącym.

Jeżeli warunki (2.1), (2.2) są spełnione, to w trakcie niezakłóconej pracy linii produkcyjnej obciążenie przenośnika ważącego zmieniać się będzie zgodnie z pewnym powtarzalnym schematem przedstawionym na rysunku 2.2(b). Cykl pracy automatycznej wagi kontrolującej wynika zatem ściśle z ustalonego trybu pracy linii produkcyjnej i składa się z następujących etapów:

- 1) *zerowanie* – etap opcjonalny, w trakcie którego przenośnik ważący pozostaje pusty,
- 2) *wjazd na przenośnik ważący* – etap, w trakcie którego przedmiot ważony przemieszcza się pomiędzy przenośnikiem wejściowym a przenośnikiem ważącym,
- 3) *ważenie* – etap, w trakcie którego przedmiot ważony przemieszcza się wzdłuż przenośnika ważącego, przy czym przebywa on na przenośniku ważącym samodzielnie i w całości,
- 4) *zjazd z przenośnika ważącego* – etap, w trakcie którego przedmiot ważony przemieszcza się pomiędzy przenośnikiem ważącym a przenośnikiem wyjściowym.

Łatwo wykazać, iż czasy trwania poszczególnych etapów cyklu pracy wagi uzależnione są od wymiarów geometrycznych L , l i D oraz od prędkości v przenośników. Opisujące je wyrażenia zostały umieszczone na rysunku 2.2(b).

Aby w trakcie pracy linii produkcyjnej uzyskać informację o aktualnym etapie cyklu pracy wagi, automatyczne wagi kontrolujące są zazwyczaj wyposażone w zestaw dwóch fotokomórek umieszczonych odpowiednio pomiędzy przenośnikiem wejściowym a przenośnikiem ważącym oraz pomiędzy przenośnikiem ważącym a przenośnikiem wyjściowym. Tor optyczny fotokomórek przebiega równolegle z krawędziami rolek przenośników i jest prostopadły do krawędzi L przenośnika ważącego. Jeżeli w momencie przerywania toru optycznego przez obiekt ważony sygnał fotokomórki znajduje się w stanie wysokim, to zboczne narastające i opadające sygnały fotokomórki umieszczonej pomiędzy przenośnikiem wejściowym a przenośnikiem ważącym sygnalizuje rozpoczęcie odpowiednio etapu wjazdu obiektu ważonego na przenośnik ważący oraz etapu ważenia. Podobnie zboczne narastające i opadające sygnały fotokomórki umieszczonej pomiędzy przenośnikiem ważącym a przenośnikiem wyjściowym sygnalizuje odpowiednio zjazd obiektu ważonego z przenośnika ważącego oraz rozpoczęcie ewentualnego etapu zerowania. W podobny sposób można również określić moment zakończenia kolejnych etapów cyklu pracy wagi. Sygnały obu fotokomórek odpowiadające prezentowanemu cyklowi pracy automatycznej wagi kontrolującej przedstawiono na rysunku 2.2(b).

2.3 Wymagania metrologiczne

Wagi wyznaczające masy dla transakcji handlowych podlegają prawnej kontroli metrologicznej. Obowiązujące przepisy regulujące podstawowe wymagania dotyczące automatycznych wag dla pojedynczych ładunków, w tym wag kontrolujących, nie określają szczegółowych rozwiązań technicznych dotyczących budowy przyrządu pomiarowego czy sposobu wykonywania pomiaru – jest to zadanie producentów tychże urządzeń. Ścisłej weryfikacji podlegają natomiast wartości błędów charakteryzujące dany przyrząd pomiarowy. Zgodnie z rozporządzeniem [1] producent przed wprowadzeniem przyrządu pomiarowego do obrotu powinien poddać ten przyrząd procedurze oceny zgodności wykonanej przez notyfikowaną jednostkę certyfikującą. Jedną z głównych czynności sprawdzających jest weryfikacja czy błędy pomiarowe charakteryzujące testowany przyrząd pomiarowy nie przekraczają wartości dopuszczalnych, zgodnie z deklarowaną przez producenta klasą dokładności przyrządu.

W trybie nieautomatycznym (statycznym) automatyczna waga kontrolująca powinna spełniać wszystkie wymagania dotyczące wag nieautomatycznych [5]. Wymagania metrologiczne dotyczące wag kontrolujących działających w trybie automatycznym określa rekomendacja [4]. Najistotniejsze wymagania przytoczymy w treści niniejszego rozdziału. Należy podkreślić, iż wymagania te odnoszą się zarówno do przyrządów ważących statycznie jak i dynamicznie. Jak już wspomniano we wstępie niniejszej pracy, obowiązujące w tym względzie regulacje nie różnicują bowiem automatycznych wag kontrolujących ze względu na statyczny bądź dynamiczny sposób wykonywania pomiaru.

2.3.1 Klasy dokładności

W przypadku automatycznych wag dla pojedynczych ładunków obowiązują dwie podstawowe klasy dokładności, tj. X i Y. Klasa X odnosi się do wag kontrolujących przeznaczonych do kontrolowania towarów paczkowanych zgodnie z [2],[3]. Klasa Y odnosi się do wszystkich pozostałych wag automatycznych dla pojedynczych ładunków, takich jak wagi etykietujące lub wagi kalkulacyjno-etkietujące. Podstawowe klasy dokładności dzielą się na cztery następujące podklasy:

- 1) XI, XII, XIII oraz XIII;
- 2) Y(I), Y(II), Y(a) oraz Y(b).

Przyrząd pomiarowy może zostać zaklasyfikowany jednocześnie do dwóch klas, m.in. wtedy, gdy posiada on dwa przełączane tryby pracy, np. jako waga kontrolująca oraz jako waga etykietująca.

Do celów badań, kontroli i klasyfikacji wag stosowana jest tzw. *działka legalizacyjna*, oznaczana małą literą „e”, której wartość wyrażana jest w jednostkach miary masy.

Poza działką legalizacyjną wyróżnia się również tzw. *działkę elementarną*, zwaną niekiedy działką odczytową, oznaczaną małą literą „d”. Działka elementarna to wyrażona w jednostkach miary masy bezwzględna wartość różnicy pomiędzy dwoma kolejnymi znakami podziałki (przy wskazaniach analogowych) lub pomiędzy dwoma sąsiednimi cyframi (przy wskazaniach cyfrowych).

Rekomendacja [4] określa maksymalne $W_{\max}$ oraz minimalne $W_{\min}$ obciążenie wagi wyznaczające zakres ważenia przyrządu. Dla klasy dokładności X wartości $W_{\max}$ oraz $W_{\min}$ określa producent przyrządu, w przypadku klasy Y rekomendacja określa minimalne obciążenie wagi, które nie powinno być mniejsze od wartości przedstawionych w tabeli 2.1.

W oparciu o wartości działki legalizacyjnej e oraz maksymalnego obciążenia $W_{\max}$, wyznaczyć można liczbę działek legalizacyjnych przyrządu n_e , odpowiadającą stosunkowi

$$n_e = \frac{W_{\max}}{e}. \quad (2.3)$$

Wartość działki legalizacyjnej oraz liczba działek legalizacyjnych decydują o klasie dokładności przyrządu. Obowiązujące w tym względzie regulacje przedstawiono w tabeli 2.1.

Klasa dokładności		Wartość działki legalizacyjnej e	$W_{\min}$ w klasie Y	Liczba działek legalizacyjnych n_e	
				minimalna	maksymalna
XI	Y(I)	$0,001 \text{ g} \leq e$	$100e$	50000	—
XII	Y(II)	$0,001 \text{ g} \leq e \leq 0,05 \text{ g}$	$20e$	100	100000
		$0,1 \text{ g} \leq e$	$50e$	5000	100000
XIII	Y(a)	$0,1 \text{ g} \leq e \leq 2 \text{ g}$	$20e$	100	10000
		$5 \text{ g} \leq e$	$20e$	500	10000
XIII	Y(b)	$5 \text{ g} \leq e$	$10e$	100	1000

Tabela 2.1: Wartość działki legalizacyjnej e oraz liczba działek legalizacyjnych n_e w zależności od klasy dokładności przyrządu.

2.3.2 Dopuszczalne wartości błędów ważenia

W przypadku przyrządów pomiarowych należących do klasy dokładności X weryfikacji podlegają: maksymalny dopuszczalny błąd średni, który oznaczać będziemy symbolem μ_d , oraz maksymalne dopuszczalne odchylenie standardowe błędu, które oznaczać będziemy symbolem σ_d . Klasę X uzupełnia się dodatkowo współczynnikiem (x) określającym mnożnik maksymalnej dopuszczalnej wartości odchylenia standardowego błędu, przy czym wartość współczynnika nie może być większa niż 2. Wartość współczynnika (x) wyraża się w postaci $1 \cdot 10^i$, $2 \cdot 10^i$ lub $5 \cdot 10^i$, gdzie i jest liczbą całkowitą ujemną lub zerem. W klasie XI oraz XII współczynnik (x) powinien być mniejszy od 1, dla klasy XIII współczynnik (x) powinien być nie większy od 1, a dla klasy XIII współczynnik (x) powinien być większy od 1. Maksymalna dopuszczalna wartość odchylenia standardowego błędu dla klasy X(x) stanowi iloczyn współczynnika (x) i wartości określonej w tabeli 2.3.

Rekomendacja [4] wymaga, aby maksymalny dopuszczalny błąd średni nie przekroczył wartości przedstawionych w tabeli 2.2 oraz, aby maksymalne dopuszczalne odchylenie standardowe błędu nie przekroczyło wartości przedstawionych w tabeli 2.3.

W przypadku przyrządów pomiarowych należących do klasy dokładności Y weryfikacji podlega wartość błędu maksymalnego, który oznaczać będziemy symbolem e_d .

Rekomendacja [4] wymaga, aby błąd maksymalny nie przekroczył wartości przedstawionych w tabeli 2.4.

Błędy średni, błąd maksymalny oraz odchylenie standardowe błędu wyznacza się dla serii kolejnych ważeń przedmiotów testowych o znanej masie. Zgodnie z rekomendacją [4] liczba ważeń testowych, wykonywanych w celu wyznaczenia wartości błędów, nie powinna być mniejsza od wartości przedstawionych w tabeli 2.5.

Masa ładunku netto m wyrażona w działkach legalizacyjnych e				Maksymalny dopuszczalny błąd średni μ_d
XI	XII	XIII	XIII	
$0 < m \leq 50000$	$0 < m \leq 5000$	$0 < m \leq 500$	$0 < m \leq 50$	$\pm 0,5 e$
$50000 < m \leq 200000$	$5000 < m \leq 20000$	$500 < m \leq 2000$	$50 < m \leq 200$	$\pm 1 e$
$200000 < m$	$20000 < m$	$2000 < m$	$200 < m$	$\pm 1,5 e$

Tabela 2.2: Maksymalny dopuszczalny błąd średni dla przyrządów w klasie X.

Masa ładunku netto m w gramach	Maksymalne dopuszczalne odchylenie standardowe σ_d (wyrażone w procentach m lub gramach) dla współczynnika $(x) = 1$
$m \leq 50$	0,48 %
$50 < m \leq 100$	0,24 g
$100 < m \leq 200$	0,24 %
$200 < m \leq 300$	0,48 g
$300 < m \leq 500$	0,16 %
$500 < m \leq 1000$	0,8 g
$1000 < m \leq 10000$	0,08 %
$10000 < m \leq 15000$	8 g
$15000 < m \leq$	0,053 %

Tabela 2.3: Maksymalne dopuszczalne odchylenie standardowe błędów dla przyrządów w klasie X.

Masa ładunku m wyrażona w działkach legalizacyjnych e				Maksymalny dopuszczalny błąd e_d
Y(I)	Y(II)	Y(a)	Y(b)	
$0 < m \leq 50000$	$0 < m \leq 5000$	$0 < m \leq 500$	$0 < m \leq 50$	$\pm 1 e$
$50000 < m \leq 200000$	$5000 < m \leq 20000$	$500 < m \leq 2000$	$50 < m \leq 200$	$\pm 1,5 e$
$200000 < m$	$20000 < m$	$2000 < m$	$200 < m$	$\pm 2 e$

Tabela 2.4: Maksymalny dopuszczalny błąd dla przyrządów w klasie Y.

Klasa dokładności	Ładunek	Liczba ważeń testowych
X	$m \leq 1 \text{ kg}$	60
	$1 \text{ kg} < m \leq 10 \text{ kg}$	30
	$10 \text{ kg} < m \leq 20 \text{ kg}$	20
	$20 \text{ kg} < m$	10
Y	10 dla dowolnego ładunku	

Tabela 2.5: Minimalna liczba kolejnych ważeń w serii testowej dla przyrządów w klasach X i Y.

2.4 Prace eksperymentalne

2.4.1 Przyrząd pomiarowy

Celem weryfikacji skuteczności opracowanego w ramach niniejszej rozprawy układu filtrującego, wykonano serię ważeń eksperymentalnych. Do realizacji eksperymentów wykorzystano przyrząd pomiarowy złożony z trzech przenośników taśmowych, tj. ważącego, wejściowego oraz wyjściowego, w konfiguracji jak na rysunku 2.2(a). Przenośnik ważący zainstalowano na tensometrycznym ogniwie obciążnikowym typu równoległa belka. Urządzenie wyposażono w zestaw dwóch fotokomórek umieszczonych odpowiednio pomiędzy przenośnikami wejściowym i ważącym oraz ważącym i wyjściowym. Układ filtrujący traktować będziemy jako integralną część przyrządu pomiarowego. Deklarowane parametry metrologiczne przyrządu przedstawiono w tabeli 2.6.

Podstawowe dane określające warunki prowadzenia eksperymentu, tj. długość przenośnika ważącego L , zakres prędkości v przenośników oraz wartości masy m i aktywnej długości l , charakteryzujące wykorzystywane w trakcie eksperymentu przedmioty testowe, przedstawia tabela 2.7. Z uwagi na fakt, iż przypadek, w którym masa przedmiotu

Klasa dokładności	XIII(1), Y(a)
Działka legalizacyjna e^1	0,5 g
Działka elementarna d	0,05 g
Obciążenie minimalne $W_{\min}$	10 g
Obciążenie maksymalne $W_{\max}$	1000 g

Tabela 2.6: Deklarowane parametry metrologiczne wykorzystywanego przyrządu pomiarowego.

Długość przenośnika ważącego L		350 mm	
Zakres prędkości v przenośników		$0,5 - 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	
Przedmiot	Symbol	m	l
1	m_1	200 g	142 mm
2	m_2	300 g	
3	m_3	500 g	
4	m_4	700 g	

Tabela 2.7: Warunki prowadzenia eksperymentu.

¹Doboru wagi kontrolującej odpowiedniej dla określonej klasy towarów paczkowanych dokonuje się ze względu na wartość działki legalizacyjnej e . Zgodnie z zaleceniami Głównego Urzędu Miary [13] automatyczna waga kontrolująca charakteryzująca się umieszczoną w tabeli 2.6 wartością działki legalizacyjnej znajduje potencjalne zastosowanie w procesie wyznaczania ilości rzeczywistej towaru paczkowanego, którego ilość nominalna jest większa bądź równa 28 g i nie przekracza obciążenia maksymalnego $W_{\max}$.

ważonego jest równomiernie rozłożona w jego objętości należy do przypadków szczególnych, wykorzystywane w ramach wykonywanych eksperymentów przedmioty testowe nie posiadały wspomnianej własności, ponadto każdy z nich cechował inny rozkład masy.

2.4.2 Zakres i cel badań

W ramach zrealizowanych prac wykonano serię ważeń przedmiotów testowych, o wymiarze i masach zestawionych w tabeli 2.7. Przeprowadzone prace podzielono na dwa etapy.

Etap I. W trakcie pierwszego etapu prac, dla jedenastu różnych wartości prędkości przenośników taśmowych, tj. od $v = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $v = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, z krokiem $0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, zarejestrowano przebieg dwudziestu ważeń określonego przedmiotu testowego. Eksperyment ten wykonano oddzielnie dla każdego z czterech przedmiotów m_1, m_2, m_3, m_4 , otrzymując łącznie czterdzieści cztery rejestracje.

Etap II. W trakcie drugiego etapu prac zarejestrowano przebieg ważenia czterech przedmiotów testowych występujących cyklicznie w kolejności m_4, m_1, m_3, m_2 . W każdej z rejestracji sekwencję m_4, m_1, m_3, m_2 powtórzono dwadzieścia razy otrzymując łącznie osiemdziesiąt ważeń. Podobnie jak w przypadku pierwszego etapu prac, eksperyment ten zrealizowano dla jedenastu różnych wartości prędkości przenośników taśmowych, tj. od $v = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $v = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, z krokiem $0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

W każdym z przeprowadzonych eksperymentów zarejestrowano trzy sygnały, tj.:

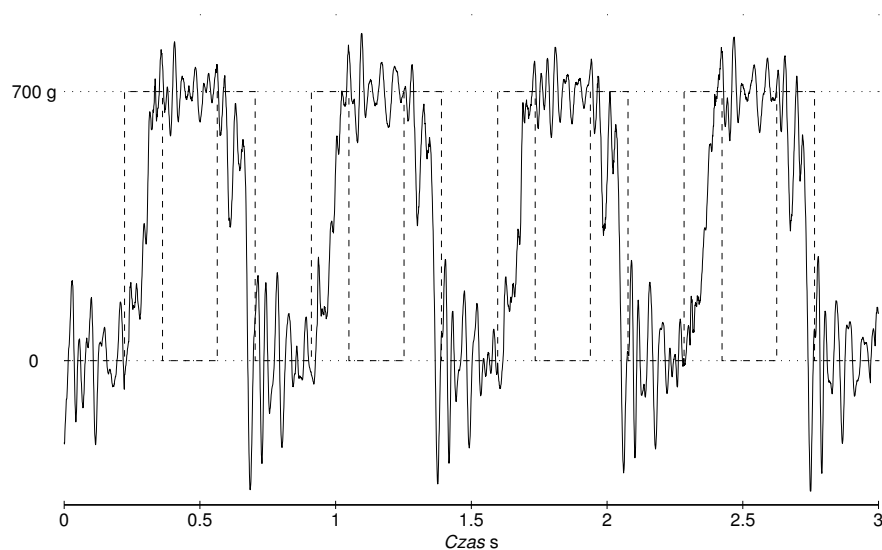
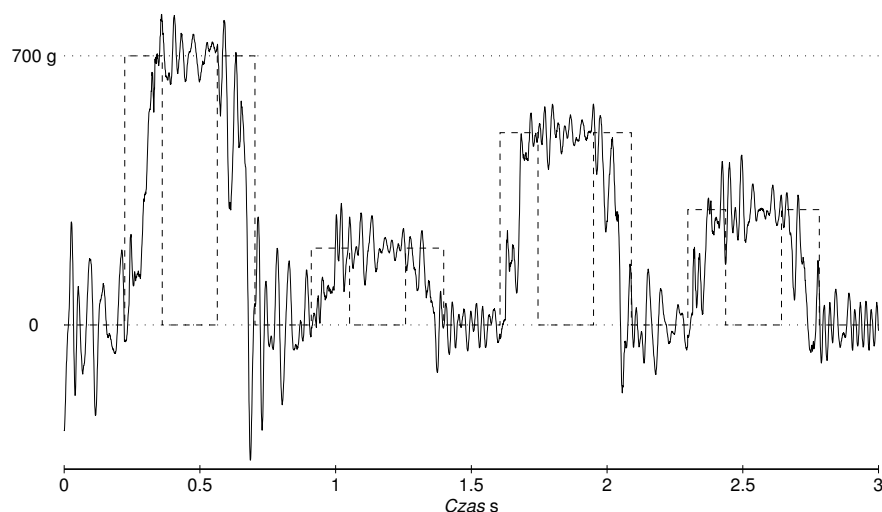
- a) sygnał pomiarowy pochodzący z ogniwa obciążnikowego,
- b) sygnał fotokomórki umieszczonej pomiędzy przenośnikami: wejściowym i ważącym,
- c) sygnał fotokomórki umieszczonej pomiędzy przenośnikami: ważącym i wyjściowym,

poddane próbkowaniu z częstotliwością 1600 Hz. Ogółem zarejestrowano i skatalogowano w ten sposób przebieg ponad półtora tysiąca² ważeń. Wybrane fragmenty zarejestrowanych sygnałów przedstawiono na rysunku 2.3. Linia ciągłą³ oznaczono sygnał pochodzący z przetwornika pomiarowego, wyrażony w wyniku przeprowadzonej kalibracji przyrządu pomiarowego w jednostkach masy. Linia przerywaną oznaczono odpowiednio wyskalowany sygnał będący sumą sygnałów obu fotokomórek, przy czym w momencie, gdy przedmiot ważony przerywa tor optyczny fotokomórki, sygnał fotokomórki znajduje się w stanie wysokim.

Przynależność do obu zadeklarowanych w tabeli 2.6 klas dokładności nakłada na przyrząd pomiarowy ściśle określone wymagania dotyczące dokładności wyników ważenia dynamicznego. Rekomendacja [4] nakazuje ponadto ustalenie maksymalnej prędkości systemu transportowego, czyli w naszym przypadku prędkości v przenośników taśmowych. Weryfikacja zgodności scharakteryzowanego w poprzednim podpunkcie przyrządu z wymaganiami metrologicznymi jakie pociąga za sobą przynależność do zadeklarowanych klas

²Dokładna liczba zarejestrowanych ważeń wynosi 1760.

³Należy w tym miejscu zaznaczyć, iż wszystkie umieszczone w rozprawie rysunki, które prezentują sygnały pomiarowe zarejestrowane w ramach przeprowadzonych prac eksperymentalnych, zawierają *ciągi próbek sygnału dyskretnego*. Mając jednak na uwadze czytelność wspomnianych rysunków, między kolejnymi próbkami sygnału zastosowano liniową interpolację.

(a) $v = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $m = 700 \text{ g}$.(b) $v = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Rysunek 2.3: Przykładowe fragmenty sygnału ogniwa obciążnikowego oraz suma sygnałów obu fotokomórek, zarejestrowane w ramach pierwszego 2.3(a) i drugiego 2.3(b) etapu prac eksperymentalnych.

dokładności oraz określenie maksymalnej prędkości przenośników taśmowych $v_{\max}$ stanowić będzie jeden z ważniejszych celów prowadzonych badań, *przy czym spełnienie przywołanych wymagań zamierzamy osiągnąć wyłącznie poprzez właściwy dobór wykorzystywanej metody filtracji*. Poszukiwanie udoskonaleń konstrukcyjnych umożliwiających zwiększenie wydajności bądź zwiększenie dokładności ważenia dynamicznego nie będzie zatem przedmiotem prowadzonych badań.

2.5 Cel filtracji

2.5.1 Ogólna charakterystyka występujących zakłóceń

Zgodnie z przytoczoną w podpunkcie 2.2.1 definicją w momencie wyznaczania wyniku ważenia statycznego wskazanie przyrządu pomiarowego może przyjmować co najwyżej dwie sąsiadujące na skali wartości, przy czym jedna ze wskazywanych wartości powinna stanowić wartość, jaką wskazywałby ów przyrząd działając w idealnych warunkach pracy (brak jakichkolwiek zakłóceń), gdy z punktu widzenia dynamiki procesu ważenia w przyrządzie ustały wszelkie procesy przejściowe (przyrząd całkowicie w spoczynku i równowadze). W przeciwieństwie do ważenia statycznego wynik ważenia dynamicznego określa się poza stanem uspokojenia przyrządu pomiarowego, kiedy to system transportowy oraz obiekt ważony znajdują się w ruchu. *Dwa zasadnicze czynniki wyróżniające ważenie dynamiczne dotyczą zatem:*

- występujących w trakcie pomiaru zakłóceń związanych z faktem, iż system transportowy wraz z obiektem ważonym są w ruchu,
- stanów przejściowych cechujących dynamikę przyrządu pomiarowego, związanych z faktem, iż przedział czasowy, w którym przedmiot ważony przebywa samodzielnie i w całości na przenośniku ważącym jest skończony⁴ i zazwyczaj krótszy od czasu ustalania przyrządu pomiarowego.

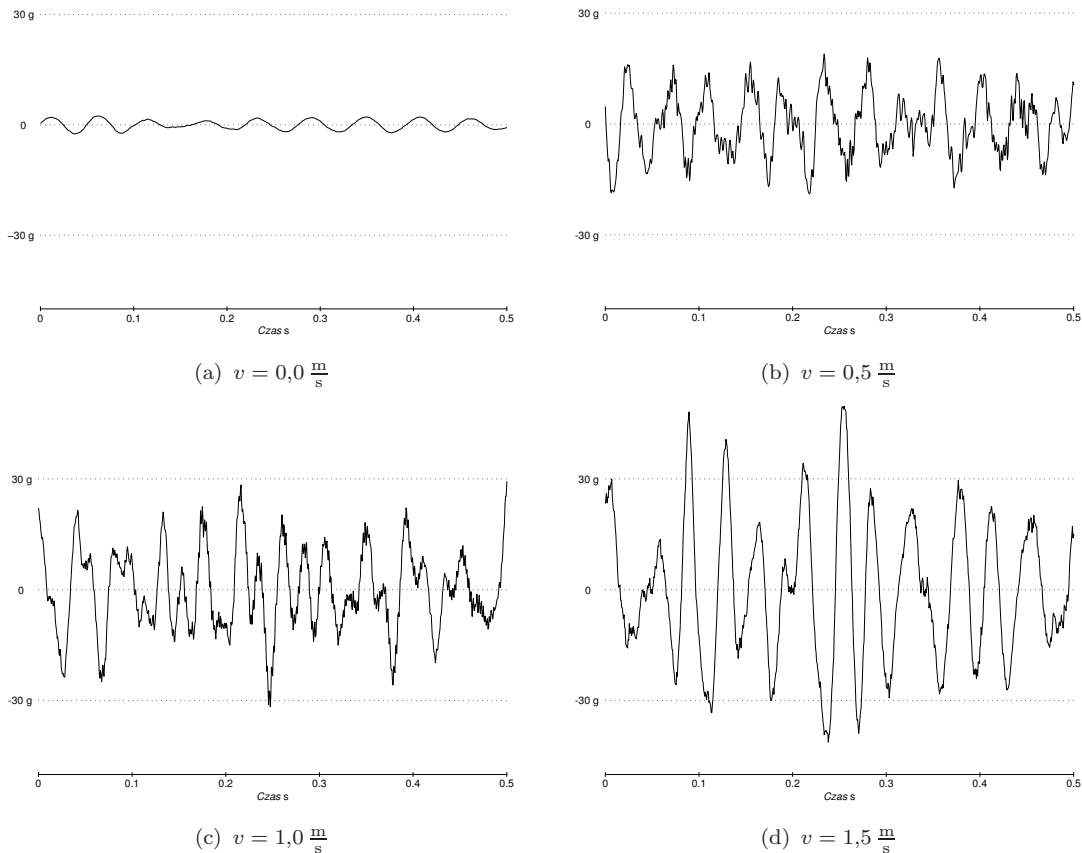
W tej sytuacji możliwość kompensacji dynamiki przyrządu pomiarowego, podobnie jak to zostało zrealizowane w przypadku samego tylko przetwornika pomiarowego [22], wydaje się kuszącym rozwiązaniem, metoda ta wymaga jednak dokładnej znajomości matematycznego modelu przyrządu. W licznych publikacjach do opisu dynamiki przetwornika lub nawet całego przyrządu pomiarowego stosowany jest prosty model tłumionego oscylatora harmonicznego [7],[14],[17],[19],[22],[41],[49],[56],[58]. Do pewnego stopnia jest to podejście uzasadnione; w przypadku tensometrycznych ogniów obciążnikowych zasada pomiaru sprowadza się bowiem do sprężystego odkształcenia belki przetwornika pod wpływem działającej nań siły. Posługując się wymienionym modelem można m.in. stwierdzić, iż częstotliwość oscylacji sygnału pomiarowego obserwowanych w trakcie prowadzenia pomiaru zależy od całkowitej masy szalki wagi i maleje wraz ze wzrostem masy. Fakt ten daje się zaobserwować również w przypadku rzeczywistych przyrządów pomiarowych pracujących w warunkach przemysłowych [12],[32],[58]. O ile jednak przy pomocy wspomnianego modelu można zilustrować bądź zaakcentować dynamiczny charakter procesu ważenia, o tyle model ten zawodzi całkowicie w przypadku próby szczegółowego opisu lub identyfikacji wagi kontrolującej z przenośnikiem taśmowym [32],[51]. Dzieje się tak ponieważ zakłócenia występujące w trakcie procesu ważenia powstają w złożonym układzie mechanicznym: przetwornik pomiarowy – obiekt ważony – system transportowy, nie wystarczy zatem uwzględnienie dynamicznego charakteru samego tylko przetwornika.

Główne źródło występujących w trakcie ważenia dynamicznego zakłóceń stanowi sys-

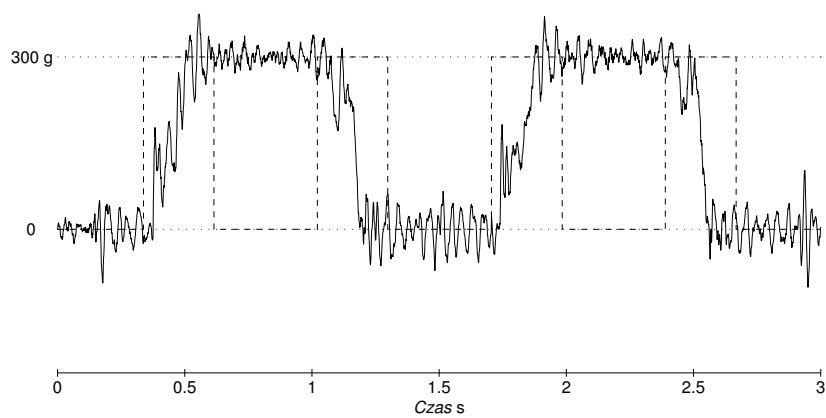
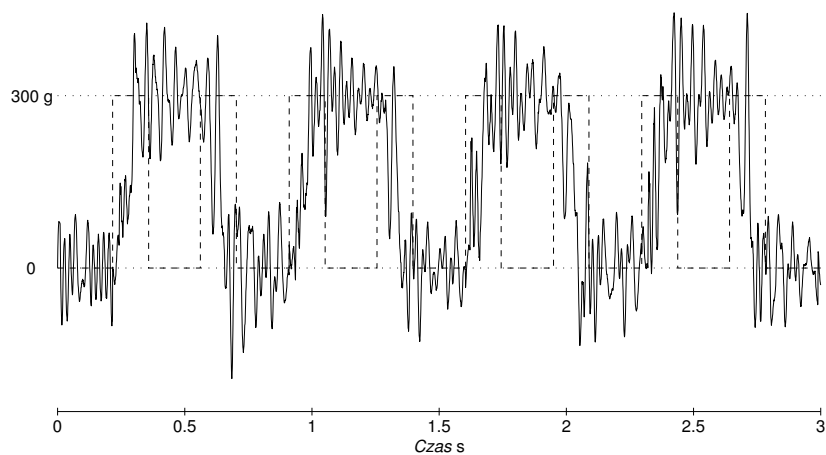
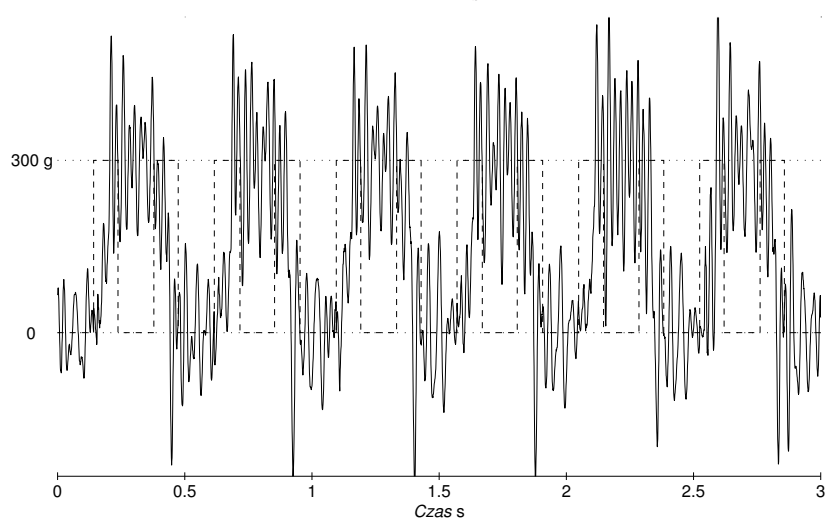
⁴Mowa tu o horyzoncie czasowym t_w odpowiadającym etapowi ważenia cyklu pracy automatycznej wagi kontrolującej, którego długość zależy ściśle od wymiarów geometrycznych L , l oraz prędkości v przenośników, porównaj podpunkt 2.2.2.

tem transportowy linii produkcyjnej. Jest to system aktywny w tym znaczeniu, iż posiada zdolność samoistnego generowania zakłóceń. Do najistotniejszych elementów systemu należą: napęd elektryczny, przekładnia, rolki oraz taśma przenośnika. W trakcie pracy niesymetrycznie rozmieszczone masy w wirujących elementach systemu mogą generować zakłócenia działające w kierunkach poziomym i pionowym [51]. Zazwyczaj, wraz ze wzrostem prędkości przenośników, rośnie również amplituda generowanych przez system transportowy zakłóceń. Efekt ten ilustruje umieszczony na stronie 22 rysunek 2.5, na którym przedstawiono przebieg ważenia przedmiotu testowego m_2 o masie $m = 300$ g, zarejestrowany dla trzech różnych prędkości przenośników taśmowych. Podobna prawidłowość zachodzi także w przypadku nieobciążonego przenośnika ważącego, co zilustrowano na rysunku 2.4.

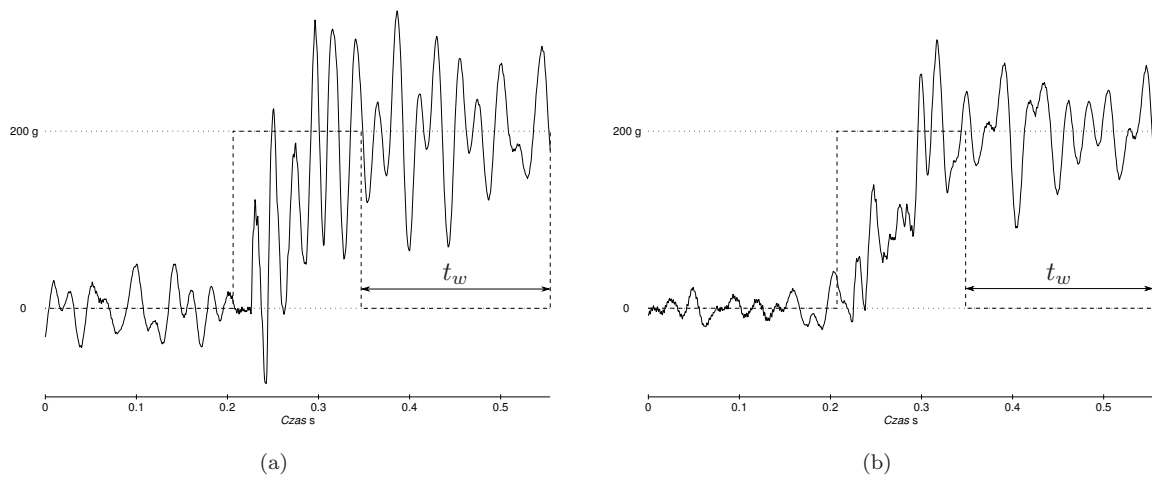
Obiekty ważone, tj. rodzina produktów o różnorodnych kształtach (sześciennie, prostopadłościenne, cylindryczne, etc.), opakowaniach (papier, tektura, plastik, metal, etc.) wypełnione zawartością o różnorodnej konsystencji (płyn, proszek, materiał lity, etc.), można traktować jako obiekty pasywne, które pobudzone do drgań przez system transportowy mogą generować dodatkowe zakłócenia, działające w kierunkach poziomym i pionowym [51]. Ponadto na skutek niewielkiej nawet różnicy wysokości pomiędzy przenośnikami obiekt ważony może w trakcie prowadzenia kontroli uderzać w sposób losowy w przenośnik



Rysunek 2.4: Sygnał ogniwa obciążnikowego przy nieobciążonym przenośniku ważącym zarejestrowany dla czterech różnych wartości prędkości v przenośników taśmowych.

(a) $v = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (b) $v = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (c) $v = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Rysunek 2.5: Przebieg ważenia przedmiotu testowego m_2 o masie $m = 300$ g, dla różnych prędkości v przenośników taśmowych. Sygnały zarejestrowane w ramach pierwszego etapu prac eksperymentalnych.

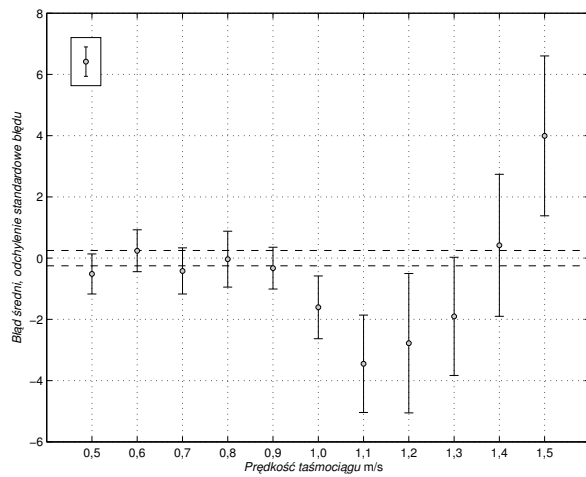
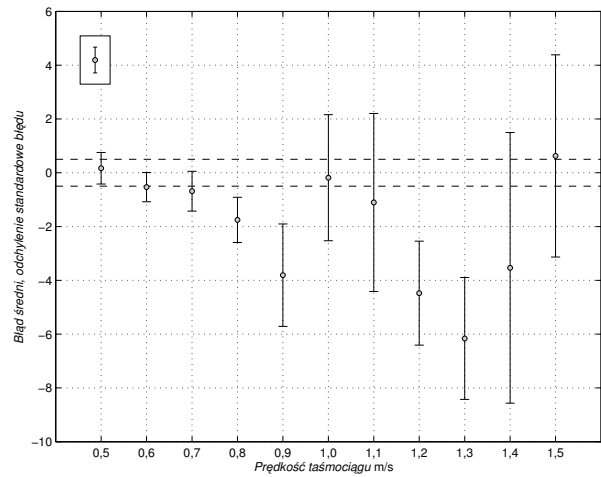
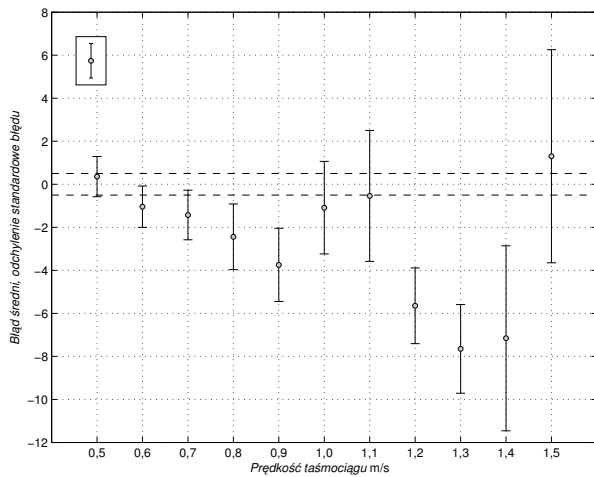
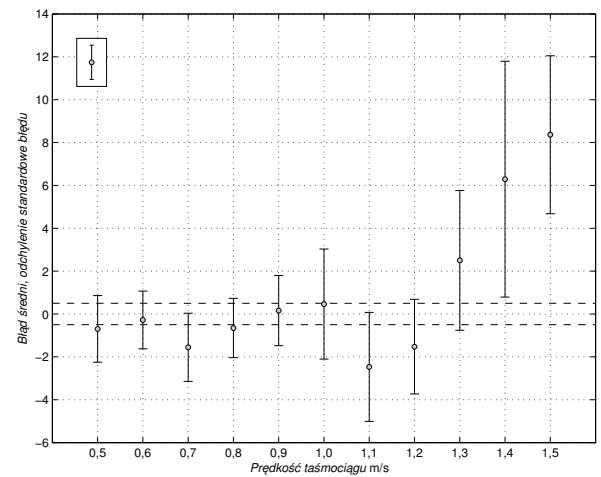


Rysunek 2.6: Sygnał ogniwa obciążnikowego przypadający na etap wjazdu przedmiotu testowego m_1 o masie $m = 200$ g na przenośnik ważący, przy prędkości przenośników $v = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Sygnały zarejestrowane w ramach pierwszego etapu prac eksperymentalnych.

ważący, wywołując tym samym silny impuls zakłócający. Zjawisko to występuje zarówno w trakcie wjazdu przedmiotu ważonego na przenośnik ważący jak i w trakcie zjazdu przedmiotu ważonego z przenośnika ważącego. Porównanie dwóch początkowych etapów cyklu pracy wagi kontrolującej, ilustrujące omawiane zjawisko, przedstawiono na rysunku 2.6.

W wyniku oddziałujących na przyrząd pomiarowy zakłóceń pomimo, iż obciążenie przenośnika ważącego w trakcie etapu ważenia jest stałe (przypomnijmy, że w etapie tym obiekt ważony przebywa na przenośniku ważącym samodzielnie i w całości), rzeczywista wartość sygnału pomiarowego oscyluje wokół wskazania ostatecznego, co z łatwością można dostrzec obserwując zawarte licznie w treści niniejszej rozprawy rysunki przedstawiające sygnał ogniwa obciążnikowego zarejestrowany w ramach zrealizowanych prac eksperymentalnych. Wyznaczając masę obiektu ważonego jedynie na podstawie nieprzetworzonego sygnału z przetwornika pomiarowego łatwo zatem o błąd znacznie przekraczający dopuszczalną wartość. Sytuacja ta nie ulega znaczącej poprawie nawet wtedy, gdy jako wynik pomiaru przyjęta zostanie wartość średnia sygnału pomiarowego wyznaczona w horyzoncie czasowym odpowiadającym etapowi ważenia cyklu pracy automatycznej wagi kontrolującej. Błąd średni oraz odchylenie standardowe błędów charakteryzujące uzyskane tą właśnie metodą wyniki pomiaru przedstawiono na rysunku 2.7. Wartości te wyznaczono dla każdej z serii dwudziestu ważeń zarejestrowanych w ramach pierwszego etapu prac. Maksymalna dopuszczalna wartość średnia błędów cechująca przyrządy pomiarowe w klasie dokładności XIII została zaznaczona na rysunkach 2.7(a) – 2.7(d) linią przerywaną wokół wartości zero, natomiast w ramkach umieszczonych w lewym górnym rogu każdego z rysunków przedstawiono maksymalną dopuszczalną wartość odchylenia standardowego błędów dla przyrządów w klasie dokładności XIII(1). Jak można zauważyć, we wszystkich rozpatrzonych przypadkach, uzyskane wyniki pomiaru nie spełniają wymagań określonych dla przyrządów w zadeklarowanej klasie dokładności.

Potwierdza się zatem przytoczone we wstępie stwierdzenie, iż aby umożliwić poprawne wykonanie pomiaru, tj. zagwarantować by błędy charakteryzujące uzyskane wyniki nie

(a) $m = 200$ g(b) $m = 300$ g(c) $m = 500$ g(d) $m = 700$ g

Rysunek 2.7: Błąd średni oraz odchylenie standardowe błęd wyznaczone dla każdej z serii dwudziestu ważeń zarejestrowanych w ramach pierwszego etapu prac, gdy jako wynik pomiaru przyjęto wartość średnią sygnału pomiarowego wyznaczoną w horyzoncie czasowym odpowiadającym etapowi ważenia.

przekraczały wartości dopuszczalnych, niezbędne jest zastosowanie dodatkowego urządzenia lub metody. Uzyskanie modelu przyrządu pomiarowego, który uwzględniałby wszystkie wymienione wcześniej przyczyny zakłóceń jest zadaniem trudnym. W przypadku przyrządów pracujących w warunkach przemysłowych należy dodatkowo uwzględnić drgania mechaniczne powstałe poza przyrządem pomiarowym, które przedostają się poprzez sprzężenia mechaniczne w postaci wspólnych elementów konstrukcji przyrządu i jego otoczenia. Jak to zostanie wykazane w dalszej części rozprawy konieczność dysponowania matematycznym modelem przyrządu nie zachodzi jeżeli operacja wyznaczania wyników ważenia prowadzona jest w oparciu o przekształcony w procesie filtracji sygnał pomiarowy pochodzący z ogniwa obciążnikowego. W tym przypadku do poprawnego określenia wyniku ważenia dynamicznego wystarczy jedynie, aby wykorzystywany układ filtrujący spełniał dwa elementarne warunki, które sformułujemy w następnym podpunkcie.

2.5.2 Cel filtracji

Podejmowany w literaturze problem filtracji sygnałów pomiarowych, występujących w trakcie ważenia dynamicznego prowadzonego z wykorzystaniem automatycznej wagi kontrolującej, definiuje się na ogół:

- a) w dziedzinie częstotliwości [32],[47],[54]
- b) w dziedzinie czasu [16],
- c) wykorzystując jednocześnie analizę częstotliwościową i czasową [12],[53],[58].

Zilustrowane wcześniej zjawiska odpowiedzialne za powstawanie zakłóceń w trakcie ważenia dynamicznego posiadają złożoną naturę, cechuje je również wysoki stopień losowości. Powoduje to często, iż skład widmowy dwóch wybranych i parami różnych sygnałów pomiarowych zarejestrowanych w zbliżonych warunkach pracy, może znacząco różnić się od siebie. Trudno w tej sytuacji o jednoznaczne określenie wymagań dotyczących pożądanego kształtu charakterystyki częstotliwościowej układu filtrującego. We wstępie rozprawy stwierdziliśmy ponadto, iż jedną z zasadniczych przeszkód w uzyskaniu w krótkim czasie dokładnego wyniku pomiaru stanowi stan przejściowy układu filtrującego, wywołany skokową zmianą składowej stałej sygnału pomiarowego. Uwzględniając powyższe przesłanki, zagadnienie filtracji sygnałów występujących w dynamicznych procesach ważenia *umiejscowimy głównie w dziedzinie czasu traktując przy tym proces filtracji sygnału pomiarowego jako proces wygładzania tegoż sygnału w układzie dynamicznym, jakim jest filtr.*

Operację wyznaczania wyników ważenia dynamicznego prowadzić będziemy w oparciu o przekształcony w procesie filtracji sygnał pomiarowy pochodzący z ogniwa obciążnikowego. Od układu filtrującego oczekiwac będziemy realizacji dwóch warunków szczegółowych:

1. Będziemy oczekiwać, iż w wyniku filtracji sygnału pomiarowego sygnałowi stanowiącemu odpowiedź układu filtrującego nadane zostaną cechy umożliwiające poprawne określenie wyniku pomiaru.
2. Ponadto, z uwagi na fakt, iż w trakcie etapu ważenia obciążenie przenośnika ważącego jest stałe oczekiwac będziemy, iż odpowiedź układu filtrującego począwszy od pewnego punktu czasowego występującego w trakcie etapu ważenia *ustali się* z pewną dopuszczalną tolerancją *wokół wskazania ostatecznego* odpowiadającego prawdziwej wartości masy m przedmiotu ważonego.

Przekształcenie przez filtr sygnału pomiarowego w sygnał spełniający wymienione wyżej warunki stanowić będzie szczegółowy cel filtracji.

Rozdział 3

Dyskretny liniowy niestacjonarny układ filtrujący

3.1 Synteza układu

We wstępie niniejszej rozprawy sformułowaliśmy tezę, iż niestacjonarność układu filtrującego przyczynia się do ograniczenia stanu przejściowego zachodzącego w układzie, wywołanego skokową zmianą składowej stałej sygnału pomiarowego. Rozwiązanie przedstawione w pracy [31] zwróciło naszą uwagę na możliwość realizacji niestacjonarnego układu filtrującego w postaci określonej struktury złożonej z zestawu stacjonarnych dolnoprzepustowych układów filtrujących o komplementarnych własnościach. Takie ujęcie problemu pozwala na sformułowanie zadania syntezy niestacjonarnego układu filtrującego w formie następujących zadań cząstkowych:

1. Wybór struktury układu.
2. Synteza stacjonarnego dolnoprzepustowego układu filtrującego stanowiącego podstawowy element struktury układu.
3. Zdefiniowanie sekwencji działania układu.

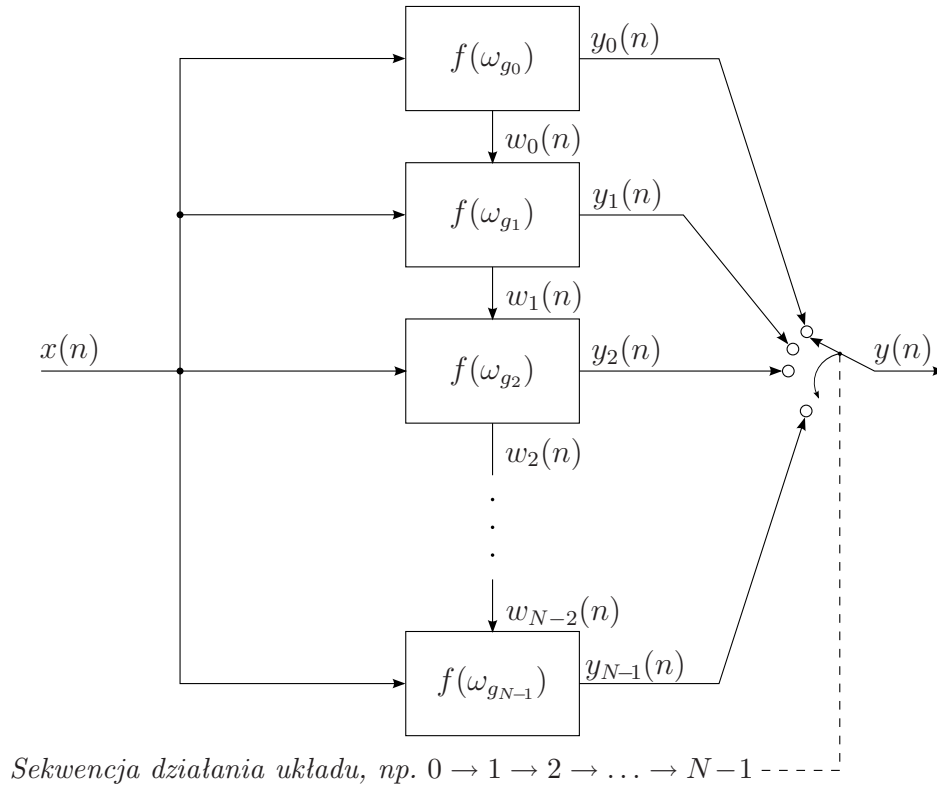
Sformułowane w ten sposób zadanie stanowi plan niniejszego podrozdziału.

3.1.1 Struktura układu

Przed przystąpieniem do realizacji zdefiniowanego powyżej zadania wprowadźmy pewne założenie pomocnicze, stanowiące swego rodzaju drogowskaz w kolejnych etapach projektowania układu. *Zarówno struktura układu jak i jej elementy powinny posiadać minimalną realizację gwarantującą spełnienie podstawowych wymagań wynikających z tezy niniejszej rozprawy.* Minimalna realizacja m.in:

- a) przyczynia się do ograniczenia wymagań sprzętowych niezbędnych do zapewnienia poprawnej pracy układu, co ułatwia jego implementację w prostym systemie mikroprocesorowym,
- b) rodzi perspektywę uzyskania zwartego opisu wejściowo–wyjściowej relacji charakteryzującej uzyskaną strukturę,

- c) ułatwia sformułowanie problemu optymalizacji procesu filtracji, przez co w efekcie może okazać się, iż korzyści jakie płyną z możliwości optymalizacji procesu filtracji w znacznym stopniu rekompensują utratę ogólności, jaka następuje w wyniku nakładania na strukturę i jej elementy kolejnych założeń upraszczających.



Rysunek 3.1: Struktura dyskretnego niestacjonarnego układu filtrującego.

Mając na uwadze powyższe przesłanki, zaproponowano strukturę układu, której schemat blokowy przedstawiono na rysunku 3.1. Poniżej wymieniono główne cechy proponowanej struktury.

1. Struktura składa się z zestawu identycznych filtrów dolnoprzepustowych o różnych wartościach częstotliwości granicznej.
2. W trakcie procesu filtracji dochodzi do przełączania pomiędzy kolejnymi układami filtrującymi, zgodnie z przyjętą sekwencją działania układu, przy czym w określonej chwili czasu może być włączony jeden i tylko jeden układ filtrujący.
3. W momencie przełączenia następuje przekazanie warunków początkowych z układu, który zostaje wyłączony, do układu, który zostaje włączony.

3.1.2 Podstawowy element struktury

Podstawowy element struktury stanowi filtr rekursywny a jego równanie otrzymano poprzez dyskretną aproksymację analogowego prototypu, na który wybrany został filtr dolnoprzepustowy o tłumieniu krytycznym. Okazuje się, iż dyskretną aproksymację omawianego układu można uzyskać *bezpośrednio w dziedzinie czasu*, eliminując tym samym

konieczność odwoływania się do rachunku operatorowego. Punkt wyjścia stanowi zatem równanie charakteryzujące dynamikę pojedynczego ogniwa układu analogowego

$$\frac{\xi_k}{\omega_g} \dot{y}_c(t) + y_c(t) = x_c(t), \quad (3.1)$$

gdzie k oznacza rząd filtra¹, współczynnik $\xi_k = \sqrt{\sqrt[k]{2} - 1}$ i wynika z uwzględnienia założeń widmowych w postaci spadku modułu charakterystyki amplitudowej filtra o 3 dB, przy pulsacji granicznej ω_g a funkcje $x_c(t)$ oraz $y_c(t)$ oznaczają odpowiednio sygnał wejściowy i wyjściowy. Zauważmy, że funkcję $y_c(t)$ z równania (3.1) można przedstawić w postaci następującej całki oznaczonej

$$y_c(t) = \int_{t_0}^t \dot{y}_c(\tau) d\tau + y_c(t_0), \quad (3.2)$$

stąd w szczególności przyjmując $t = n\Delta$ oraz $t_0 = (n-1)\Delta$ otrzymujemy

$$y_c(n\Delta) = \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} \dot{y}_c(\tau) d\tau + y_c((n-1)\Delta). \quad (3.3)$$

Wykorzystując metodę trapezów do numerycznego przybliżenia operacji całkowania przedstawmy powyższą całkę w postaci przybliżonej

$$y_c(n\Delta) = \frac{\Delta}{2} [\dot{y}(n\Delta) + \dot{y}((n-1)\Delta)] + y_c((n-1)\Delta). \quad (3.4)$$

Ponieważ zgodnie z równaniem (3.1) pochodną funkcji w punktach $t = n\Delta$ oraz $t_0 = (n-1)\Delta$ można wyrazić jako

$$\dot{y}_c(n\Delta) = \frac{\omega_g}{\xi_k} [x_c(n\Delta) - y_c(n\Delta)], \quad (3.5)$$

$$\dot{y}_c((n-1)\Delta) = \frac{\omega_g}{\xi_k} [x_c((n-1)\Delta) - y_c((n-1)\Delta)], \quad (3.6)$$

to po podstawieniu równań (3.5) i (3.6) do równania (3.4) i wykonaniu niezbędnych przekształceń otrzymujemy

$$y_c(n\Delta) + \frac{\omega_g - \frac{2\xi_k}{\Delta}}{\omega_g + \frac{2\xi_k}{\Delta}} y_c((n-1)\Delta) = \frac{\omega_g}{\omega_g + \frac{2\xi_k}{\Delta}} x_c(n\Delta) + \frac{\omega_g}{\omega_g + \frac{2\xi_k}{\Delta}} x_c((n-1)\Delta). \quad (3.7)$$

Następnie, poprzez odwzorowanie $y(n) = y_c(n\Delta)$ i $x(n) = x_c(n\Delta)$, dla $n = 0, 1, 2, \dots$, oraz przyjmując

$$-\lambda = \frac{\omega_g - \frac{2\xi_k}{\Delta}}{\omega_g + \frac{2\xi_k}{\Delta}}, \quad (3.8)$$

równanie (3.7) możemy przekształcić do postaci

$$y(n) - \lambda y(n-1) = \frac{1-\lambda}{2} x(n) + \frac{1-\lambda}{2} x(n-1), \quad (3.9)$$

otrzymując tym samym równanie różnicowe stanowiące dyskretną aproksymację równania (3.1), w której okres próbkowania wynosi Δ .

¹Dolnoprzepustowy filtr o tłumieniu krytycznym rzędu k można bez przeszkód zrealizować jako kaskadowe połączenie k układów (3.1).

3.1.3 Sekwencja działania układu

Rozważmy teraz problem dotyczący ilości elementów wchodzących w skład struktury układu filtrującego oraz zdefiniujemy sekwencję jego działania.

Do rozdziału piątego niniejszej rozprawy, w którym zdefiniujemy ciągły tryb pracy opracowywanego układu, proces filtracji sygnałów występujących w dynamicznych systemach ważenia rozpatrywać będziemy w *skończonym horyzoncie czasowym*, obejmującym N kolejnych okresów próbkowania Δ . Tym samym rozważać będziemy pewien skończony ciąg, o indeksach w zbiorze

$$I_H = \{n \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq n \leq N - 1\}, \quad (3.10)$$

stanowiący odpowiedź układu filtrującego na zadane wymuszenie. Przyjmijmy, że:

1. W trakcie prowadzonego procesu filtracji wykorzystywany jest zestaw N filtrów (3.9) tworzących strukturę przedstawioną na rysunku 3.1, przy czym jeden filtr przypada na każdą parę dwóch kolejnych próbek sygnału wejściowego, tj.

$$\{x(n), x(n - 1)\} \text{ dla } n \in I_H. \quad (3.11)$$

Ponieważ, jak to zostanie przedstawione w punkcie 4.2, w ogólnym przypadku nie występują trudności w uzyskaniu informacji o wartości sygnału wejściowego x w chwili $n = -1$, będziemy przyjmować, iż prowadząc proces filtracji dysponujemy sygnałem wejściowym

$$x(-1), x(0), x(1), \dots, x(N - 1) \quad (3.12)$$

zawierającym $N+1$ kolejnych próbek sygnału pomiarowego, przypadających na wybrane etapy cyklu pracy automatycznej wagi kontrolującej.

2. Przełączanie pomiędzy kolejnymi elementami struktury następuje według ustalonego porządku, tj.

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N - 1, \quad (3.13)$$

z interwałem czasowym równym okresowi próbkowania Δ .

Zdefiniowany w powyższy sposób proces filtracji określa następujący układ równań

$$\begin{cases} y_0(0) = \lambda_0 y_0(-1) + \lambda_0^* (x(0) + x(-1)) \\ y_1(1) = \lambda_1 y_1(0) + \lambda_1^* (x(1) + x(0)) \\ y_2(2) = \lambda_2 y_2(1) + \lambda_2^* (x(2) + x(1)) \\ \vdots \\ y_{N-1}(N-1) = \lambda_{N-1} y_{N-1}(N-2) + \lambda_{N-1}^* (x(N-1) + x(N-2)), \end{cases} \quad (3.14)$$

gdzie y_n oraz λ_n oznaczają odpowiednio sygnał wyjściowy oraz parametr (współczynnik) n -tego elementu struktury. Celem uproszczenia notacji, w układzie 3.14 wprowadzona została dodatkowa zmienna λ^* zdefiniowana jako

$$\lambda_n^* = \frac{1 - \lambda_n}{2}. \quad (3.15)$$

Wartość sygnału występującą na wyjściu zerowego układu filtrującego w chwili $n = -1$, tj. $y_0(-1)$, nazywać będziemy *warunkiem początkowym procesu filtracji* i oznaczmy ją jako y_p . Zgodnie z założeniami przedstawionymi w podpunkcie 3.1.1 w momencie przełączania pomiędzy kolejnymi elementami struktury następuje przekazywanie warunków początkowych, przy czym uwzględniając przyjętą kolejność działania (3.13), porządek przekazywania warunków początkowych pomiędzy elementami struktury określa poniższy układ równań

$$\begin{cases} y_0(-1) = y_p \\ y_1(0) = y_0(0) \\ y_2(1) = y_1(1) \\ \vdots \\ y_{N-1}(N-2) = y_{N-2}(N-2). \end{cases} \quad (3.16)$$

Sygnał wyjściowy układu stanowi ciąg złożony z N kolejnych próbek sygnału występującego na wyjściu n -tego elementu struktury w chwili n , tj. ciąg

$$y(0), y(1), y(2), \dots, y(N-1), \quad (3.17)$$

taki że

$$y(n) = y_n(n) \quad \text{dla } n \in I_H. \quad (3.18)$$

Wykażemy teraz, iż odgórne narzucenie porządku przełączania pomiędzy kolejnymi elementami struktury nie ogranicza ogólności rozważań dotyczących tegoż porządku oraz ilości wykorzystywanych elementów. Odnotujmy, iż maksymalna liczba elementów struktury jest ograniczona od góry długością zdefiniowanego horyzontu czasowego i wynosi N . Uwzględniając przyjęty porządek przełączania, przyporządkujemy każdemu z elementów określoną wartość współczynnika λ_n . Utworzymy tym samym pewien ciąg

$$\begin{matrix} 0 & & 1 & & 2 & & \dots & & N-1 \\ \lambda_0, & \rightarrow & \lambda_1, & \rightarrow & \lambda_2, & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \lambda_{N-1}. \end{matrix} \quad (3.19)$$

Łatwo wykazać, że:

- dowolna permutacja ciągu (3.19) powoduje zmianę działania układu w taki sposób, jak gdyby zmieniony został porządek przełączania pomiędzy kolejnymi elementami struktury,
- poprzez zrównanie wartości dowolnej pary kolejnych współczynników

$$\lambda_n = \lambda_{n-1}, \quad \text{dla } n = 1, \dots, N-1,$$

zdefiniowany wyżej proces filtracji zachowuje się tak, jak gdyby liczba wykorzystanych układów filtrujących została zmniejszona o jeden; konsekwentne stosowanie przedstawionej zasady pozwala na zredukowanie ilości wykorzystywanych elementów struktury do dowolnej wartości z zakresu od $N-2$ do 1.

A zatem, poprzez zmianę wartości kolejnych elementów ciągu (3.19), mamy wpływ zarówno na porządek przełączania pomiędzy poszczególnymi elementami struktury jak i na całkowitą ilość elementów wykorzystywanych w horyzoncie czasowym I_H . Mając na uwadze wymienione wyżej własności, możemy stwierdzić, iż *sekwencję działania układu filtrującego w sposób jednoznaczny określa ciąg N współczynników $\{\lambda_n\}_0^{N-1}$* .

3.2 Rekurencyjne równanie układu

Na mocy (3.16) łatwo wykazać, iż słuszna jest następująca implikacja

$$\bigwedge_{n \in I_H} y(n) = y_n(n) \implies \bigwedge_{n=0, \dots, N-2} y(n) = y_{n+1}(n). \quad (3.20)$$

W układzie równań (3.14) zastąpmy zatem

- a) wartość $y_n(n)$ wartością $y(n)$ dla $n \in I_H$,
- b) wartość $y_{n+1}(n)$ wartością $y(n)$ dla $n = 0, \dots, N-2$.

Jeżeli uwzględnimy dodatkowo następujący warunek początkowy

$$y(-1) = y_p \quad (3.21)$$

oraz przyjmiemy

$$\lambda_n = \lambda(n) \quad \text{dla } n \in I_H, \quad (3.22)$$

to proces filtracji zdefiniowany przez układy równań (3.14) i (3.16) możemy zapisać w *równoważnej postaci*, danej układem

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = \lambda(0)y(-1) + \lambda^*(0)(x(0)+x(-1)) \\ y(1) = \lambda(1)y(0) + \lambda^*(1)(x(1)+x(0)) \\ y(2) = \lambda(2)y(1) + \lambda^*(2)(x(2)+x(1)) \\ \vdots \\ y(N-1) = \lambda(N-1)y(N-2) + \lambda^*(N-1)(x(N-1)+x(N-2)) \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Z powyższego układu równań wnioskujemy natychmiast, iż układ ten posiada następującą *postać rekurencyjną*

$$y(n) = \lambda(n)y(n-1) + \lambda^*(n)(x(n) + x(n-1)), \quad \text{dla } n \in I_H, \quad (3.24)$$

którą po przekształceniu możemy zapisać w postaci

$$y(n) = \lambda(n)y(n-1) + \frac{1-\lambda(n)}{2}x(n) + \frac{1-\lambda(n)}{2}x(n-1), \quad \text{dla } n \in I_H. \quad (3.25)$$

Ponieważ równanie (3.25) jest równoważne z układem równań (3.23), to jest także równoważne z układami równań (3.14), (3.16). Tym samym otrzymaliśmy trzy równoważne sposoby opisu dyskretnego niestacjonarnego układu filtrującego, przy czym w dalszej części rozprawy będziemy posługiwać się wyłącznie postacią (3.25). W tym przypadku sekwencję działania układu filtrującego w sposób jednoznaczny określa ciąg $\{\lambda(n)\}_0^{N-1}$, równoważny na mocy (3.22) ciągowi $\{\lambda_n\}_0^{N-1}$.

Zauważmy, iż uzyskane równanie różnicowe (3.25) stanowi niestacjonarny odpowiednik równania (3.9). Możliwość uzyskania rekurencyjnej realizacji układu pozwala na sformułowanie ważnego wniosku. Wychodząc od założeń przedstawionych w pracy [31], przechodząc następnie poprzez kolejne etapy syntezy układu rozumianego jako pewna struktura złożona z zestawu stacjonarnych dolnoprzepustowych układów filtrujących, otrzymaliśmy niestacjonarny układ filtrujący w rozumieniu [23],[27],[40],[42],[43]. Okazuje się zatem, iż w pewnych szczególnych przypadkach idee, które stoją za rozwiązaniami przytoczonymi we wstępie niniejszej rozprawy, znajdują wspólną realizację.

3.3 Stabilność układu

Pomimo, że proces filtracji sygnałów pomiarowych występujących w trakcie ważenia dynamicznego odbywa się w skończonym horyzoncie czasowym, to – jak to zostanie przedstawione w dalszej części niniejszej rozprawy – rozpatrywany układ filtrujący pracuje w trybie ciągłym, w którym w zależności od aktualnego etapu cyklu pracy wagi zmienia się tryb pracy układu filtrującego (por. rozdział 5). W tej sytuacji ważną rolę zaczyna odgrywać stabilność procesu filtracji określonego w nieskończonym horyzoncie czasowym, tj. procesu filtracji sygnału $\{x(n)\}_{-1}^{\infty}$, którego sekwencję działania określa ciąg $\{\lambda(n)\}_0^{\infty}$.

W poprzednim punkcie doszliśmy do wniosku, iż układ filtrujący, którego syntezy dokonaliśmy w podrozdziale 3.1, to w istocie niestacjonarny filtr rekursywny o zmiennych w czasie współczynnikach. W przeciwieństwie do filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej stabilność filtrów rekursywnych nie jest gwarantowana [35]. Niestety w przypadku układów niestacjonarnych trudno o uniwersalne kryteria umożliwiające weryfikację stabilności, pozostają zatem jedynie ogólne narzędzia, w tym m.in. druga metoda Lapunowa [44]. Jednak, jak to zostanie przedstawione w treści niniejszego podrozdziału, w przypadku układu (3.25) stosunkowo łatwo wyznaczyć można ciąg $\{y(n)\}_0^{\infty}$, stanowiący odpowiedź omawianego układu na sygnał wejściowy $\{x(n)\}_{-1}^{\infty}$, przy zadanym warunku początkowym wynoszącym $y(-1) = y_p$. W oparciu o wyznaczony ciąg pokażemy, iż przy spełnieniu określonego warunku układ (3.25) jest stabilny asymptotycznie a także, iż przy spełnieniu tego samego warunku z założenia o ograniczoności ciągu $\{x(n)\}_{-1}^{\infty}$ wynika ograniczoność ciągu $\{y(n)\}_0^{\infty}$. Zaczniemy od określenia rozwiązania równania (3.25).

Twierdzenie 3.1. *Ciąg $\{z(n)\}$ o wyrazie ogólnym*

$$z(n) = y_p \prod_{i=0}^n \lambda(i) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1-\lambda(i)}{2} (x(i) + x(i-1)) \prod_{j=i+1}^n \lambda(j) + \frac{1-\lambda(n)}{2} (x(n) + x(n-1)), \quad (3.26)$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$, określa w sposób jednoznaczny odpowiedź układu (3.25) na ciąg $\{x(n)\}_{-1}^{\infty}$ z warunkiem początkowym y_p .

Dowód. Dowód twierdzenia przeprowadzimy przez indukcję.

I. Stwierdzamy, że $y(0) = z(0)$. Ponieważ pierwszy wyraz ciągu (3.26) wynosi

$$z(0) = \lambda(0)y_p + \frac{1-\lambda(0)}{2}(x(0) + x(-1)), \quad (3.27)$$

to zgodnie z (3.25) wykazaliśmy $y(0) = z(0)$.

II. Udowodnimy teraz, że

$$y(n-1) = z(n-1) \Rightarrow y(n) = z(n). \quad (3.28)$$

W tym celu założymy, że

$$\begin{aligned} y(n-1) &= y_p \prod_{i=0}^{n-1} \lambda(i) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1-\lambda(i)}{2} (x(i) + x(i-1)) \prod_{j=i+1}^{n-1} \lambda(j) + \\ &+ \frac{1-\lambda(n-1)}{2} (x(n-1) + x(n-2)). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Aby wyznaczyć element $y(n)$, skorzystamy z równania (3.25), w którym za $y(n-1)$ wstawimy wyrażenie (3.29). Po przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned} y(n) &= y_p \prod_{i=0}^n \lambda(i) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1-\lambda(i)}{2} (x(i) + x(i-1)) \prod_{j=i+1}^n \lambda(j) + \\ &+ \frac{1-\lambda(n)}{2} (x(n) + x(n-1)), \end{aligned} \quad (3.30)$$

co dowodzi $y(n) = z(n)$.

Ponieważ wszystkie założenia zasady indukcji zupełnej zostały spełnione [45], wnioskujemy, że $y(n) = z(n)$ dla każdej liczby $n = 0, 1, 2, \dots$ $\square$

Zanim przystąpimy do analizy stabilności układu, zbadamy jeszcze zbieżność ważnego ciągu. Otrzymany warunek zbieżności okaże się być warunkiem stabilności układu (3.25).

Twierdzenie 3.2. *Dany jest ciąg współczynników równania (3.25) $\{\lambda(n)\}_0^\infty$ oraz zbiór $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : -1 + \varepsilon < \lambda < 1 - \varepsilon\}$, gdzie ε oznacza dowolnie małą liczbę rzeczywistą, taką że $\varepsilon > 0$. Jeżeli*

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} \lambda(n) \in \Lambda, \quad (3.31)$$

to ciąg iloczynów częściowych $\{b(n)\}_0^\infty$ o wyrazie ogólnym

$$b(n) = \prod_{i=0}^n \lambda(i) \quad (3.32)$$

posiada granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n \lambda(i) = 0. \quad (3.33)$$

Dowód. Jeżeli spełniony jest warunek (3.31), to

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} -1 + \varepsilon < b(n) < 1 - \varepsilon. \quad (3.34)$$

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dla dowolnego ciągu $\{b(n)\}_0^\infty$ możemy utworzyć dwa dodatkowe ciągi, tj. $\{a(n)\}_0^\infty$ o wyrazie ogólnym $a(n) = -|a^{n+1}|$ oraz $\{c(n)\}_0^\infty$ o wyrazie ogólnym $c(n) = c^{n+1}$, takie że

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} -1 + \varepsilon < a(n) \leq b(n) \leq c(n) < 1 - \varepsilon. \quad (3.35)$$

Przypomnijmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad \text{gdzie } |q| < 1. \quad (3.36)$$

Ponieważ z warunku (3.35) wynika w szczególności dla $n = 0$, że $|a| < 1$ oraz $|c| < 1$, to na podstawie (3.36) ciągi $\{a(n)\}_0^\infty$ oraz $\{c(n)\}_0^\infty$ są zbieżne do zera. Dodatkowo na mocy twierdzenia o trzech ciągach, uwzględniając warunek (3.35), także ciąg $\{b(n)\}_0^\infty$ jest zbieżny do zera. $\square$

Komentarz do twierdzenia 3.2

Założenie twierdzenia 3.2 stanowi jedynie warunek wystarczający zbieżności ciągu $\{b(n)\}_0^\infty$. Jeżeli bowiem jeden z czynników iloczynu wynosi zero, to wartość całego iloczynu jest także równa zero. Przypadek ten rozpatrzymy przy okazji dowodu twierdzenia 3.4, jednak w ogólnych rozważaniach będziemy go wyłączać.

Podobnie nietrudno wykazać, iż do zbieżności ciągu (3.32) wystarczy, jeżeli warunek (3.31) jest spełniony począwszy od pewnego $N_0 \geq 0$, tj.

$$|\lambda(n)| < 1 - \varepsilon \quad \text{dla} \quad n = N_0, N_0+1, N_0+2, \dots \quad (3.37)$$

Mając jednak na uwadze poniższe przesłanki:

- a) w przypadku rozpatrywanego niestacjonarnego układu filtrującego współczynniki $\lambda(n)$, takie że $\lambda(n) < -1 + \varepsilon$ oraz $\lambda(n) > 1 - \varepsilon$ nie posiadają znaczenia praktycznego, co zostanie przedstawione w dalszej części niniejszego rozdziału,
 - b) zarówno w przypadku stało- bądź zmiennoprzecinkowej implementacji rozpatrywanego układu możliwość występowania w skończonym horyzoncie czasowym współczynników, takich że $|\lambda(n)| > 1$ rodzi ryzyko wystąpienia przepełnienia rejestru,
- świadomie ograniczymy nasze rozważania do przypadku określonego warunkiem (3.31).

3.3.1 Warunki stabilności układu

Posiłkując się twierdzeniem 3.2, rozpatrzmy teraz warunki stabilności układu opisanego przez równanie różnicowe (3.25). Rozpocznijmy od zdefiniowania warunków dotyczących stabilności układu autonomicznego (bez wejścia).

Twierdzenie 3.3. *Jeżeli wszystkie współczynniki $\lambda(n)$ autonomicznego układu dynamicznego opisanego równaniem różnicowym (3.25) spełniają warunek (3.31), to układ ten jest stabilny asymptotycznie.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia 3.1, jeżeli

$$x(n) = 0 \quad \text{dla} \quad n = -1, 0, 1, \dots, \quad (3.38)$$

to

$$y(n) = y_p \prod_{i=0}^n \lambda(i). \quad (3.39)$$

Zgodnie z twierdzeniem 3.2 warunek (3.31) implikuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = y_p \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n \lambda(i) = 0. \quad \square \quad (3.40)$$

Wykażemy teraz, iż układ (3.25) jest układem stabilnym także w sensie wejściowo-wyjściowym. Przywołajmy definicję wejściowo-wyjściowej stabilności układu [46].

Definicja 3.1. Układ dynamiczny opisany równaniem różnicowym (3.25) nazywamy *stabilnym w sensie wejściowo-wyjściowym*, jeżeli dla każdego ograniczonego wejścia $\{x(n)\}_{-1}^{\infty}$ spełniającego warunek

$$\sup_{n=-1,0,1,\dots} |x(n)| < \infty \quad (3.41)$$

odpowiedź układu $\{y(n)\}_0^{\infty}$ jest również ograniczona, tzn. spełnia warunek

$$\sup_{n=0,1,2,\dots} |y(n)| < \infty. \quad (3.42)$$

Twierdzenie 3.4. Jeżeli wszystkie współczynniki $\lambda(n)$ układu dynamicznego opisanego równaniem różnicowym (3.25) spełniają zależność (3.31), to układ ten jest stabilny w sensie wejściowo-wyjściowym.

Dowód. Zgodnie z tezą twierdzenia 3.1, przyjmując dodatkowo, iż ciąg $\{x(n)\}_{-1}^{\infty}$ jest ograniczony oraz uwzględniając założenie twierdzenia 3.4, wartość $|y(n)|$ w skończonym horyzoncie czasowym jest zawsze ograniczona. Zatem rozstrzygającym jest pytanie, jak zachowuje się $|y(n)|$, gdy $n \rightarrow \infty$. Oznaczmy

$$x_M = \sup_{n=-1,0,1,\dots} |x(n)|. \quad (3.43)$$

Na podstawie twierdzenia 3.1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |y(n)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| y_p \prod_{i=0}^n \lambda(i) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1-\lambda(i)}{2} (x(i) + x(i-1)) \prod_{j=i+1}^n \lambda(j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\lambda(n)}{2} (x(n) + x(n-1)) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| y_p \prod_{i=0}^n \lambda(i) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1-\lambda(i)}{2} (x_M + x_M) \prod_{j=i+1}^n \lambda(j) + \frac{1-\lambda(n)}{2} (x_M + x_M) \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| y_p \prod_{i=0}^n \lambda(i) + x_M \sum_{i=0}^{n-1} (1-\lambda(i)) \prod_{j=i+1}^n \lambda(j) + x_M (1-\lambda(n)) \right|. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Zauważmy dodatkowo, iż występująca w powyższym wyrażeniu suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} (1-\lambda(i)) \prod_{j=i+1}^n \lambda(j) = \dots \quad (3.45)$$

daje się przedstawić w następujący sposób

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^n \lambda(j) - \lambda(i) \prod_{j=i+1}^n \lambda(j) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^n \lambda(j) - \prod_{j=i}^n \lambda(j) \right) = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \lambda(j) \right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i}^n \lambda(j) \right) = \\ &= \lambda(n) + \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i}^n \lambda(j) - \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i}^n \lambda(j) - \prod_{j=0}^n \lambda(j), \end{aligned} \quad (3.46)$$

zawiera więc $n - 1$ identycznych składników o przeciwnych znakach. Zatem słuszne jest

$$\sum_{i=0}^{n-1} (1 - \lambda(i)) \prod_{j=i+1}^n \lambda(j) = \lambda(n) - \prod_{i=0}^n \lambda(i). \quad (3.47)$$

Rozpatrzmy dwa przypadki.

1. Przyjmijmy, że

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} -1 + \varepsilon < \lambda(n) \neq 0 < 1 - \varepsilon. \quad (3.48)$$

Uwzględniając (3.47), w wyrażeniu (3.44) mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y(n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| y_p \prod_{i=0}^n \lambda(i) - x_M \prod_{i=0}^n \lambda(i) + x_M \right|. \quad (3.49)$$

Zgodnie z założeniem (3.48) oraz na podstawie twierdzenia 3.2 występujący w powyższym wyrażeniu iloczyn jest zbieżny do zera, zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y(n)| \leq x_M. \quad (3.50)$$

2. Przyjmijmy, że począwszy od pewnego N_0 :

a)

$$-1 + \varepsilon < \lambda(n) \neq 0 < 1 - \varepsilon \quad \text{dla } n = N_0, N_0+1, N_0+2, \dots, \quad (3.51)$$

b) dla $n = 0, \dots, N_0 - 1$ przynajmniej raz $\lambda(n) = 0$,

c) współczynnik $\lambda(n)$ przyjmuje wartość zero po raz ostatni dla $n = N_0 - 1$.

Zauważmy, iż wystąpienie zerowej wartości współczynnika $\lambda(n)$ w zdefiniowanym horyzoncie czasowym powoduje wyzerowanie stanu układu, bowiem:

a) w wyrażeniu (3.44) zanika składnik pochodzący od niezerowego warunku początkowego y_p ,

b) fakt, iż suma (3.45) zawiera iloczyn przeszłych współczynników $\lambda(n)$ powoduje, że przyjmuje ona trwale wartości różne od zera dopiero począwszy od $n = N_0$.

Ponadto zauważmy, że liczba wystąpień zerowej wartości współczynnika $\lambda(n)$ w zdefiniowanym horyzoncie czasowym nie wpływa na wynik końcowy. Mamy zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y(n)| \leq \left| x_M \sum_{i=N_0}^{n-1} (1 - \lambda(i)) \prod_{j=i+1}^n \lambda(j) + x_M (1 - \lambda(n)) \right|. \quad (3.52)$$

Uwzględniając (3.47) w powyższym wyrażeniu, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y(n)| \leq \left| x_M \prod_{i=N_0}^n \lambda(j) + x_M \right|. \quad (3.53)$$

Na podstawie twierdzenia 3.2 oraz biorąc pod uwagę warunek (3.51), występujący w powyższym wyrażeniu iloczyn jest zbieżny do zera, więc ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y(n)| \leq x_M. \quad (3.54)$$

Pomijając oczywistą sytuację, w której począwszy od pewnego $N_1 > N_0$

$$\lambda(n) = 0, \quad \text{dla } n = N_1, N_1+1, N_1+2, \dots, \quad (3.55)$$

bądź sytuację, w której ciąg $\{\lambda(n)\}_0^\infty$ jest ciągiem stałym równym zero, przedstawione powyżej przypadki wyczerpują wszystkie możliwości.

W ten sposób wykazaliśmy, iż spełnienie założenia (3.31) implikuje wejściowo–wyjściową stabilność układu. $\square$

3.4 Funkcja uzmienniająca układu

Stwierdziliśmy poprzednio, iż ciąg $\{\lambda(n)\}_0^{N-1}$ w sposób jednoznaczny określa sekwencję działania układu (3.25). Aby w pełni scharakteryzować zdefiniowany w niniejszym rozdziale proces filtracji, pozostało zatem wyznaczyć wartości kolejnych elementów owego ciągu. Dokonamy tego poprzez wyrażenie (3.8), które faktycznie definiuje odwzorowanie

$$f_\omega : \omega_g \mapsto -\frac{\omega_g - \frac{2\xi_k}{\Delta}}{\omega_g + \frac{2\xi_k}{\Delta}}. \quad (3.56)$$

Uwzględniając, wyznaczony w poprzednim podrozdziale, warunek stabilności układu (3.25) dziedzinę odwzorowania (3.56) ograniczymy² do zbioru

$$\Omega = \left\{ \omega_g \in \mathbb{R} : \frac{2\xi_k}{\Delta} \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < \omega_g < \frac{2\xi_k}{\Delta} \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \right\}, \quad (3.57)$$

gdzie ε oznacza dowolnie małą liczbę rzeczywistą, taką że $\varepsilon > 0$. Łatwo wykazać, iż funkcja f_ω jest funkcją różnowartościową w zbiorze liczb rzeczywistych oraz:

- a) jest malejąca w przedziale $(0, \infty)$, bowiem dla $\omega_g \in (0, \infty)$ mamy $\frac{df_\omega(\omega_g)}{d\omega_g} < 0$
- b) $\lim_{\omega_g \rightarrow 0^+} = 1$,
- c) oraz posiada prawostronną asymptotę poziomą, bowiem $\lim_{\omega_g \rightarrow \infty} = -1$.

Odwzorowuje ona zatem w sposób *wzajemnie jednoznaczny* zbiór $(0, \infty)$ w zbiór $(-1, 1)$, w tym w szczególności odwzorowuje zbiór Ω w zbiór Λ . Oznacza to, iż *dowolna zmiana pulsacji granicznej układu, taka że dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ zachodzi $\omega_g(n) \in \Omega$ gwarantuje jego stabilność*. Ponadto poprzez odwzorowanie f_ω także ciąg $\{\omega_g(n)\}_0^{N-1}$ określa w sposób jednoznaczny sekwencję działania układu (3.25).

Istotną rolę, jaką w procesie filtracji odgrywa ciąg $\{\omega_g(n)\}_0^{N-1}$, uwypuklimy wprowadzając pojęcie funkcji uzmienniającej układu filtrującego.

Definicja 3.2. Funkcję $\omega_g : I_H \rightarrow \Omega$, która wyznacza ciąg $\{\omega_g(n)\}_0^{N-1}$ nazywać będziemy funkcją uzmienniającą układu filtrującego (3.25).

Zdefiniowanie kryteriów optymalizacji procesu filtracji oraz poszukiwanie optymalnej funkcji uzmienniającej stanowić będzie główne zadanie dalszej części rozprawy. Problem ten

²Warto zauważyć, iż z praktycznego punktu widzenia przyjęcie $\omega_g \in \Omega$ nie zawęży klasy rozpatrywanych układów filtrujących; wykluczone są wyłącznie nieskończenie małe i nieskończenie duże wartości ω_g .

będziemy rozważać w postaci sparametryzowanej. Rozpocznijmy bowiem od zdefiniowania zbioru parametrów charakteryzujących ciąg $\{\omega_g(n)\}_0^{N-1}$, w oparciu o który sformułujemy następnie równania wybranych funkcji uzmienniających. Zaczniemy od nałożenia na ciąg $\{\omega_g(n)\}_0^{N-1}$ następującego ograniczenia

$$\omega_g(0) \geq \omega_g(0) \geq \omega_g(1) \geq \dots \geq \omega_g(N-1). \quad (3.58)$$

Wprowadźmy dwie liczby ω_0 oraz ω_∞ ograniczające powyższy ciąg, takie że w zbiorze wartości ciągu $\{\omega_g(n)\}_0^{N-1}$ obowiązuje porządek

$$\omega_0 \geq \omega_g(0) \geq \omega_g(1) \geq \omega_g(2) \geq \dots \geq \omega_g(N-1) \geq \omega_\infty. \quad (3.59)$$

Zdefiniujmy również funkcję $g : \alpha \mapsto \omega_0\alpha + \omega_\infty(1-\alpha)$, która każdemu elementowi $\alpha \in (0, 1)$ przyporządkowuje element $g(\alpha) \in (\omega_\infty, \omega_0)$. Liczbę $N_\alpha \in \mathbb{R}^+$, taką że począwszy od $n \geq N_\alpha$ zachodzi $\omega_g(n) \leq g(\alpha)$ nazywać będziemy liczbą graniczną układu filtrującego. Mając zdefiniowane parametry ω_0 , ω_∞ , α i N_α , utwórzmy następujące funkcje:

a) funkcję liniową $f_1 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \Omega$ o równaniu

$$f_1(n) = \begin{cases} (\omega_0 - \omega_\infty)(\alpha - 1)\frac{n}{N_\alpha} + \omega_0, & \text{dla } 0 \leq n \leq \frac{N_\alpha}{1-\alpha}, \\ \omega_\infty, & \text{dla } n > \frac{N_\alpha}{1-\alpha} \end{cases}, \quad (3.60)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1)$,

b) funkcję wykładniczą $f_2 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \Omega$ o równaniu

$$f_2(n) = \omega_\infty + (\omega_0 - \omega_\infty)\alpha^{\frac{n}{N_\alpha}}, \quad (3.61)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1)$,

c) funkcję typu Gaussa $f_3 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \Omega$ o równaniu

$$f_3(n) = \omega_\infty + (\omega_0 - \omega_\infty)\alpha^{\left(\frac{n}{N_\alpha}\right)^2}, \quad (3.62)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1)$,

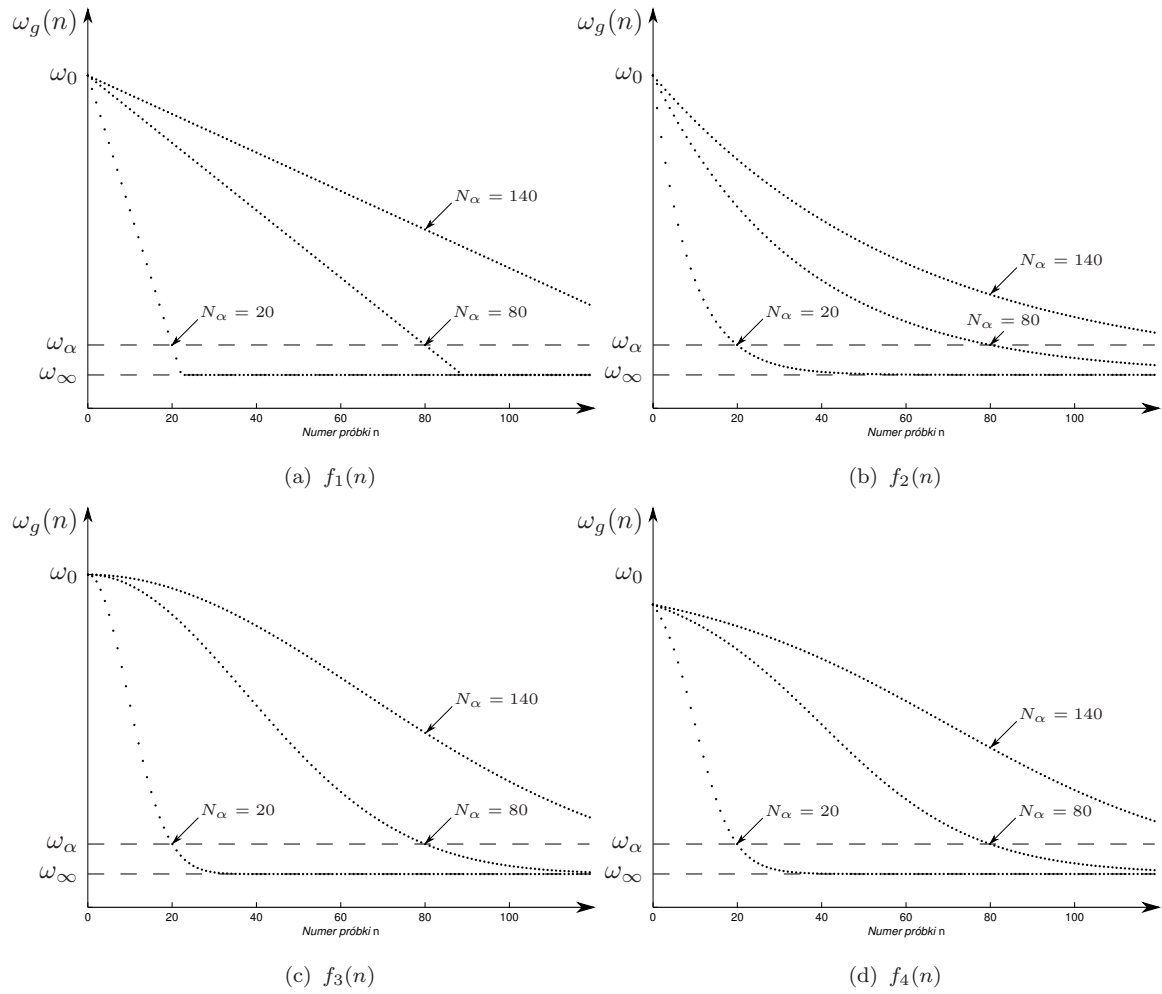
d) funkcję logistyczną $f_4 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \Omega$ o równaniu

$$f_4(n) = \omega_\infty + \frac{(\omega_0 - \omega_\infty)}{1 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{n - \frac{1}{2}N_\alpha}{\frac{1}{2}N_\alpha}}}, \quad (3.63)$$

gdzie $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

Łatwo wykazać, iż zdefiniowane powyżej funkcje posiadają następujące własności:

1. $\omega_g(0) \geq \omega_g(1) \geq \omega_g(2) \geq \dots \geq \omega_g(N-1) \geq \dots$,
2. $\omega_0 = \omega_g(0)$ z wyjątkiem (3.63), dla której zachodzi $\omega_0 > \omega_g(0)$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_g(n) = \omega_\infty$,
4. $\omega_g(N_\alpha) = g(\alpha)$.



Rysunek 3.2: Wykresy funkcji (3.60) – (3.63), gdzie ω_α oznacza $\omega_g(N_\alpha)$, dla $\alpha = 0,1$.

Funkcja (3.63) posiada dodatkowo własność $\omega_g(\frac{1}{2}N_\alpha) = \frac{\omega_\infty + \omega_0}{2}$. Wartość parametru α należy ustalić jako względnie małą liczbę tak, aby spełniony był warunek

$$\omega_g(n) \approx \omega_\infty \quad \text{dla } n \geq N_\alpha. \quad (3.64)$$

W dalszych rozważaniach przyjmować będziemy zatem, iż $\alpha = 0,01$. Przykładowe wykresy zdefiniowanych funkcji przedstawiono na rysunku 3.2. *Przestrzeń poszukiwań optymalnej funkcji uzmienniającej ograniczymy właśnie do funkcji (3.60) – (3.63) zredukowanych do zbioru I_H .*

Określona w powyższy sposób sekwencja działania układu ułatwia sformułowanie zadania optymalizacji procesu filtracji. Kosztem ograniczenia przestrzeni poszukiwań do przestrzeni wyznaczonej przez rodzinę funkcji (3.60) – (3.63) otrzymujemy bowiem proces filtracji, którego przebieg w intuicyjny sposób charakteryzuje zestaw parametrów ω_0 , ω_∞ i N_α . W trakcie procesu filtracji pulsacja graniczna układu (3.25) zmienia się od pewnej wartości początkowej $\omega_g(0) \leq \omega_0$ do wartości końcowej $\omega_g(N-1) \geq \omega_\infty$ z prędkością zależną od wartości parametru N_α . W tym sensie przedstawione rozwiązanie wykazuje podobieństwo z rozwiązaniami przedstawionymi w pracach [23],[27],[40],[42],[43]. Z drugiej jednak strony określona sekwencja działania układu uwzględnia zalecenia zawarte

w pracy [31]. Uzyskaliśmy bowiem układ, który w pewnym uproszczeniu dla $0 \leq n < N_\alpha$ charakteryzuje się krótkim czasem trwania stanu przejściowego, natomiast dla $n \geq N_\alpha$ cechuje się wysokim poziomem tłumienia zakłóceń występujących w sygnale pomiarowym. Zatem także i w tym przypadku rozwiązania przedstawione we wstępie niniejszej rozprawy okazują się być do siebie zbliżone.

3.5 Realizacja układu

Na zakończenie niniejszego rozdziału poruszymy jeszcze istotny problem dotyczący realizacji opracowanego niestacjonarnego układu filtrującego. W pierwszej kolejności uogólnimy nasze rozważania wprowadzając możliwość prowadzenia procesu filtracji z wykorzystaniem niestacjonarnego układu filtrującego o dowolnym rzędzie, w szczególności równym k . Układ taki będziemy realizować poprzez kaskadowe połączenie k podukładów rzędu pierwszego (3.25). Ten sposób realizacji posiada wiele zalet. Powszechnie wiadomo, iż kaskadowa realizacja filtrów rekursywnych charakteryzuje się mniejszą wrażliwością ze względu na kwantyzację parametrów układu [36]. Także rozważania dotyczące stabilności układu pierwszego rzędu można z łatwością uogólnić na przypadek dowolnej liczby podukładów połączonych kaskadowo. Wystarczy bowiem zauważyć, iż sygnał wyjściowy układu poprzedzającego stanowi sygnał wejściowy układu następującego w łańcuchu podukładów połączonych kaskadowo. Ponieważ dodatkowo dla każdego z podukładów słuszne są warunki (3.50), (3.54), to na tej podstawie otrzymujemy natychmiast

$$x_M \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |y_1(n)| \geq \dots \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |y_k(n)|, \quad (3.65)$$

gdzie $y_i(n)$ oznacza sygnał wyjściowy i -tego podukładu. W przypadku rozpatrywanego układu będziemy przyjmować, że funkcję uzmienniającą każdego z podukładów definiuje jedna i ta sama funkcja z rodziny (3.60) – (3.63), którą ponadto charakteryzuje jeden zbiór parametrów ω_0 , ω_∞ i N_α , wspólny dla wszystkich podukładów. Określone w ten sposób zagadnienie realizacji układu filtrującego dowolnego rzędu zostanie zatem całkowicie wyczerpane, jeżeli rozważymy zagadnienie realizacji pojedynczego podukładu.

Równanie różnicowe (3.25) można bezpośrednio zaimplementować w układach logicznych, w tzw. pierwszej postaci bezpośredniej [35],[36]. Rekurencyjny schemat numeryczny, który określa przytoczone równanie, można również bez przeszkód zaimplementować w systemie mikroprocesorowym. Właśnie ta forma realizacji zostanie szerzej omówiona poniżej.

Istotną kwestią związaną z zagadnieniem realizacji układu (3.25) jest wybór sposobu reprezentowania wielkości numerycznych w rejestrach sprzętowych. Zmiennoprzecinkowe reprezentacje binarne pozwalają przewyżnić większość ograniczeń precyzji i zakresu dynamicznego charakterystycznych dla stałoprzecinkowych reprezentacji dwójkowych, w szczególności w redukcji szkodliwych skutków przepełnienia [29]. W tym względzie cenny jest wniosek wynikający z warunków (3.50), (3.54). Na jego podstawie możemy bowiem stwierdzić, iż również amplituda poprzedniej próbki sygnału wyjściowego $y(n-1)$, której wartość przechowywana jest w rejestrze mikroprocesora, nie przekroczy maksymalnej

amplitudy sygnału wejściowego. Dodatkowo, jak to zostało przedstawione w pracy [24], zmiennoprzecinkowa reprezentacja dwójkowa pozwala uniknąć zjawiska cykli granicznych, jakie z uwagi na zaokrąglanie wyników podstawowych operacji arytmetycznych mogą powstawać w układzie (3.25). Ze względu na wymienione cechy rekursywne filtry cyfrowe zaleca się implementować w układach o zmiennoprzecinkowej arytmetyce [10]. Będziemy zatem przyjmować, iż jednostka arytmetyczna realizująca operacje określone przez opracowany algorytm filtracji wykorzystuje reprezentacje kompatybilne z binarnym 32- bądź 64-bitowym standardem [6].

Z punktu widzenia wydajności prowadzonych obliczeń korzystnie jest ograniczyć ilość operacji arytmetycznych przypadających na pojedynczą iterację algorytmu. Pokażemy, iż w przypadku zdefiniowanych wcześniej funkcji uzmienniających sekwencję działania układu filtrującego możemy wyznaczyć rekurencyjnie.

Rozpatrzmy następujący przykład. Naszym celem jest wyznaczenie sekwencji działania układu poprzez odwzorowanie (3.56) z wykorzystaniem funkcji uzmienniającej (3.61) dla $n \in \mathbb{N}_0$. Wstawiając (3.61) do wyrażenia (3.56) otrzymujemy

$$\lambda(n) = \frac{\omega_\infty + (\omega_0 - \omega_\infty)\alpha^{\frac{n}{N_\alpha}} - \frac{2\xi_k}{\Delta}}{\omega_\infty + (\omega_0 - \omega_\infty)\alpha^{\frac{n}{N_\alpha}} + \frac{2\xi_k}{\Delta}}. \quad (3.66)$$

Powyższe równanie możemy przekształcić do następującej postaci

$$\lambda(n) = \frac{\alpha^{\frac{n}{N_\alpha}} - \frac{1}{\omega_0 - \omega_\infty} \left(\frac{2\xi_k}{\Delta} + \omega_\infty \right)}{\alpha^{\frac{n}{N_\alpha}} + \frac{1}{\omega_0 - \omega_\infty} \left(\frac{2\xi_k}{\Delta} + \omega_\infty \right)}. \quad (3.67)$$

Przyjmując

$$a = \alpha^{\frac{1}{N_\alpha}} \quad (3.68)$$

$$\beta(n) = a^n \quad (3.69)$$

$$\gamma = \frac{1}{\omega_0 - \omega_\infty} \left(\frac{2\xi_k}{\Delta} + \omega_\infty \right), \quad (3.70)$$

równanie (3.67) możemy zapisać ponownie jako

$$\lambda(n) = \frac{\beta(n) - \gamma}{\beta(n) + \gamma}. \quad (3.71)$$

Wykazaliśmy tym samym, iż wyrażenie (3.66) stanowi funkcję dwóch zdefiniowanych wyżej argumentów $\beta(n)$, γ . Zauważmy dalej, iż wyrażenie $\beta(n)$ możemy zrealizować w postaci rekurencyjnej, w rozpatrywanym przypadku funkcja ta stanowi bowiem rozwiązanie następującego równania

$$\beta(n) - a\beta(n-1) = 0, \quad (3.72)$$

z warunkiem początkowym $\beta(-1) = a^{-1}$. Jak się okazuje, powyższe rozumowanie możemy powtórzyć także w przypadku pozostałych funkcji uzmienniających. Rekurencyjną realizację funkcji $\lambda(n)$, wyznaczoną dla każdej z funkcji (3.60) – (3.63), zebrano w tabeli 3.1.

W oparciu o przedstawione informacje możemy stwierdzić, iż rekurencyjna realizacja funkcji $\beta(n)$ wymaga maksymalnie dwóch mnożeń. Dodatkowo uwzględnić należy trzy

Funkcja	$\beta(n), \gamma$	Realizacja $\beta(n), \lambda(n)$	Warunki początkowe
(3.60)	dla $0 \leq n < \frac{N_\alpha}{1-\alpha}$ $\beta(n) = n$ $\gamma = \frac{N_\alpha \left(\frac{2\xi_k}{\Delta} + \omega_0 \right)}{(\omega_0 - \omega_\infty)(\alpha - 1)}$	$\beta(n) = \beta(n-1) + 1$ $\lambda(n) = (\beta(n) - \gamma)(\beta(n) + \gamma)^{-1}$	$\beta(-1) = -1$
	dla $n > \frac{N_\alpha}{1-\alpha}$ $\gamma = \frac{2\xi_k}{\Delta}$	$\lambda = (\omega_\infty - \gamma)(\omega_\infty + \gamma)^{-1}$	
(3.61)	$a = \alpha^{\frac{1}{N_\alpha}}$ $\beta(n) = a^n$ $\gamma = \frac{\frac{2\xi_k}{\Delta} + \omega_0}{\omega_0 - \omega_\infty}$	$\beta(n) = a\beta(n-1)$ $\lambda(n) = (\beta(n) - \gamma)(\beta(n) + \gamma)^{-1}$	$\beta(-1) = a^{-1}$
(3.62)	$a = \alpha^{\frac{1}{N_\alpha^2}}$ $\beta(n) = a^{n^2}$ $\gamma = \frac{\frac{2\xi_k}{\Delta} + \omega_0}{\omega_0 - \omega_\infty}$	$\beta_1(n) = a^2\beta_1(n-1)$ $\beta(n) = \beta(n-1)\beta_1(n)$ $\lambda(n) = (\beta(n) - \gamma)(\beta(n) + \gamma)^{-1}$	$\beta_1(-1) = a^{-3}$ $\beta(-1) = a$
(3.63)	$a = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{2}{N_\alpha}}$ $\beta(n) = \frac{\alpha}{1-\alpha} a^n$ $\gamma = 1 + \frac{\omega_0 - \omega_\infty}{\frac{2\xi_k}{\Delta} + \omega_0}$	$\beta(n) = a\beta(n-1)$ $\lambda(n) = (\beta(n) - \gamma)(\beta(n) + \gamma)^{-1}$	$\beta(-1) = \frac{\alpha}{1-\alpha} a^{-1}$

Tabela 3.1: Rekurencyjna realizacji funkcji $\beta(n), \lambda(n)$.

operacje arytmetyczne związane z wyznaczeniem wartości $\lambda(n)$. Tym samym całkowita ilość operacji arytmetycznych przypadających na pojedynczą iterację algorytmu wzrasta względem analogicznego układu stacjonarnego o maksymalnie pięć operacji. Uwzględniając możliwości współczesnych układów mikroprocesorowych możemy zatem stwierdzić, iż dodatkowy koszt obliczeniowy, jaki pociąga za sobą stosowanie układu niestacjonarnego, jest niewielki i nie stanowi argumentu przeciwko omawianemu rozwiązaniu. W celu zilustrowania omawianego zagadnienia poniżej przedstawiono przykładowy zestaw operacji przypadających na pojedynczą iterację algorytmu, stanowiący realizację niestacjonarnego układu filtrującego rzędu drugiego wykorzystującego funkcję (3.61).

$$\begin{cases} \beta(n) &= a\beta(n-1) \\ \lambda(n) &= (\beta(n) - \gamma)(\beta(n) + \gamma)^{-1} \\ \lambda^*(n) &= 0,5(1 - \lambda(n)) \\ y_1(n) &= \lambda(n)y_1(n-1) + \lambda^*(n)(x(n) + x(n-1)) \\ y_2(n) &= \lambda(n)y_2(n-1) + \lambda^*(n)(y_1(n) + y_1(n-1)). \end{cases} \quad (3.73)$$

Rozdział 4

Optymalizacja procesu filtracji

4.1 Sformułowanie problemu

W niniejszym rozdziale rozpatrzmy problem optymalizacji procesu filtracji prowadzonego z wykorzystaniem układu filtrującego, którego syntezy dokonaliśmy poprzednio. Rozpatrując wspomniany proces rozważać będziemy w istocie pewne odwzorowanie

$$F : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad (4.1)$$

w wyniku którego danemu ciągowi wejściowemu

$$x(-1), x(0), x(1), \dots, x(N-1) \quad (4.2)$$

przyporządkowujemy ciąg

$$y(0), y(1), y(2), \dots, y(N-1), \quad (4.3)$$

stanowiący odpowiedź układu filtrującego. W ogólnym przypadku odwzorowanie to realizujemy w układzie (3.25) rzędu k , a przebieg procesu w sposób jednoznaczny wyznacza ciąg współczynników

$$\lambda(0), \lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(N-1), \quad (4.4)$$

określający sekwencję działania tegoż układu. Uwzględniając zdefiniowany w rozdziale 2 cel filtracji, zadanie optymalizacji rozpatrywanego procesu możemy sformułować jako poszukiwanie takiej sekwencji działania układu filtrującego (4.4), aby na podstawie uzyskanej odpowiedzi układu (4.3) w potencjalnie krótkim czasie możliwe było poprawne określenie wyniku pomiaru. Aby ocenić jakość odpowiedzi układu filtrującego wprowadźmy kryterium

$$f_a : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

przyporządkowujące ciągowi (4.3) liczbę δ , taką że

$$\delta = f_a(\{y(n)\}_0^{N-1}). \quad (4.6)$$

Przyjmijmy dodatkowo, iż poprzez optymalizację procesu filtracji rozumieć będziemy minimalizację wartości wprowadzonego wyżej kryterium. Zauważmy, iż w przypadku układu

filtrującego rzędu pierwszego, zgodnie z zależnością (3.26), kolejne wyrazy ciągu (4.3) można wyrazić¹ w postaci kombinacji elementów ciągu wejściowego (4.2) oraz elementów ciągu (4.4). Wniosek ten można oczywiście uogólnić na przypadek k układów (3.25) połączonych szeregowo, tym samym wartość kryterium δ możemy wyrazić równoważnie jako

$$\delta = f_b(\{x(n)\}_{-1}^{N-1}, \{\lambda(n)\}_0^{N-1}, k). \quad (4.7)$$

Okazuje się zatem, że sformułowane wcześniej zadanie optymalizacji możemy rozważać teraz jako problem poszukiwania sekwencji działania układu filtrującego (4.4) minimalizującej wartość wprowadzonego kryterium. W poprzednim rozdziale stwierdziliśmy, iż sekwencję tę możemy wyznaczyć jednoznacznie, definiując funkcję uzmienniającą układu filtrującego. Przestrzeń poszukiwań optymalnej funkcji uzmienniającej ograniczyliśmy do rodziny czterech funkcji (3.60) – (3.63) zmiennych: ω_0 , ω_∞ i N_α . Następnie wykazaliśmy, iż sekwencję działania układu filtrującego (4.4), wyrażoną poprzez wprowadzone funkcje uzmienniające, można wyznaczyć rekurencyjnie. W tak zdefiniowanym problemie wartość kryterium optymalizacji δ da się zatem wyrazić w postaci funkcji kolejnych próbek ciągu wejściowego (4.2), rzędu układu filtrującego k oraz wymienionego wyżej zestawu parametrów funkcji uzmienniającej

$$\delta = f_c(\{x(n)\}_{-1}^{N-1}, \omega_0, N_\alpha, \omega_\infty, k). \quad (4.8)$$

Rząd układu filtrującego k oraz parametry funkcji uzmienniającej $\omega_0, \omega_\infty, N_\alpha$ nazywać będziemy dalej *zmiennymi decyzyjnymi*. Poprzez ograniczenie przestrzeni poszukiwań, sformułowane wcześniej zadanie optymalizacji możemy wyrazić teraz jako problem poszukiwania optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych minimalizujących wartość wprowadzonego kryterium. *Zadanie optymalizacji sformułowane w postaci (4.8) rozpatrywać będziemy w dalszej części niniejszego rozdziału.*

Wykonane badania wstępne nie wykluczyły możliwości analitycznego rozwiązania sformułowanego wyżej problemu, jednak w ogólnym przypadku przedstawione zadanie optymalizacji jest zadaniem trudnym. Wystarczy wspomnieć, iż na wszystkie zmienne decyzyjne należy nałożyć liniowe ograniczenia a zmienna k może przyjmować jedynie wartości całkowitoliczbowe. Ponadto w rozpatrywanym przypadku nawet najprostsze funkcje celu, np. średni kwadrat błędu, okazują się być rozbudowanymi funkcjami nieliniowymi a proces wyznaczania ich analitycznej postaci wymaga najczęściej użycia oprogramowania do obliczeń symbolicznych. Zauważmy wreszcie, iż, o ile istnieje optymalny zestaw zmiennych decyzyjnych, stanowiący rozwiązanie rozpatrywanego problemu, uzyskane rozwiązanie otrzymujemy zawsze względem określonego ciągu wejściowego (4.2). W przypadku innego ciągu wejściowego znalezione rozwiązanie może nie być rozwiązaniem optymalnym. Tym samym niezbędna byłaby taka modyfikacja sformułowanego problemu, która pozwoliłaby uniezależnić się od indywidualnych cech sygnału wejściowego. Z uwagi na wymienione trudności sformułowane wyżej zadanie optymalizacji (4.8) podzielimy na dwa

¹Rozważając sformułowany w niniejszym rozdziale problem optymalizacji, zakładać będziemy ściśle określone warunki początkowe procesu filtracji, tak jak to zostało przedstawione w podrozdziale 4.5.3. W tym znaczeniu zaniedbywać będziemy wpływ warunków początkowych na przebieg procesu filtracji.

zadania cząstkowe, do rozwiązania których wykorzystamy metody przybliżone. Pierwsze zadanie optymalizacji poświęcimy głównie poszukiwaniu maksymalnej prędkości przenośników taśmowych $v_{\max}$, przy której błędy charakteryzujące uzyskane wyniki ważenia nie przekraczają wartości dopuszczalnych. W drugim zadaniu optymalizacji, przyjmując funkcję uzmienniającą oraz wartości parametrów ω_{∞} i k wyznaczone w zadaniu pierwszym, poszukiwać będziemy optymalnych wartości parametrów ω_0 i N_{α} , gwarantujących realizację sformułowanego w rozdziale drugim szczegółowego celu filtracji.

Przed przystąpieniem do realizacji wyżej wymienionych zadań omówimy jeszcze sposób wstępnego przygotowania sygnałów pomiarowych, podamy definicję etapu ważenia dynamicznego oraz wyniku ważenia dynamicznego a także zdefiniujemy kryteria optymalizacji.

4.2 Etap ważenia dynamicznego

W trakcie kolejnych etapów cyklu pracy automatycznej wagi kontrolującej sygnał pomiarowy zmienia się zgodnie z powtarzalnym schematem. W zależności od aktualnego etapu cyklu pracy wagi zmienia się także cel filtracji sygnału pomiarowego². W tym sensie stwierdzić możemy, iż *cykl pracy wagi kontrolującej implikuje tryb pracy układu filtrującego*.

Uwzględniając cykl pracy automatycznej wagi kontrolującej, analizować będziemy proces filtracji sygnału pomiarowego, przypadającego na etapy wjazdu obiektu ważonego na przenośnik ważący oraz ważenia, który nazywać będziemy dalej *etapem ważenia dynamicznego*. Tym samym rozważać będziemy proces filtracji zdefiniowany w skończonym horyzoncie czasowym. Aby zagwarantować znaną i stałą długość owego horyzontu, sygnał z przetwornika automatycznej wagi kontrolującej poddamy obróbce wstępnej.

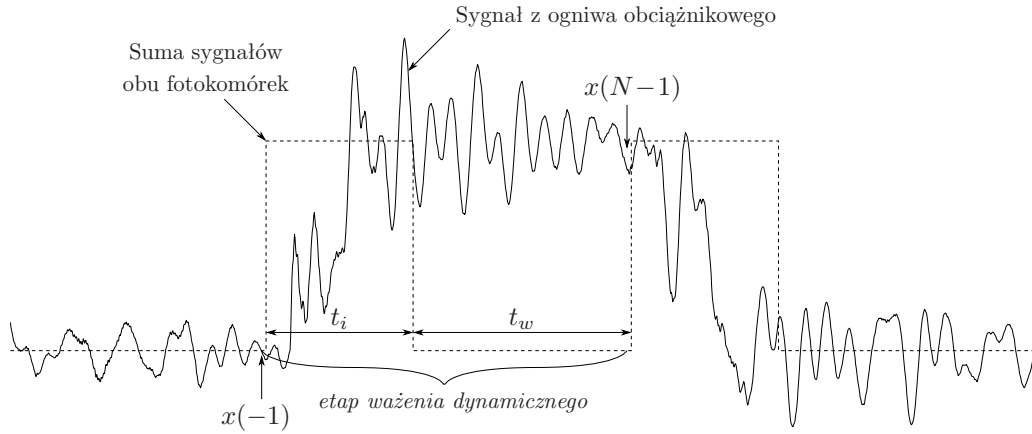
4.2.1 Wstępne przygotowanie sygnałów pomiarowych

Rozpatrzmy określoną serię kolejnych ważeń przedmiotów testowych, na którą składa się r pełnych cykli pracy automatycznej wagi kontrolującej wraz z odpowiadającym jej sygnałem z przetwornika pomiarowego oraz sygnałami fotokomórek umieszczonych pomiędzy przenośnikami: wejściowym i ważącym oraz ważącym i wyjściowym. W oparciu o sygnały obu fotokomórek, w ciągu próbek sygnału pomiarowego możemy z łatwością wyróżnić kolejne podciągi przypadające na wspomniany wcześniej etap w ten sposób, że:

- a) element ciągu $\{x(n)\}_{-1}^{N-1}$ o indeksie -1 przypada na pierwszą próbkę sygnału pomiarowego poprzedzającą zbocze narastające sygnału fotokomórki umieszczonej pomiędzy przenośnikami wejściowym i ważącym,
- b) element ciągu $\{x(n)\}_{-1}^{N-1}$ o indeksie $N-1$ przypada na próbkę sygnału pomiarowego poprzedzającą zbocze narastające sygnału fotokomórki umieszczonej pomiędzy przenośnikami ważącym i wyjściowym (por. rys. 4.1).

Zdefiniujmy zbiór r przygotowanych w powyższy sposób skończonych ciągów, zawierających kolejne próbki sygnału pomiarowego przypadające na zdefiniowany wcześniej etap

²Myśl tę rozwiemy jeszcze w rozdziale 5.



Rysunek 4.1: Rozpatrywane etapy procesu filtracji wyznaczone względem sygnałów obu fotokomórek.

ważenia dynamicznego

$$X = \left\{ \{x_1(n)\}_{-1}^{N_1-1}, \{x_2(n)\}_{-1}^{N_2-1}, \dots, \{x_r(n)\}_{-1}^{N_r-1} \right\}. \quad (4.9)$$

Zauważmy, iż dla ustalonej wartości prędkości przenośników taśmowych v czas trwania etapów wjazdu i ważenia jest stały i wynosi

$$t = t_i + t_w = \frac{L}{v} \quad (4.10)$$

(por. podpunkt 2.2.2), jego wartość nie zależy zatem od aktywnej długości przedmiotu ważonego l . Uwzględniając własność (4.10), możemy oczekiwać, iż liczby określające ilość wyrazów poszczególnych ciągów ze zbioru X będą sobie równe. Niezależnie od wspomnianej własności ograniczymy liczbę wyrazów ciągów ze zbioru X do wartości charakteryzującej najkrótszy z ciągów, odrzucając w pozostałych przypadkach wszystkie wyrazy o indeksach większych od $N - 1$, gdzie

$$N = \min \{N_1, N_2, \dots, N_r\}. \quad (4.11)$$

Uzyskamy w ten sposób zbiór złożony z r skończonych ciągów, tj.

$$X = \left\{ \{x_1(n)\}_{-1}^{N-1}, \{x_2(n)\}_{-1}^{N-1}, \dots, \{x_r(n)\}_{-1}^{N-1} \right\}, \quad (4.12)$$

w którym każdy z ciągów zawiera odpowiednio $N + 1$ pierwszych próbek sygnału pomiarowego przypadających na etap wjazdu i ważenia. Proces filtracji przygotowanych w powyższy sposób sygnałów będzie zatem procesem filtracji określonym w stałym i znanym horyzoncie czasowym, tak jak to zostało przedstawione w punkcie 3.1.3.

4.3 Wynik ważenia dynamicznego

Przyjmijmy, iż dany jest, przygotowany zgodnie z przedstawionymi w poprzednim punkcie wskazówkami, ciąg wejściowy

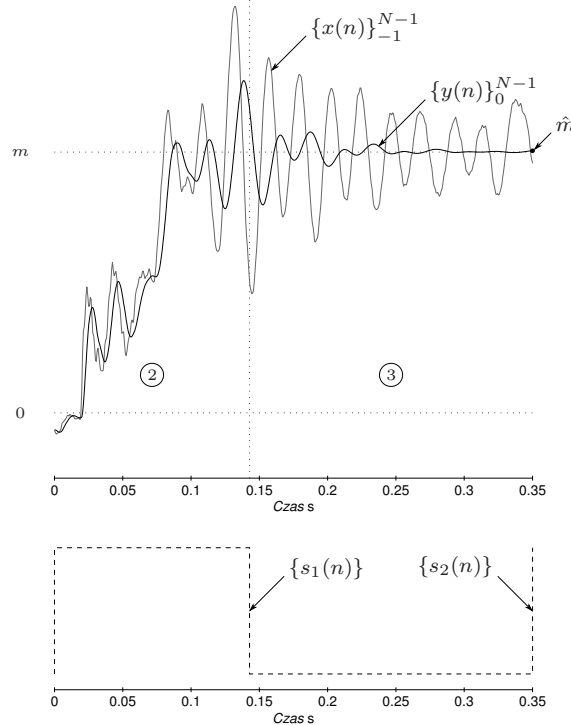
$$x(-1), x(0), x(1), \dots, x(N-1), \quad (4.13)$$

zawierający kolejne próbki sygnału pomiarowego przypadające na etap ważenia dynamicznego oraz, iż w procesie filtracji tegoż sygnału, wyznaczonym przez zmienne decyzyjne ω_0 , N_α , ω_∞ i k , otrzymaliśmy następującą odpowiedź układu

$$y(0), y(1), y(2), \dots, y(N-1). \quad (4.14)$$

Uwzględniając zdefiniowany w rozdziale 2 szczegółowy cel filtracji, oczekujemy, iż powyższa odpowiedź począwszy od pewnego punktu czasowego ustali się z pewną dopuszczalną tolerancją wokół wskazania ostatecznego, odpowiadającego prawdziwej wartości masy m przedmiotu ważonego. W tym sensie możemy mówić o pewnej pożądanej odpowiedzi układu filtrującego zbliżonej do tej, przedstawionej na rysunku 4.2. Załóżmy, że uzyskana w procesie filtracji odpowiedź układu istotnie posiada wspomnianą wyżej cechę. Jako wynik ważenia dynamicznego możemy zatem wskazać dowolną próbkę występującą na wyjściu układu filtrującego począwszy od chwili, w której odpowiedź ta faktycznie ustaliła się z zadaną tolerancją wokół wskazania ostatecznego. Biorąc pod uwagę przebieg wygładzania sygnału pomiarowego, prowadzony z wykorzystaniem opracowanego układu oraz fakt, iż obiekt ważony przebywa na przenośniku ważącym samodzielnie i w całości aż do chwili $N-1$, *wynik ważenia dynamicznego $\hat{m}$ zdefiniujemy jako ostatnią próbkę odpowiedzi (4.14)*. Mamy zatem:

$$\hat{m} = y(N-1). \quad (4.15)$$



Rysunek 4.2: Pożądana odpowiedź układu filtrującego $\{y(n)\}_0^{N-1}$ na przypadający na etap ważenia dynamicznego sygnał pomiarowy $\{x(n)\}_{-1}^{N-1}$ oraz odpowiadające im sygnały obu fotokomórek.

4.4 Kryterium optymalizacji δ

Chcąc uniezależnić się od indywidualnych cech sygnału pomiarowego, realizując sformułowane wcześniej zadanie optymalizacji, w miejsce ciągu (4.2) oraz odpowiedzi (4.3) rozważać będziemy zbiór ciągów próbek sygnału pomiarowego oraz odpowiadający mu zbiór odpowiedzi układu filtrującego. Zgodnie z wymaganiami przytoczonymi w podrozdziale 2.3 miarą poprawności procesu filtracji uczynimy: błąd maksymalny, błąd średni oraz odchylenie standardowe błędów, które charakteryzują uzyskane w procesie filtracji wyniki ważenia. Wymienione wielkości uwzględnimy, definiując pierwsze kryterium optymalizacji.

Niech dany będzie zbiór X , przygotowany zgodnie z przedstawionymi w podrozdziale 4.2 wskazówkami, zawierający r ciągów próbek sygnału pomiarowego, przypadających na etap ważenia dynamicznego przedmiotu testowego o masie m , taki że

$$X = \left\{ \{x_1(n)\}_{-1}^{N-1}, \{x_2(n)\}_{-1}^{N-1}, \dots, \{x_r(n)\}_{-1}^{N-1} \right\}. \quad (4.16)$$

Przyjmijmy, iż w procesie filtracji wszystkich sygnałów ze zbioru X , wyznaczonym przez zmienne decyzyjne ω_0 , N_α , ω_∞ i k , otrzymaliśmy odpowiadający mu zbiór

$$Y = \left\{ \{y_1(n)\}_0^{N-1}, \{y_2(n)\}_0^{N-1}, \dots, \{y_r(n)\}_0^{N-1} \right\}. \quad (4.17)$$

Zdefiniowany w powyższy sposób zbiór Y nazywać będziemy *r-elementowym zbiorem odpowiedzi układu filtrującego*. Każdej z zawartych w zbiorze Y odpowiedzi przyporządkujemy zdefiniowany w poprzednim podrozdziale wynik ważenia dynamicznego. Otrzymamy w ten sposób zbiór

$$Z = \left\{ \hat{m}_1 = y_1(N-1), \hat{m}_2 = y_2(N-1), \dots, \hat{m}_r = y_r(N-1) \right\}, \quad (4.18)$$

który nazywać będziemy *r-elementowym zbiorem wyników ważenia dynamicznego*.

Definicja 4.1. Dany jest *r-elementowy zbiór wyników ważenia dynamicznego* Z . Niech m oznacza prawdziwą wartość masy przedmiotu testowego oraz niech:

- a) $e_{\max}(Z)$ oznacza maksymalny bezwzględny błąd, wyznaczony względem elementów zbioru Z , taki że

$$e_{\max}(Z) = \max \left\{ |\hat{m}_1 - m|, |\hat{m}_2 - m|, \dots, |\hat{m}_r - m| \right\}, \quad (4.19)$$

- b) $e_\mu(Z)$ oznacza błąd średni, wyznaczony względem elementów zbioru Z , taki że

$$e_\mu(Z) = \frac{(\hat{m}_1 - m) + (\hat{m}_2 - m) + \dots + (\hat{m}_r - m)}{r}, \quad (4.20)$$

- c) $\sigma_e(Z)$ oznacza odchylenie standardowe błędów, wyznaczone względem elementów zbioru Z , takie że [4]

$$\sigma_e(Z) = \sqrt{\frac{(\hat{m}_1 - m - e_\mu(Z))^2 + (\hat{m}_2 - m - e_\mu(Z))^2 + \dots + (\hat{m}_r - m - e_\mu(Z))^2}{r - 1}}. \quad (4.21)$$

Liczbę

$$\delta = \max \left\{ \frac{e_{\max}(Z)}{e_d}, \frac{|e_{\mu}(Z)|}{\mu_d}, \frac{\sigma_e(Z)}{\sigma_d} \right\}, \quad (4.22)$$

gdzie: e_d oznacza dopuszczalny błąd maksymalny, μ_d oznacza maksymalny dopuszczalny błąd średni oraz σ_d oznacza maksymalne dopuszczalne odchylenie standardowe błędów, określone zgodnie z przyjętą w podpunkcie 2.4.1 klasą dokładności przyrządu, nazywać będziemy wartość kryterium optymalizacji δ .

Jak to zostało zasygnalizowane w podpunkcie 4.1, zadanie minimalizacji sformułowanego w powyższy sposób kryterium jest równoważne z zadaniem poszukiwania takich wartości zmiennych decyzyjnych, aby na podstawie uzyskanej odpowiedzi układu filtrującego możliwe było poprawne określenie wyniku pomiaru.

4.5 Pierwsze zadanie optymalizacji

Rozpatrywane w niniejszym podrozdziale zadanie optymalizacji ma charakter badań wstępnych. Zrealizujemy je metodą przeglądu na siatce podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^4$, wyznaczonej przez zmienne decyzyjne $\omega_0, N_\alpha, \omega_\infty, k$. W szczególności poszukiwać będziemy funkcji uzmienniającej oraz wartości zmiennych ω_∞ i k , dla których istnieją zmienne ω_0 i N_α , takie że odpowiadający im proces filtracji cechują poprawne, z punktu widzenia dokładności, wyniki ważenia. Zadanie to zrealizujemy dla każdej prędkości v przebadanej w ramach wykonanych prac eksperymentalnych (por. podpunkt 2.4.2). W ten sposób przeanalizujemy możliwość zwiększenia wydajności ważenia dynamicznego poprzez zwiększenie prędkości v przenośników taśmowych. Wnioski płynące z analizy uzyskanych wyników pozwolą na sformułowanie założeń wyjściowych dla metody, którą wykorzystywać będziemy przy realizacji drugiego zadania optymalizacji.

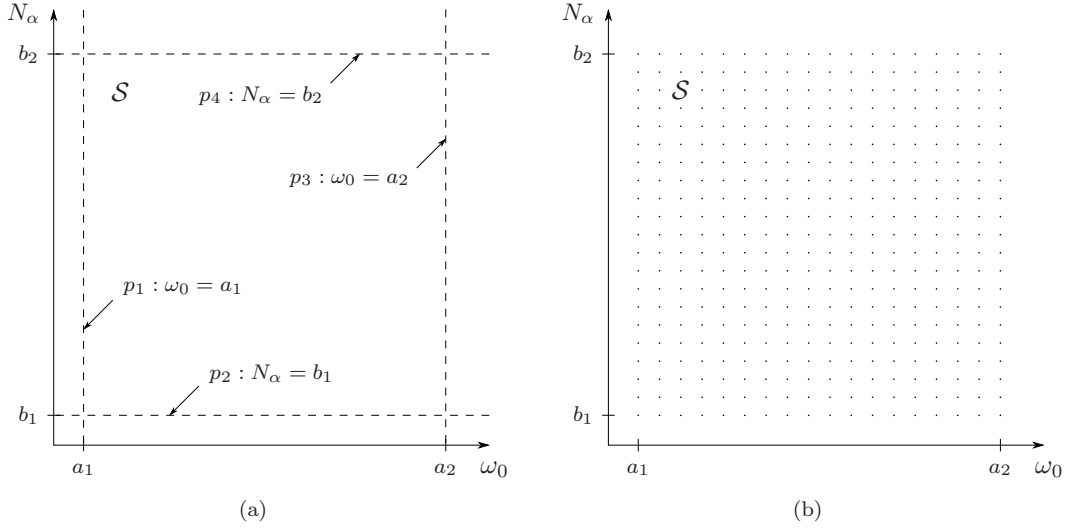
4.5.1 Definicja siatki

Zdefiniowane w podpunkcie 4.1 zmienne decyzyjne odpowiadają za istotnie różne własności układu filtrującego. Zmienne ω_∞ i k cechują stacjonarny układ filtrujący, jakim staje się układ (3.25), gdy $n \rightarrow \infty$. O niestacjonarności układu (3.25) decydują wartości, jakie przyjmują zmienne ω_0 i N_α . Do powyższych rozważań powrócimy jeszcze w następnym podpunkcie. Obecnie ograniczymy się wyłącznie do stwierdzenia, iż występujące pomiędzy zmiennymi ω_∞ i k oraz ω_0 i N_α różnice uwzględniać będziemy definiując siatkę węzłów. Mając dany pewien prostokątny obszar

$$\mathcal{S} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \subset \mathbb{R}^2, \quad (4.23)$$

zwany dalej *obszarem poszukiwań*, utwórzmy w przestrzeni zmiennych decyzyjnych ω_0 i N_α siatkę S zawierającą $H_1 \cdot H_2$ węzłów o stałym oczku, taką że

$$S = \left\{ (\omega_0, N_\alpha) \in \mathcal{S} : \begin{aligned} \omega_0 &= a_1 + \frac{h_1 - 1}{H_1 - 1}(a_2 - a_1), \quad h_1 = 1, \dots, H_1, \\ N_\alpha &= b_1 + \frac{h_2 - 1}{H_2 - 1}(b_2 - b_1), \quad h_2 = 1, \dots, H_2 \end{aligned} \right\}. \quad (4.24)$$



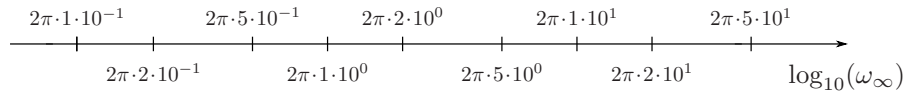
Rysunek 4.3: Proste p_1 , p_2 , p_3 i p_4 ograniczające obszar poszukiwań $\mathcal{S}$ (4.3(a)) oraz interpretacja geometryczna zbioru S (4.3(b)).

Interpretację geometryczną zbioru S przedstawiono na rysunku 4.3(b). Klasyfikacji węzłów siatki S dokonamy dla każdej pary $(\omega_\infty, k) \in \Omega_\infty \times K$, gdzie:

a) Ω_∞ oznacza zbiór rozpatrywanych wartości parametru ω_∞ , taki że

$$\Omega_\infty = \{ \omega_\infty \in \Omega : \omega_\infty = 2\pi p 10^q \} \quad (4.25)$$

dla $(p, q) \in P \times Q$, gdzie $P = \{1, 2, 5\}$ i $Q = \{q \in \mathbb{Z} : q_a \leq q \leq q_b\}$.



Rysunek 4.4: Interpretacja geometryczna zbioru Ω_∞ dla $q_a = -1$ i $q_b = 1$.

b) K oznacza zbiór rozpatrywanych wartości parametru k , taki że

$$K = \left\{ k \in \mathbb{Z}^+ : k = 1 + \frac{h_4 - 1}{H_4 - 1}(d_2 - 1), h_4 = 1, \dots, H_4 \right\}. \quad (4.26)$$

Elementy zbioru Ω_∞ wyznaczać będziemy określając liczby q_a oraz q_b . Oznaczmy najmniejszy i największy element zbioru Ω_∞ odpowiednio jako c_1 i c_2 . Zgodnie z przyjętą definicją

$$c_1 = 2\pi \cdot 1 \cdot 10^{q_a} \text{ oraz } c_2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{q_b}. \quad (4.27)$$

W oparciu o zdefiniowane wcześniej zbiory utworzmy zbiór T , taki że

$$T = S \times \Omega_\infty \times K. \quad (4.28)$$

Zauważmy, iż zbiór T tworzy w hiperprostokątnym obszarze

$$\mathcal{T} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \times [1, d_2] \in \mathbb{R}^4 \quad (4.29)$$

siatkę węzłów, przy czym każdy węzeł $(\omega_0, N_\alpha, \omega_\infty, k)$ siatki T wyznacza w sposób jednoznaczny sekwencję działania układu filtrującego (3.25) rzędu k i tym samym wyznacza w sposób jednoznaczny proces filtracji prowadzony z wykorzystaniem układu (3.25) rzędu k .

4.5.2 Dobór parametrów siatki

Liczby: H_1, H_2, H_4, q_a, q_b oraz współrzędne węzłów granicznych: a_1, a_2, b_1, b_2, d_2 nazywać będziemy parametrami siatki T . Wartości parametrów siatki T dobrano na podstawie serii badań wstępnych, powtarzając wielokrotnie czynności przedstawione w podpunkcie 4.5.3 i poszukując obszarów, w których wartość kryterium δ przyjmuje wartości najmniejsze. Kluczowy, z punktu widzenia poprawności uzyskanych wyników, okazał się właściwy dobór prostych p_1, p_2, p_3, p_4 ograniczających obszar poszukiwań $\mathcal{S}$ (por. rys. 4.3(a)).

W poprzednim podpunkcie stwierdziliśmy, iż wartości jakie przyjmują zmienne ω_0 i N_α decydują o niestacjonarności układu filtrującego. Rzeczywiście, można wykazać, iż niezależnie od wybranej funkcji uzmienniającej zachodzi

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\omega_0 \rightarrow \omega_\infty} \omega_g(n) = \omega_\infty, \quad \text{oraz}^4 \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \lim_{N_\alpha \rightarrow 0} \omega_g(n) = \omega_\infty. \quad (4.30)$$

Dla $\omega_0 \rightarrow \omega_\infty$ oraz $N_\alpha \rightarrow 0$ ciąg $\{\omega_g(n)\}_0^\infty$ przechodzi zatem w ciąg stały o wyrazie ogólnym

$$\omega_g(n) = \omega_\infty; \quad (4.31)$$

układ filtrujący (3.25) zachowuje się wtedy jak klasyczny stacjonarny filtr dolnoprzepustowy rzędu k . Konsekwentnie, klasyczny stacjonarny i dolnoprzepustowy proces filtracji reprezentują wszystkie punkty (ω_0, N_α) przestrzeni $\mathbb{R}^2$ leżące na prostej

$$\omega_0 = \omega_\infty. \quad (4.32)$$

Ponieważ, z wyjątkiem funkcji uzmienniającej (3.60), dla $N_\alpha = 0$ wyraz $\omega_g(n)$ jest wyrażeniem nieoznaczonym, przyjmijmy w uproszczeniu, iż klasyczny stacjonarny i dolnoprzepustowy proces filtracji reprezentują również wszystkie punkty (ω_0, N_α) przestrzeni $\mathbb{R}^2$ leżące w bliskim otoczeniu prostej

$$N_\alpha = 0. \quad (4.33)$$

Uwzględniając powyższe wnioski, na zmienne ω_0 i N_α nałożymy następujące ograniczenia

$$\omega_0 \geq \omega_\infty \quad \text{oraz} \quad N_\alpha \geq 1. \quad (4.34)$$

Obszar poszukiwań $\mathcal{S}$ ograniczymy tym samym od dołu prostymi

$$p_1 : \omega_0 = \omega_\infty \quad \text{oraz} \quad p_2 : N_\alpha = 1. \quad (4.35)$$

Zagadnienie doboru prostych p_3 i p_4 , omówimy w podpunkcie 4.5.5, do jego sformułowania potrzebujemy bowiem dwóch terminów, które wprowadzimy w podpunkcie 4.5.4.

Ponieważ, zgodnie z warunkiem (4.10), wraz ze wzrostem prędkości przenośników taśmowych v skraca się horyzont czasowy, w którym prowadzony jest proces filtracji, granice przedziału określającego zakres zmienności parametru N_α odnosić będziemy do długości N tegoż horyzontu. Wszystkie przyjęte ostatecznie wartości parametrów siatki T przedstawiono w tabeli 4.1.

⁴W przypadku funkcji uzmienniającej (3.60) granicę $\omega_g(n)$ dla $N_\alpha \rightarrow 0$ należy wyznaczyć bezpośrednio z definicji.

	funkcja uzmien- niająca (3.60)	funkcja uzmien- niająca (3.61)	funkcja uzmien- niająca (3.62)	funkcja uzmien- niająca (3.63)
H_1	250	250	250	250
H_2	250	250	250	250
H_4	6	6	6	6
q_a	-4	-4	-4	-4
q_b	0	0	0	0
a_1	ω_∞	ω_∞	ω_∞	ω_∞
a_2	100π	500π	250π	250π
b_1	1	1	1	1
b_2	$1,9N$	$2,5N$	$2,4N$	$2N$
d_2	6	6	6	6

Tabela 4.1: Przyjęte wartości parametrów siatki T dla funkcji uzmienniających (3.60) – (3.63).

4.5.3 Klasyfikacja węzłów siatki

Zestaw sygnałów pomiarowych, uzyskanych w ramach pierwszego etapu prac eksperymentalnych, poddano wstępnemu przetworzeniu, o którym mowa w podrozdziale 4.2. Łącznie otrzymano w ten sposób czterdzieści cztery zbiory $X_{i,j}$, z których każdy zawiera dwadzieścia ciągów próbek sygnału wejściowego przypadających na etap ważenia dynamicznego i -tego przedmiotu testowego, zarejestrowany przy j -tej prędkości przenośników taśmowych, zgodnie z notacją przedstawioną w tabeli 4.2. Klasyfikacji węzłów siatki dokonano poddając zgromadzony zestaw sygnałów procesowi wielokrotnej filtracji, tj. dla każdego węzła $(\omega_0, N_\alpha, \omega_\infty, k)$ siatki T . W niniejszym podpunkcie przedstawimy algorytm klasyfikacji wykorzystywany do realizacji pierwszego zadania optymalizacji. Zanim przejdziemy do opisu wspomnianego algorytmu uogólnimy jeszcze przyjętą w poprzednim podpunkcie notację.

Przedmiot testowy	Prędkość przenośników taśmowych $v, \frac{m}{s}$										
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$m_1, m = 200 \text{ g}$	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	$X_{1,3}$	$X_{1,4}$	$X_{1,5}$	$X_{1,6}$	$X_{1,7}$	$X_{1,8}$	$X_{1,9}$	$X_{1,10}$	$X_{1,11}$
$m_2, m = 300 \text{ g}$	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	$X_{2,3}$	$X_{2,4}$	$X_{2,5}$	$X_{2,6}$	$X_{2,7}$	$X_{2,8}$	$X_{2,9}$	$X_{2,10}$	$X_{2,11}$
$m_3, m = 500 \text{ g}$	$X_{3,1}$	$X_{3,2}$	$X_{3,3}$	$X_{3,4}$	$X_{3,5}$	$X_{3,6}$	$X_{3,7}$	$X_{3,8}$	$X_{3,9}$	$X_{3,10}$	$X_{3,11}$
$m_4, m = 700 \text{ g}$	$X_{4,1}$	$X_{4,2}$	$X_{4,3}$	$X_{4,4}$	$X_{4,5}$	$X_{4,6}$	$X_{4,7}$	$X_{4,8}$	$X_{4,9}$	$X_{4,10}$	$X_{4,11}$

Tabela 4.2: Zestaw zarejestrowanych sygnałów pomiarowych – przyjęta notacja.

Oprócz zdefiniowanych w podpunkcie 4.5.1 zmiennych indeksowych: h_1 , h_2 i h_4 wprowadźmy dodatkową zmienną

$$h_3 = 1, \dots, H_3, \quad (4.36)$$

gdzie H_3 oznacza liczbę elementów zbioru Ω_∞ i wynosi

$$H_3 = 3(q_b - q_a + 1). \quad (4.37)$$

Uporządkujmy rosnąco elementy zbioru Ω_∞ i utwórzmy ciąg

$$\omega_\infty(1), \omega_\infty(2), \omega_\infty(3), \dots, \omega_\infty(H_3). \quad (4.38)$$

Do opisu algorytmu zastosujemy notację

$$S(h_1, h_2), \Omega_\infty(h_3), K(h_4). \quad (4.39)$$

Przez $S(h_1, h_2)$ oraz $K(h_4)$ rozumieć będziemy odpowiednio elementy zbiorów S oraz K , wyznaczone zgodnie z przedstawionymi wcześniej definicjami (4.24) oraz (4.26). Przez $\Omega_\infty(h_3)$ rozumieć będziemy element ciągu (4.38) o indeksie h_3 .

Wykorzystywany algorytm klasyfikacji składa się z następujących etapów:

1. Dany jest jeden z przygotowanych uprzednio zbiorów sygnałów pomiarowych

$$X_{i,j} = \left\{ \{x_1(n)\}_{-1}^{N-1}, \{x_2(n)\}_{-1}^{N-1}, \dots, \{x_{20}(n)\}_{-1}^{N-1} \right\}. \quad (4.40)$$

2. Wybierzmy określoną funkcję uzmienniającą ω_g . W przestrzeni zmiennych decyzyjnych, zgodnie z przyjętymi w tabeli 4.1 danymi, utwórzmy siatkę węzłów T .
3. Ustalmy

$$h_1 := 1, h_2 := 1, h_3 := 1, h_4 := 1. \quad (4.41)$$

4. Dokonajmy filtracji wszystkich sygnałów ze zbioru $X_{i,j}$, przyjmując:

- a) funkcję uzmienniającą ω_g ,
- b) rząd $k := K(h_4)$,
- c) pulsację graniczną $\omega_\infty := \Omega_\infty(h_3)$,
- d) zmienne $(\omega_0, N_\alpha) := S(h_1, h_2)$,
- e) zerowe warunki początkowe procesu filtracji³, tj.

$$y_1(-1) = y_2(-1) = \dots = y_k(-1) = 0. \quad (4.42)$$

W wyniku filtracji otrzymujemy zbiór odpowiedzi układu filtrującego

$$Y_{i,j} = \left\{ \{y_1(n)\}_0^{N-1}, \{y_2(n)\}_0^{N-1}, \dots, \{y_{20}(n)\}_0^{N-1} \right\}. \quad (4.43)$$

5. Wyznamy zbiór wyników ważenia dynamicznego

$$Z_{i,j} = \left\{ \hat{m}_1 = y_1(N-1), \hat{m}_2 = y_1(N-1), \dots, \hat{m}_{20} = y_{20}(N-1) \right\}. \quad (4.44)$$

6. Względem zbioru $Z_{i,j}$ wyznaczmy wartość kryterium δ .

³Zerowe warunki początkowe przyjmować będziemy z uwagi na fakt, iż w momencie rozpoczęcia procesu filtracji przenośnik ważący jest nieobciążony.

7. Jeżeli:

- a) $h_1 \leq H_1$, przyjmijmy $h_1 := h_1 + 1$ i przejdźmy do punktu 4,
- b) $h_1 > H_1$, przyjmijmy $h_1 := 1$ i przejdźmy do punktu 8.

8. Jeżeli:

- a) $h_2 \leq H_2$, przyjmijmy $h_2 := h_2 + 1$ i przejdźmy do punktu 4,
- b) $h_2 > H_2$, przyjmijmy $h_2 := 1$ i przejdźmy do punktu 9.

9. Jeżeli:

- a) $h_3 \leq H_3$, przyjmijmy $h_3 := h_3 + 1$ i przejdźmy do punktu 4,
- b) $h_3 > H_3$, przyjmijmy $h_3 := 1$ i przejdźmy do punktu 10.

10. Jeżeli:

- a) $h_4 \leq H_4$, przyjmijmy $h_4 := h_4 + 1$ i przejdźmy do punktu 4,
- b) $h_4 > H_4$, zadanie klasyfikacji zostaje zakończone.

Punkty 4 – 8 przedstawionego algorytmu wykonywane są niezależnie dla każdego węzła (ω_0, N_α) siatki S , w ten sposób określona zostaje funkcja

$$g_{i,j} : S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (4.45)$$

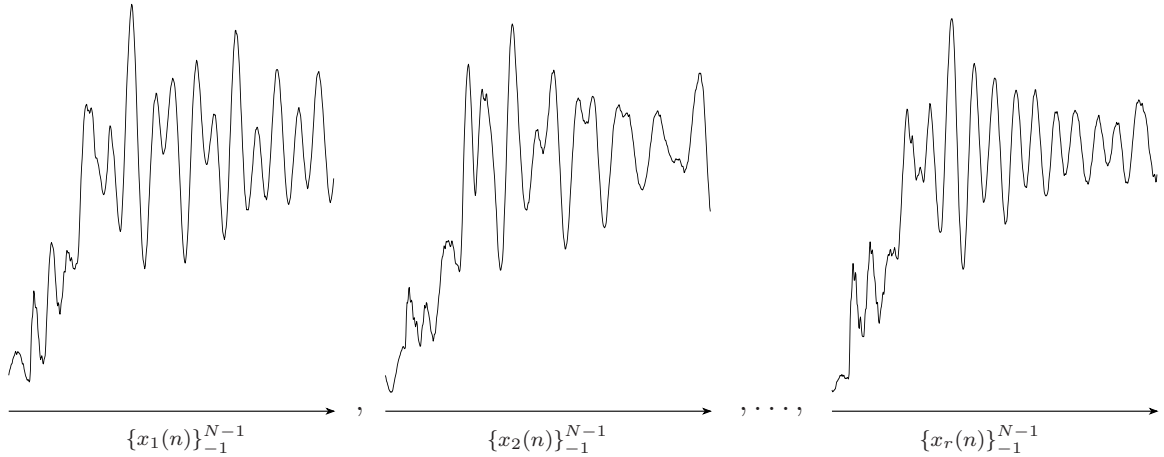
przyporządkowująca każdemu węzłowi $(\omega_0, N_\alpha) \in S$ wartość kryterium optymalizacji δ . W dalszej części rozprawy zdefiniowaną w powyższy sposób funkcję $g_{i,j}$ nazywać będziemy *eksperymentalną funkcją celu*. Eksperymentalną funkcję celu $g_{i,j}$ wyznaczoną względem zbioru sygnałów $X_{i,j}$ nazywać będziemy funkcją wyznaczoną względem i -tego przedmiotu testowego oraz j -tej prędkości przenośników taśmowych. W dalszej części rozprawy fakt, iż funkcja $g_{i,j}$ jest wyznaczona względem zbioru $X_{i,j}$ nie będzie ponownie przypomniany, należy go domyślnie przyjmować. Procedurę wyznaczania zbioru wartości eksperymentalnej funkcji celu $g_{i,j}$ omówiono raz jeszcze w formie graficznej na rysunku 4.5.

Punkty 4 – 10 przedstawionego algorytmu wykonywane są niezależnie dla każdego węzła $(\omega_0, N_\alpha, \omega_\infty, k)$ siatki T . Wykorzystując sformułowaną wcześniej definicję, zadanie klasyfikacji węzłów siatki T można wyrazić równoważnie jako zadanie wyznaczenia zbioru wartości eksperymentalnej funkcji celu $g_{i,j}$ dla każdej pary

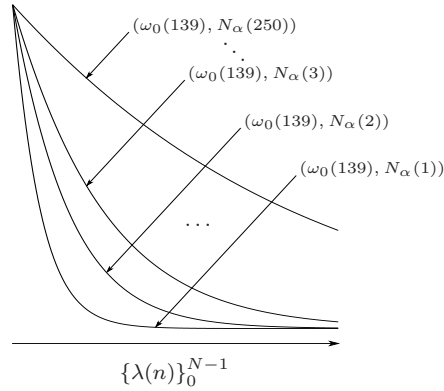
$$(\omega_\infty, k) \in \Omega_\infty \times K. \quad (4.46)$$

Pierwsze zadanie optymalizacji sprowadza się tym samym do zadania klasyfikacji wszystkich węzłów $(\omega_0, N_\alpha, \omega_\infty, k)$ siatki T , realizowanego dla:

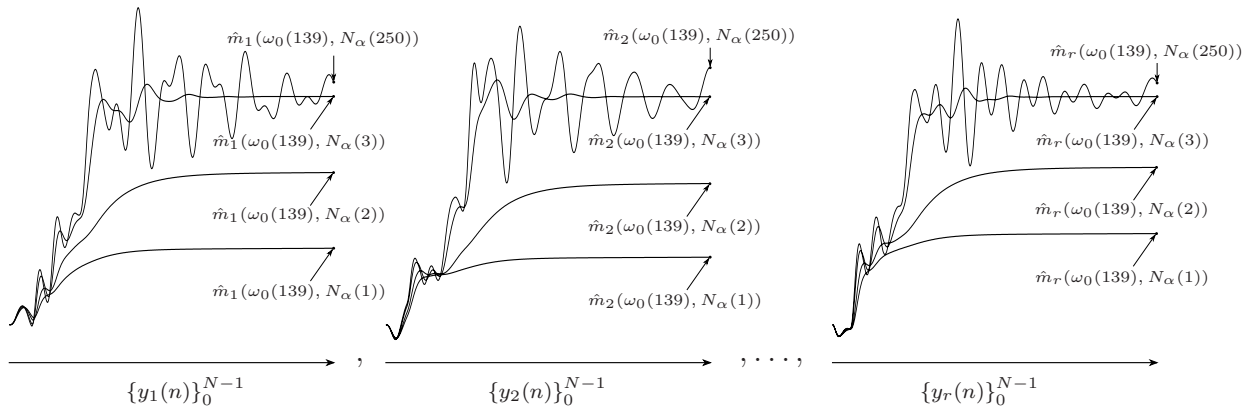
- a) każdej z funkcji uzmienniających (3.60) – (3.63),
- b) każdego z przygotowanych wcześniej zbiorów sygnałów pomiarowych $X_{i,j}$.



(a) Dany jest przygotowany zgodnie z zawartymi w punkcie 4.2 wskazówkami zbiór sygnałów $X_{i,j}$ zarejestrowany dla i -tej masy przedmiotu testowego oraz j -tej prędkości przenośników taśmowych.



(b) Przyjmijmy jedną z funkcji uzmienniających, np. funkcję (3.61). W przestrzeni zmiennych decyzyjnych utwórzmy siatkę węzłów T . Ustalmy wartość parametrów ω_∞ i k . Parametry ω_∞ oraz $(\omega_0, N_\alpha) \in S$ wyznaczają w sposób jednoznaczny sekwencję działania układu filtrującego $\{\lambda(n)\}_0^{N-1}$ rzędu k . Tak zdefiniowany proces filtracji realizujemy dla każdego z zawartych w zbiorze $X_{i,j}$ sygnałów.



(c) W wyniku wielokrotnej filtracji sygnałów ze zbioru $X_{i,j}$, tj. dla każdego węzła (ω_0, N_α) siatki S , otrzymujemy rodzinę zbiorów odpowiedzi układu filtrującego $Y_{i,j}$, względem której wyznaczamy następnie: zbiór wyników ważenia dynamicznego Z , wielkości $e_{\max}(Z)$, $e_\mu(Z)$, $\sigma_e(Z)$ oraz ostatecznie eksperymentalną funkcję celu $g_{i,j}$.

Rysunek 4.5: Wyznaczanie zbioru wartości eksperymentalnej funkcji celu $g_{i,j}$.

4.5.4 Maksymalna prędkość przenośników taśmowych

Kryterium δ , w oparciu o które wyznaczony zostaje zbiór wartości eksperymentalnej funkcji celu $g_{i,j}$, posiada następującą własność

$$(e_{\max}(Z) \leq e_d) \wedge (|e_{\mu}(Z)| \leq \mu_d) \wedge (\sigma_e(Z) \leq \sigma_d) \implies \delta \leq 1. \quad (4.47)$$

Jeżeli zatem: maksymalny bezwzględny błąd, bezwzględny błąd średni oraz odchylenie standardowe błędów, cechujące uzyskany w procesie filtracji zbiór wyników ważenia dynamicznego Z , nie przekraczają wartości dopuszczalnych, to wartość kryterium δ jest mniejsza bądź równa jedności. Z własności tej skorzystamy wprowadzając pojęcie zbioru rozwiązań dopuszczalnych.

Definicja 4.2. *Dana jest eksperymentalna funkcja celu $g_{i,j}$ wyznaczona względem:*

- a) *wybranej funkcji uzmienniającej ω_g ,*
- b) *wybranej pary zmiennych $\omega_{\infty} \in \Omega_{\infty}$ oraz $k \in K$.*

Podzbiór $D_{i,j} \subset S$, taki że

$$D_{i,j} = \{ (\omega_0, N_{\alpha}) \in S : g_{i,j}(\omega_0, N_{\alpha}) \leq 1 \}, \quad (4.48)$$

nazywać będziemy zbiorem rozwiązań dopuszczalnych wyznaczonym względem: i -tego przedmiotu testowego oraz j -tej prędkości przenośników taśmowych, funkcji uzmienniającej ω_g oraz zmiennych ω_{∞} i k .

Spośród wszystkich sklasyfikowanych procesów filtracji szczególną uwagę zwrócimy na te z nich, które gwarantują poprawne wyniki ważenia dynamicznego niezależnie od masy przedmiotu testowego.

Definicja 4.3. *Niech będą dane eksperymentalne funkcje celu: $g_{1,j}$, $g_{2,j}$, $g_{3,j}$, $g_{4,j}$ wyznaczone względem wybranej funkcji uzmienniającej ω_g oraz względem wybranej pary zmiennych $\omega_{\infty} \in \Omega_{\infty}$, $k \in K$. Utwórzmy nową funkcję*

$$g_j : S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (4.49)$$

taką że

$$\bigwedge_{(\omega_0, N_{\alpha}) \in S} g_j(\omega_0, N_{\alpha}) = \max_{i=1, \dots, 4} \{ g_{i,j}(\omega_0, N_{\alpha}) \}. \quad (4.50)$$

Funkcję g_j nazywać będziemy dalej eksperymentalną funkcją celu niezależną od masy przedmiotu testowego, wyznaczoną względem j -tej prędkości przenośników taśmowych, funkcji uzmienniającej ω_g oraz zmiennych ω_{∞} i k .

Podobnie jak w przypadku funkcji $g_{i,j}$, względem eksperymentalnej funkcji celu niezależnej od masy przedmiotu testowego g_j wyznaczmy zbiór rozwiązań dopuszczalnych niezależnych od masy przedmiotu testowego.

Definicja 4.4. *Dana jest eksperymentalna funkcja celu g_j wyznaczona względem:*

- a) *wybranej funkcji uzmienniającej ω_g ,*
- b) *wybranej pary zmiennych $\omega_\infty \in \Omega_\infty$ oraz $k \in K$.*

Podzbiór $D_j \subset S$, taki że

$$D_j = \{ (\omega_0, N_\alpha) \in S : g_j(\omega_0, N_\alpha) \leq 1 \}, \quad (4.51)$$

nazywać będziemy zbiorem rozwiązań dopuszczalnych niezależnych od masy przedmiotu testowego⁴, wyznaczonym względem j -tej prędkości przenośników taśmowych, funkcji uzmienniającej ω_g oraz zmiennych ω_∞ i k .

Maksymalną wartość prędkości przenośników taśmowych $v_{\max}$ określimy *poszukując niepustych zbiorów rozwiązań dopuszczalnych niezależnych od masy przedmiotu testowego*. W tym celu dla każdej z przebadanych w trakcie pierwszego etapu prac prędkości przenośników taśmowych v , wyznaczmy zbiór D_j oraz funkcję g_j . Dodatkowo wyznaczmy także liczbę δ_j^* , taką że

- a) jeżeli $D_j \neq \emptyset$, to

$$\delta_j^* = \min_{(\omega_0, N_\alpha) \in D_j} g_j(\omega_0, N_\alpha), \quad (4.53)$$

- b) jeżeli $D_j = \emptyset$, to

$$\delta_j^* = \min_{(\omega_0, N_\alpha) \in S} g_j(\omega_0, N_\alpha). \quad (4.54)$$

Otrzymamy w ten sposób ciąg jedenastu liczb

$$\delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*, \dots, \delta_{11}^*. \quad (4.55)$$

Prędkość $v_{\max}$ określimy wyznaczając najwyższy indeks $j_{\max}$ ciągu (4.55), dla którego funkcja zdaniowa

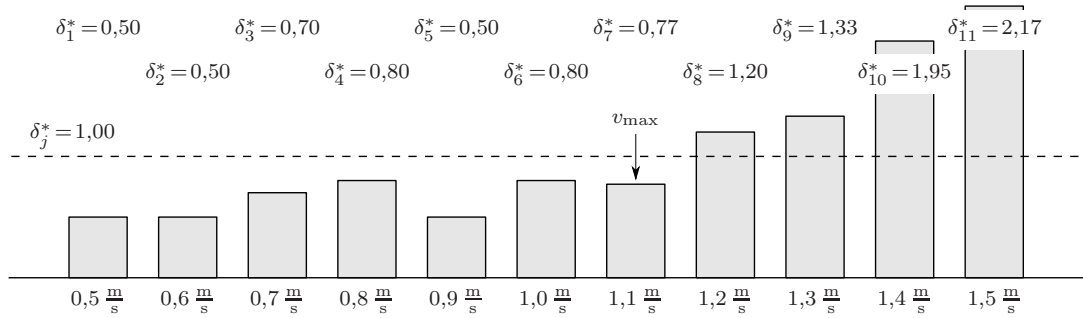
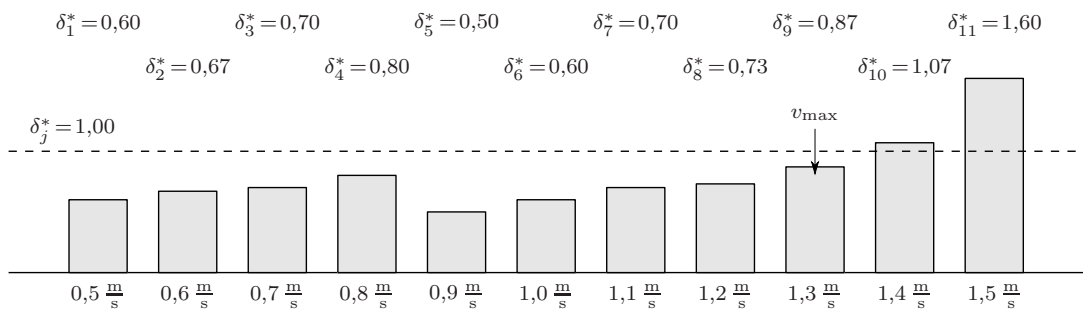
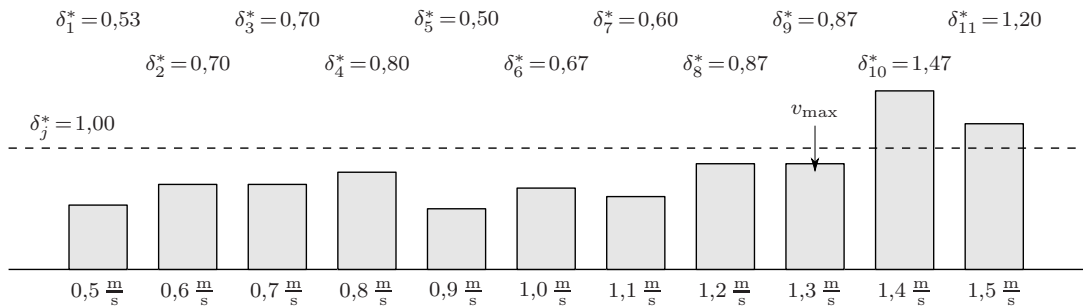
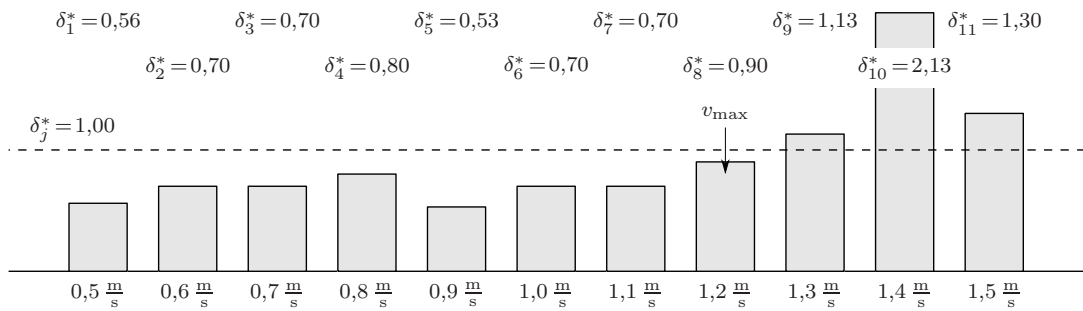
$$\bigwedge_{j=1, \dots, j_{\max}} \delta_j^* \leq 1 \quad (4.56)$$

staje się zdaniem prawdziwym. Powyższe czynności wykonamy niezależnie dla każdej z funkcji uzmienniających (3.60) – (3.63) oraz dla każdej pary $(\omega_\infty, k) \in \Omega_\infty \times K$.

Najwyższe spośród wszystkich wyznaczonych wartości prędkości $v_{\max}$, dla każdej z rozpatrywanych funkcji uzmienniających, przedstawione zostały na rysunku 4.6. Uwzględniając uzyskane wyniki, postawimy obecnie hipotezę, iż maksymalna prędkość przenośników taśmowych $v_{\max}$ cechująca przyrząd pomiarowy, o którym mowa w podpunkcie 2.4.1, wynosi $1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Hipotezę tę zweryfikujemy ostatecznie w rozdziale 5, wykorzystując do tego celu sygnały zarejestrowane w ramach drugiego etapu prac eksperymentalnych. Wartości współczynników ciągu (4.55) wyznaczone względem funkcji (3.61) wypadają korzystniej

⁴Łatwo wykazać, iż zbiór rozwiązań dopuszczalnych niezależnych od masy przedmiotu testowego D_j stanowi jednocześnie część wspólną zbiorów rozwiązań dopuszczalnych: $D_{1,j}, D_{2,j}, D_{3,j}, D_{4,j}$, mamy zatem

$$D_j = \bigcap_{i=1}^4 D_{i,j}. \quad (4.52)$$

(a) $v_{\max}$ dla funkcji (3.60), $\omega_{\infty} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $k = 3$.(b) $v_{\max}$ dla funkcji (3.61), $\omega_{\infty} = 0,02\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $k = 3$.(c) $v_{\max}$ dla funkcji (3.62), $\omega_{\infty} = 0,02\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $k = 2$.(d) $v_{\max}$ dla funkcji (3.63), $\omega_{\infty} = 0,4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $k = 2$.Rysunek 4.6: Maksymalna prędkość przenośników taśmowych $v_{\max}$ wyznaczona dla każdej z funkcji uzmienniających (3.60) – (3.63).

niż wartości wyznaczone względem funkcji (3.62), zwłaszcza dla wyższych prędkości przenośników taśmowych v . Z tego względu w dalszym etapie prac rozpatrywać będziemy wyłącznie niestacjonarny układ filtrujący (3.25) rzędu $k = 3$, o funkcji uzmienniającej (3.61) oraz pulsacji granicznej $\omega_\infty = 0,02\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

4.5.5 Interpretacja uzyskanych wyników

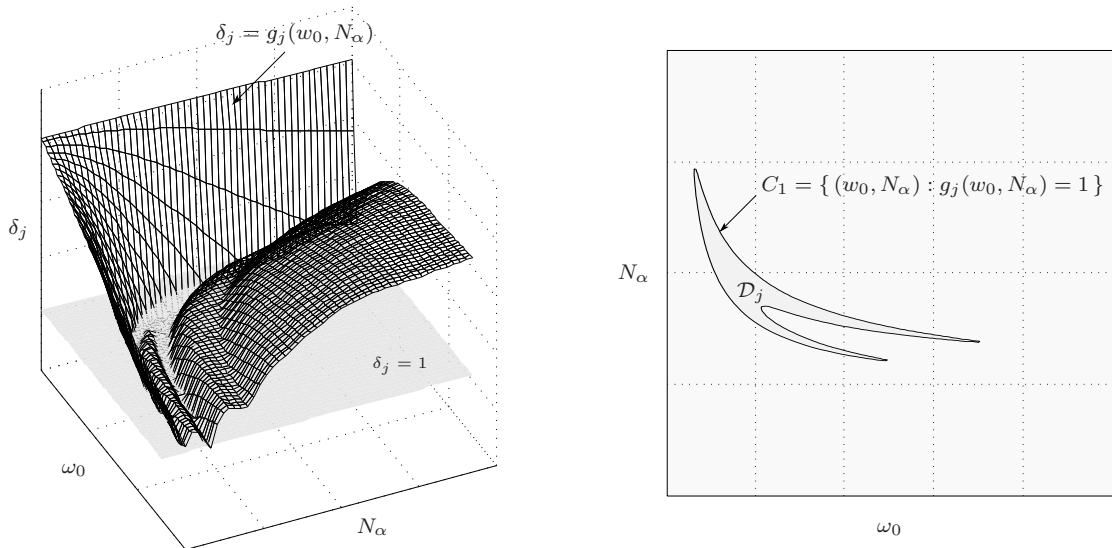
Zastanówmy się nad interpretacją geometryczną eksperymentalnej funkcji celu g_j oraz odpowiadającego jej zbioru D_j . Rozważmy w tym celu powierzchnię o równaniu

$$\delta_j = g_j(\omega_0, N_\alpha) \quad (4.57)$$

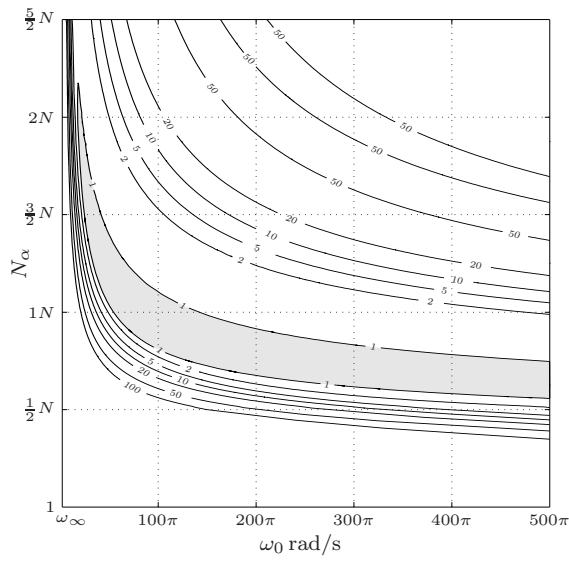
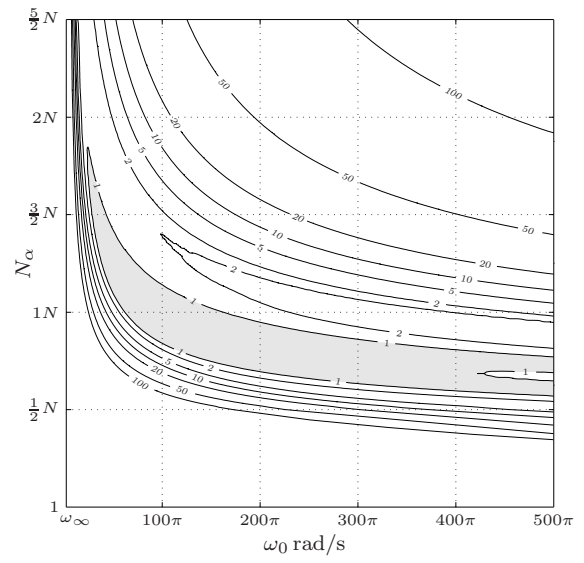
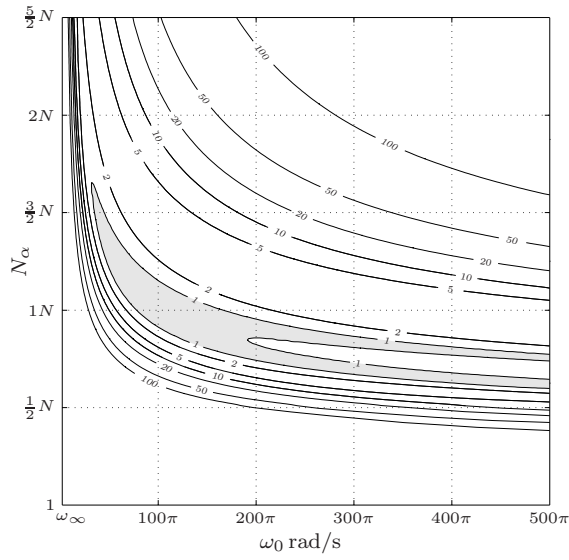
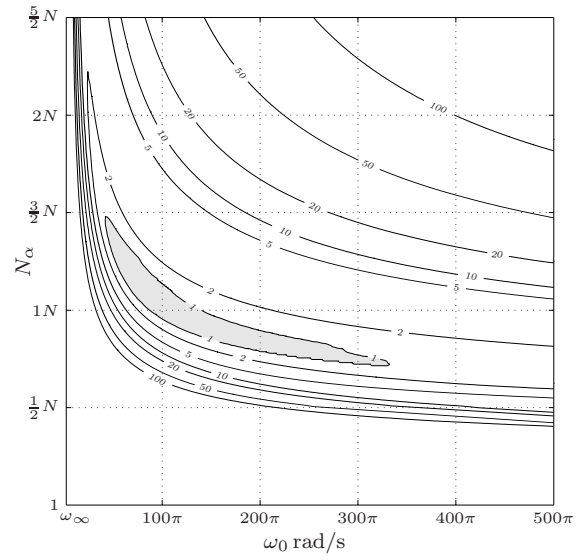
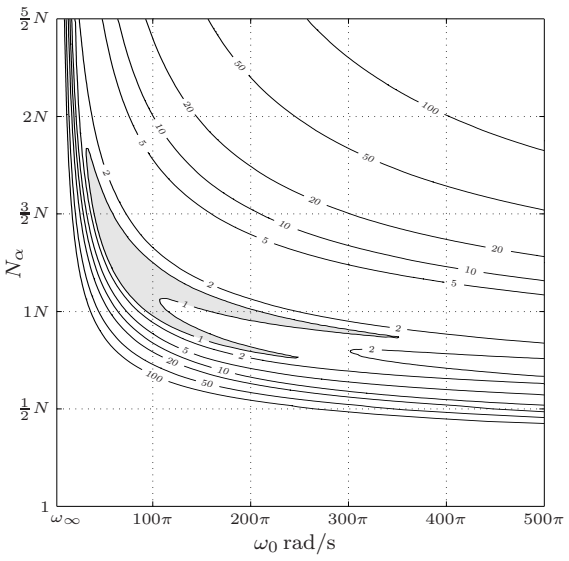
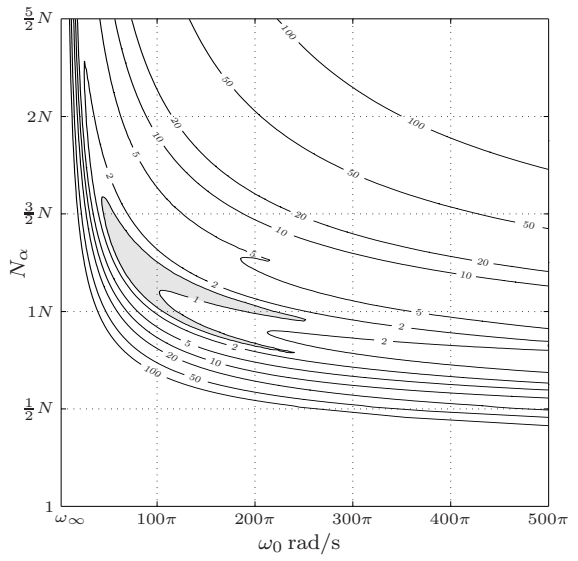
rozpiętą w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z prawoskrętnym kartezjańskim układem współrzędnych, w którym na osi OX odkładać będziemy wartość parametru ω_0 , na osi OY wartość parametru N_α , wreszcie na osi OZ wartość kryterium δ_j . Interpretację geometryczną funkcji g_j stanowi wspomniana wcześniej powierzchnia. Interpretację geometryczną zbioru D_j stanowi obszar $\mathcal{D}_j$ jaki na płaszczyźnie XY tworzy rzut prostokątny krzywej

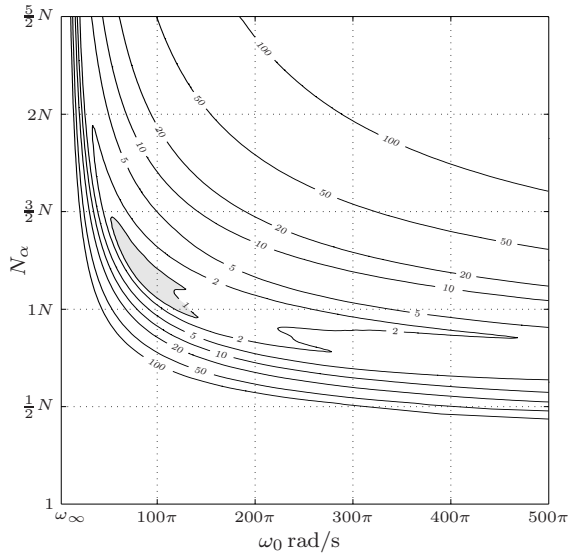
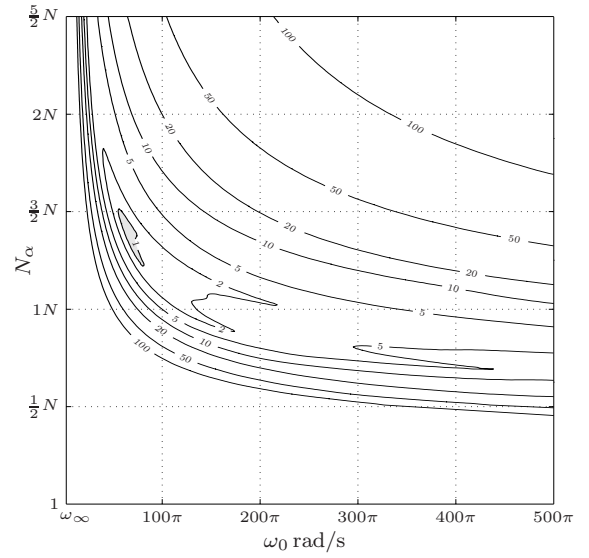
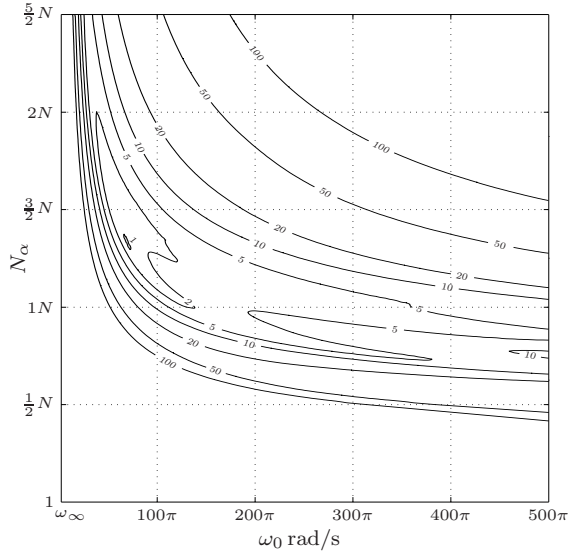
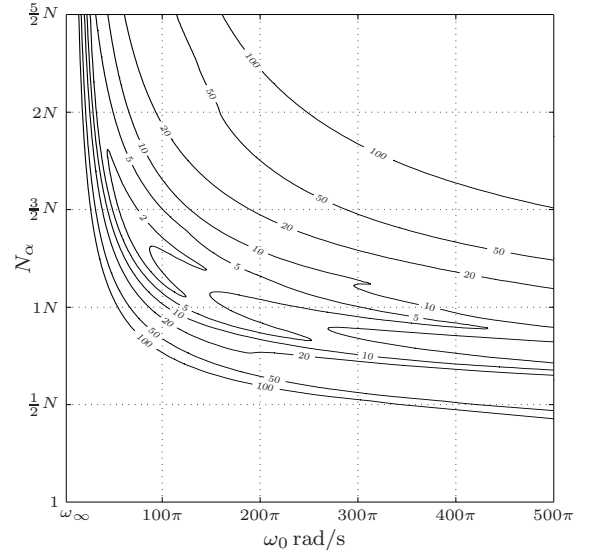
$$C_1 = \{ (w_0, N_\alpha) : g_j(w_0, N_\alpha) = 1 \}, \quad (4.58)$$

przy czym zbiór D_j zawiera wszystkie węzły (ω_0, N_α) zawarte wewnątrz obszaru $\mathcal{D}_j$ wraz z jego brzegiem. Powierzchnie (4.57) wyznaczono dla każdej z eksperymentalnych funkcji celu g_j uzyskanych w ramach pierwszego zadania optymalizacji. Zaobserwowano, iż niezależnie od wybranej funkcji uzmienniającej powierzchnie te cechują dwa wyraźne zbocza zwieńczone wydłużonym i zakrzywionym wgłębieniem, podobnie jak to zostało przedstawione na rysunku 4.7. Na rysunku 4.8 przedstawiono wykresy warstwiczne odpowiadające eksperymentalnej funkcji celu g_j , wyznaczonej względem funkcji uzmienniającej



Rysunek 4.7: Eksperymentalna funkcja celu g_j niezależna od masy przedmiotu testowego oraz odpowiadający jej zbiór rozwiązań dopuszczalnych D_j – interpretacja geometryczna.

(a) funkcja g_1 , $v = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (b) funkcja g_2 , $v = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (c) funkcja g_3 , $v = 0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (d) funkcja g_4 , $v = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (e) funkcja g_5 , $v = 0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (f) funkcja g_6 , $v = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(g) funkcja g_7 , $v = 1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (h) funkcja g_8 , $v = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (i) funkcja g_9 , $v = 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (j) funkcja g_{10} , $v = 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

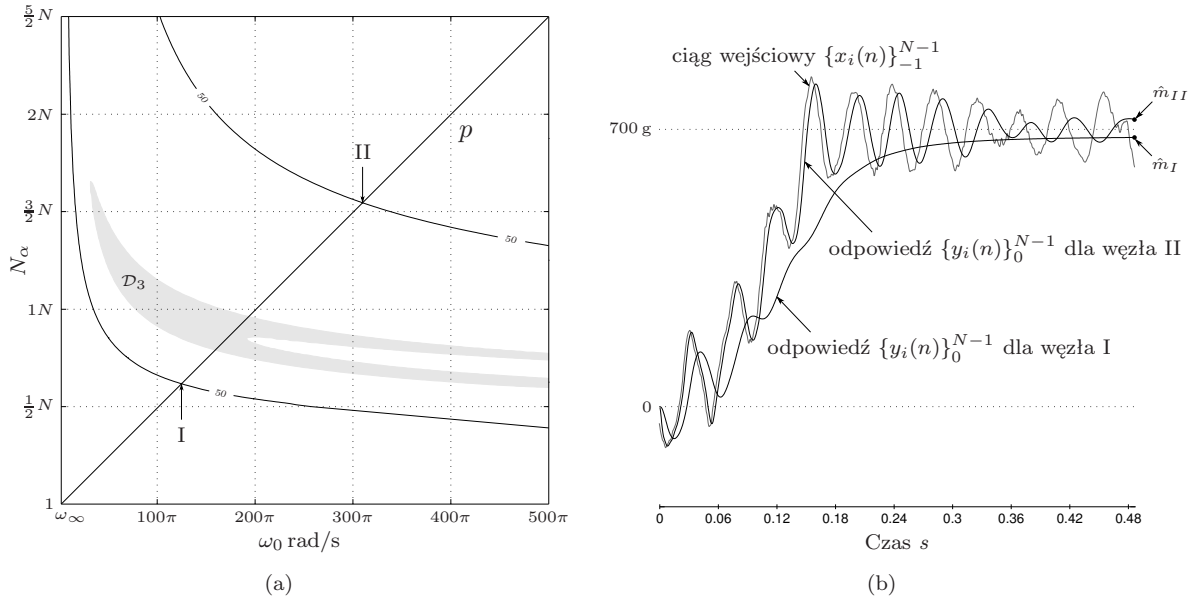
Rysunek 4.8: Wykresy warstwiczne funkcji g_j oraz zbiory D_j wyznaczone względem funkcji uzmienniającej (3.61) oraz zmiennych $\omega_\infty = 0,02\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $k = 3$.

oraz zmiennych ω_∞ i k , na które wskazaliśmy realizując pierwsze zadanie optymalizacji. Wspomniane wykresy warstwiczne zawierają rodzinę krzywych

$$C_c = \left\{ (\omega_0, N_\alpha) \in S : g_j(\omega_0, N_\alpha) = c \right\} \quad (4.59)$$

dla $c = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ oraz 100 . Obszar $\mathcal{D}_j$, odpowiadający zbiorowi rozwiązań dopuszczalnych D_j , wyróżniono odcieniem szarości.

Zauważmy, iż zawarte na wykresach warstwice nie przecinają prostych p_1 i p_2 . Zgodnie z przedstawionymi w podpunkcie 4.5.2 uwagami, odpowiedzi układu filtrującego wyznaczone przez węzły leżące w bliskim otoczeniu prostych p_1 i p_2 przypominają odpowiedzi klasycznego, stacjonarnego i dolnoprzepustowego układu filtrującego (3.9) rzędu $k = 3$ o pulsacji granicznej $\omega_\infty = 0,02\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Ponieważ układ taki cechuje pięcioprocentowy czas



Rysunek 4.9: Rozpatrywane punkty przecięcia prostej p oraz warstwy C_{50} dla eksperymentalnej funkcji celu g_3 oraz odpowiadające im odpowiedzi układu filtrującego.

ustalania przekraczający pięćdziesiąt sekund⁵, poszukiwanie rozwiązań dopuszczalnych w pobliżu prostych p_1 i p_2 jest bezcelowe.

Rozważmy prostą p , łączącą lewy dolny oraz prawy górny narożnik obszaru poszukiwań wyznaczonego granicami, jakie ustaliliśmy w pierwszym zadaniu. Przemierzając dowolny z prezentowanych wykresów wzdłuż prostej p , poza nielicznymi wyjątkami, większość z zawartych na wykresie warstw napotkamy dwukrotnie⁶; zasada ta odnosi się przede wszystkim do warstw

$$C_5, C_{10}, C_{20}, C_{50} \text{ oraz } C_{100}. \quad (4.60)$$

Odpowiedzi wyznaczone przez zmienne ω_0 i N_α , leżące na przecięciu prostej p oraz jednej z wymienionych wyżej warstw, cechuje identyczna wartość kryterium δ , inne są jednak przyczyny błędów. Typowe odpowiedzi układu filtrującego charakteryzujące rozpatrywane węzły przedstawiono na rysunku 4.9. Odpowiedź I, podobnie jak wszystkie pozostałe⁷ odpowiedzi wyznaczone względem węzła I, nie osiąga wskazania ostatecznego, przy czym błędy charakteryzujące każdy z uzyskanych w procesie filtracji wyników ważenia są ujemne, ujemny jest także odpowiadający im błąd średni. Rozpatrywany proces filtracji przejawia tendencję do zaniżania wyników ważenia. W przypadku odpowiedzi II oraz wszystkich pozostałych⁷ odpowiedzi wyznaczonych względem węzła II, sygnał wyjściowy układu filtrującego różni się tylko nieznacznie od sygnału wejściowego. Błędy charakteryzujące uzyskane wyniki ważenia przyjmują zarówno wartości dodatnie jak i ujemne,

⁵Pięcio-, dwu- i jednoprocenowy czas ustalania rozpatrywanego układu wynosi odpowiednio: $t_{5\%} = 51,09 \text{ s}$, $t_{2\%} = 60,99 \text{ s}$ oraz $t_{1\%} = 68,21 \text{ s}$.

⁶Stwierdziliśmy wcześniej, że rozpatrywane powierzchnie cechują dwa wyraźne zbocza zwieńczone wydłużonym i zakrzywionym wgłębieniem.

⁷Mowa tu o odpowiedziach ze zbiorów: $Y_{1,3}$, $Y_{2,3}$, $Y_{3,3}$ i $Y_{4,3}$.

znaczne wartości osiąga błąd maksymalny. Przedstawiona powyżej zasada odnosi się również do pozostałych warstw oraz do wykresów wyznaczonych dla pozostałych funkcji g_j . Odpowiedzi układu filtrującego, wyznaczone dla węzłów (ω_0, N_α) leżących na prostej równoległej do prostej p_2 , prześledzić można także na rysunku 4.5(c).

Uogólniając, możemy stwierdzić, iż wszystkie węzły znajdujące się poniżej zbioru rozwiązań dopuszczalnych reprezentują proces filtracji typu I. Podobnie wszystkie węzły znajdujące się powyżej zbioru rozwiązań dopuszczalnych reprezentują proces filtracji typu II.

Mając zdefiniowane: zbiór rozwiązań dopuszczalnych D_j oraz dwa typy procesu filtracji, możemy już sformułować zasadę doboru prostych p_3 i p_4 , ograniczających obszar poszukiwań $\mathcal{S}$ od góry. *W ogólnym przypadku proste p_3 i p_4 należy dobrać w taki sposób, aby punkt ich przecięcia wskazywał na węzeł reprezentujący proces filtracji typu II oraz, aby ograniczony prostymi: p_1, p_2, p_3 i p_4 obszar poszukiwań $\mathcal{S}$ zawierał w sobie obszar $\mathcal{D}_j$.* Analizując przedstawione wykresy warstwowe, możemy stwierdzić, iż zasada ta jest spełniona jedynie w przypadku wykresów 4.8(d) – 4.8(i). Przypadki 4.8(a) oraz 4.8(i) uświadamiają jednak konieczność podjęcia kompromisu pomiędzy rozdzielczością siatki S oraz kosztem obliczeniowym metody⁸. Ponieważ przegląd na siatce, którego dokonaliśmy realizując pierwsze zadanie optymalizacji, posiada zaledwie charakter badań wstępnych, pozostaniemy przy wskazanych wcześniej granicach obszaru poszukiwań

$$\mathcal{S} = [\omega_\infty, 500\pi] \times [1, 2,5N]. \quad (4.61)$$

Informacje zgromadzone w trakcie realizacji pierwszego zadania optymalizacji, w tym w szczególności wyznaczone dla funkcji uzmienniającej (3.61) granice (4.61) obszaru poszukiwań $\mathcal{S}$, uwzględnimy dokonując wyboru parametrów początkowych metody, którą wykorzystywać będziemy w ramach drugiego zadania optymalizacji.

⁸Poszerzając granicę obszaru poszukiwań przy stałej liczbie $H_1 \cdot H_2$, zwiększamy rozmiar oczka siatki, ryzykując jednocześnie przeoczenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych dla wyższych prędkości v . Rozmiar oczka siatki można zachować na niezmiennym poziomie, jeżeli poszerzając granicę obszaru poszukiwań jednocześnie zwiększona zostanie liczba $H_1 \cdot H_2$, w tej sytuacji rośnie jednak koszt obliczeniowy metody.

4.6 Kryterium optymalizacji κ

Realizując pierwsze zadanie optymalizacji, ograniczyliśmy się do eksperymentalnego wyznaczenia wartości błędów charakteryzujących uzyskane w procesie filtracji wyniki ważenia dynamicznego. Definiując cel filtracji, stwierdziliśmy jednak, iż od układu filtrującego wymagać będziemy, aby począwszy od pewnego punktu czasowego należącego do etapu ważenia odpowiedź układu ustaliła się z pewną dopuszczalną tolerancją wokół wskazania ostatecznego. Z tego względu uogólnimy przyjęte wcześniej kryterium δ , wprowadzając dodatkowe kryterium odnoszące się do odpowiedzi układu filtrującego.

Definicja 4.5. *Przyjmijmy, iż dany jest r -elementowy zbiór odpowiedzi układu filtrującego*

$$Y = \left\{ \{y_1(n)\}_0^{N-1}, \{y_2(n)\}_0^{N-1}, \dots, \{y_r(n)\}_0^{N-1} \right\}. \quad (4.62)$$

Niech $\mathcal{Z}$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych zbiorów o elementach będących wyrazami dowolnych ciągów ze zbioru Y . Rozważmy indeksowaną rodzinę zbiorów $g : I \rightarrow \mathcal{Z}$

$$g(n) = Z_n = \{y_1(n), y_2(n), \dots, y_r(n)\} \quad \text{dla } n \in I. \quad (4.63)$$

Rodzina $(Z_n)_{n \in I}$ jest skończonym ciągiem podzbiorów $\mathcal{Z}$ zawierających n -ty wyraz każdego ciągu zawartego w zbiorze Y . Wypiszmy kolejne wyrazy ciągu $(Z_n)_{n \in I}$:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \{y_1(0), y_2(0), \dots, y_r(0)\}, \\ Z_1 &= \{y_1(1), y_2(1), \dots, y_r(1)\}, \\ Z_2 &= \{y_1(2), y_2(2), \dots, y_r(2)\}, \\ &\vdots \\ Z_{N-1} &= \{y_1(N-1), y_2(N-1), \dots, y_r(N-1)\}. \end{aligned}$$

Niech $\delta(Z_n)$ oznacza wartość kryterium δ wyznaczoną względem zbioru Z_n . Jeżeli:

a) $\delta(Z_{N-1}) \leq 1$, wyznaczmy najniższy z indeksów $n_\kappa \in I_H$ spełniający warunek

$$\bigwedge_{n=n_\kappa, \dots, N-1} \delta(Z_n) \leq 1, \quad (4.64)$$

b) $\delta(Z_{N-1}) > 1$, przyjmijmy $n_\kappa = N - 1$.

Liczbę

$$\kappa = \frac{n_\kappa}{N-1}, \quad (4.65)$$

nazywać będziemy wartością kryterium optymalizacji κ .

Wartość zdefiniowanego kryterium wyrażać będzie liczba $\kappa \in [0, 1]$. Wykażemy obecnie, że jeżeli $\kappa < 1$, to odpowiedź układu filtrującego ustala się wokół wskazania ostatecznego m .

Twierdzenie 4.1. *Dany jest r -elementowy zbiór odpowiedzi układu filtrującego. Względem zbioru Y wyznaczmy wartość kryterium κ . Jeżeli $\kappa < 1$, to począwszy od $n = n_\kappa$ wszystkie próbki dowolnej z zawartych w zbiorze Y odpowiedzi znajdują się w pasie epsilowym o szerokości e_d rozpiętym wokół wskazania ostatecznego m .*

Dowód. Ponieważ $\kappa < 1$, to zgodnie z definicją 4.5 istnieje $n_\kappa < N - 1$, dla którego słuszny jest warunek

$$\bigwedge_{n=n_\kappa, \dots, N-1} \delta(Z_n) \leq 1. \quad (4.66)$$

Z warunku (4.66) wynika w szczególności

$$\bigwedge_{n=n_\kappa, \dots, N-1} e_{\max}(Z_n) \leq e_d \quad (4.67)$$

a zatem

$$\bigwedge_{i=1, \dots, r} \bigwedge_{n=n_\kappa, \dots, N-1} |y_i(n) - m| \leq e_d. \quad (4.68)$$

Teza twierdzenia 4.1 jest więc konsekwencją uwzględniania przez kryterium δ maksymalnego bezwzględnego błędu $e_{\max}$ charakteryzującego zbiór wyników Z_n . $\square$

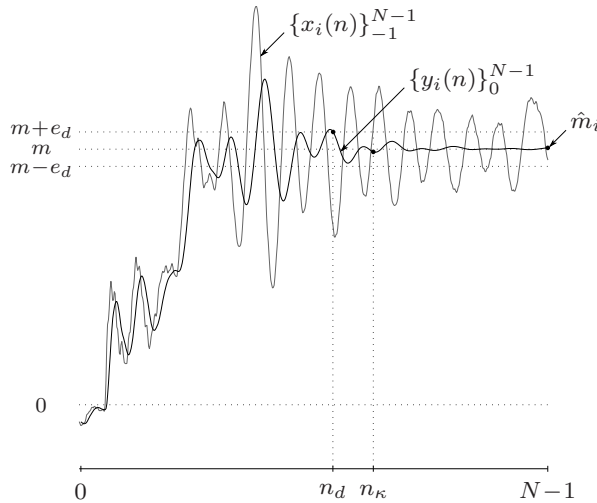
Podsumowując. Jeżeli względem danego zbioru odpowiedzi układu filtrującego Y otrzymamy $\kappa < 1$, to możemy stwierdzić, iż *zdefiniowany w rozdziale 2 cel filtracji został osiągnięty*. Z warunku $\kappa < 1$ wynika również mocniejszy wniosek: istnieje zbiór podciągów ciągów ze zbioru Y

$$Y_p = \left\{ \{y_1(n)\}_{n_\kappa}^{N-1}, \{y_2(n)\}_{n_\kappa}^{N-1}, \dots, \{y_r(n)\}_{n_\kappa}^{N-1} \right\}, \quad (4.69)$$

dla którego błędy charakteryzujące wyniki ważenia

$$\hat{m}_1 = y_1(n), \hat{m}_2 = y_2(n), \dots, \hat{m}_r = y_r(n) \quad \text{dla } n = n_\kappa, \dots, N - 1 \quad (4.70)$$

nie przekraczają wartości dopuszczalnych, zgodnie z zadeklarowaną klasą dokładności. Typową odpowiedź układu filtrującego ze zbioru Y , względem którego otrzymano wartość kryterium $\kappa < 1$, przedstawiono na rysunku 4.10.



Rysunek 4.10: Dowolny (i -ty) ciąg odpowiedzi układu filtrującego ze zbioru Y , względem którego otrzymano wartość kryterium κ , taką że $\kappa < 1$. Punkty n_d i n_κ nie pokrywają się m.in. dlatego, że oprócz wielkości $e_{\max}(Z_n)$ kryterium κ uwzględnia także wielkości $e_\mu(Z_n)$ oraz $\sigma_e(Z_n)$.

4.7 Drugie zadanie optymalizacji

W ramach pierwszego zadania optymalizacji przebadaliśmy rodzinę powierzchni, jakie tworzy w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ eksperymentalna funkcja celu g . Formułując drugie zadanie optymalizacji, zmodyfikujemy wykorzystywaną dotychczas funkcję celu oraz rozszerzymy jej dziedzinę do zbioru wszystkich punktów przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Mając na uwadze wykorzystywaną w drugim zadaniu metodę optymalizacji, do oznaczenia punktów wymienionej przestrzeni zastosujemy notację wektorową.

4.7.1 Sformułowanie zadania

Niech dana będzie funkcja celu

$$f_{i,j}(\mathbf{w}) = g_{i,j}(\mathbf{w}) + h_{i,j}(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ N_\alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (4.71)$$

gdzie:

- a) $g_{i,j}$ oznacza zdefiniowaną wcześniej eksperymentalną funkcję celu przyporządkowującą elementowi $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ wartość kryterium δ ,
- b) $h_{i,j}$ oznacza funkcję przyporządkowującą elementowi $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ wartość kryterium κ .

Funkcję $f_{i,j}$ nazywać będziemy dalej *rozszerzoną funkcją celu*. Drugie zadanie optymalizacji sformułujemy jako zadanie poszukiwania punktu $\mathbf{w}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, dla którego rozszerzona funkcja celu przyjmuje wartość najmniejszą.

Zgodnie z definicją 4.5

$$g_{i,j}(\mathbf{w}) \leq 1 \iff 0 \leq h_{i,j}(\mathbf{w}) < 1. \quad (4.72)$$

Przyjmijmy, iż dana jest eksperymentalna funkcja celu $g_{i,j}$, taka że odpowiadający jej zbiór rozwiązań dopuszczalnych $D_{i,j}$ nie jest zbiorem pustym. Na mocy (4.72):

- a) $\mathbf{w} \in D_{i,j} \implies f_{i,j}(\mathbf{w}) = g_{i,j}(\mathbf{w}) + h_{i,j}(\mathbf{w})$,
- b) $\mathbf{w} \notin D_{i,j} \implies f_{i,j}(\mathbf{w}) = g_{i,j}(\mathbf{w}) + 1$.

W przypadku punktów $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \setminus D_{i,j}$ poszukiwanie minimalnej wartości rozszerzonej funkcji celu $f_{i,j}$ jest zatem tożsame z zadaniem poszukiwania minimalnej wartości eksperymentalnej funkcji celu $g_{i,j}$. Funkcja $h_{i,j}$ wnosi bowiem swój wkład do zadania optymalizacji tylko wtedy, gdy rozpatrywany punkt $\mathbf{w}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ stanowi rozwiązanie dopuszczalne. Z tego względu funkcję $h_{i,j}$ nazywać będziemy *pomocniczą funkcją celu*.

Podobnie jak w przypadku pierwszego zadania optymalizacji, wartości rozszerzonej funkcji celu wyznaczać będziemy realizując proces filtracji sygnałów pomiarowych uzyskanych w ramach pierwszego etapu prac eksperymentalnych. Wiemy już, iż dla prędkości przenośników taśmowych z zakresu $0,5 - 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ istnieją niepuste zbiory rozwiązań dopuszczalnych niezależnych od masy przedmiotu testowego. Rozpatrując drugie zadanie optymalizacji, skupimy się zatem wyłącznie na poszukiwaniu rozwiązań niezależnych od masy przedmiotu testowego; występujące w wyrażeniu (4.71) funkcje: $f_{i,j}$, $g_{i,j}$, $h_{i,j}$

zastąpimy odpowiednio funkcjami: f_j, g_j, h_j . Uwzględnimy również wymienione w podpunkcie 4.5.5 ograniczenia, jakie należy nałożyć na zmienne ω_0 i N_α . Tym samym drugie zadanie optymalizacji sformułujemy ostatecznie jako zadanie minimalizacji

$$f_j(\mathbf{w}) = g_j(\mathbf{w}) + h_j(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2, \quad (4.73)$$

z ograniczeniami

$$\omega_0 \geq \omega_\infty, \quad N_\alpha \geq 1. \quad (4.74)$$

Zadanie to zrealizujemy, pomimo iż żadna z wymienionych funkcji nie jest dana w postaci analitycznej. Wykorzystamy w tym celu jedną z najpopularniejszych [28] metod poszukiwań bezpośrednich, mianowicie algorytm sympleksów Neldera - Meada.

4.7.2 Algorytm sympleksów Neldera – Meada

Metoda zaproponowana oryginalnie przez autorów pracy [50] została rozwinięta w 1965 roku [33] i jest obecnie znana jako *algorytm sympleksów Neldera – Meada*. Należy ona do grupy metod poszukiwań bezpośrednich. Realizuje zadanie minimalizacji skalarnej funkcji n zmiennych rzeczywistych jedynie na podstawie wartości tejże funkcji w wybranych punktach dziedziny. W żadnym z kroków algorytmu nie zachodzi potrzeba wyznaczania pochodnej funkcji celu, funkcja ta nie musi być zatem dana w postaci analitycznej.

Algorytm wykorzystuje pojęcie sympleksu. Jest to obiekt geometryczny określony zbiorem $n + 1$ punktów (wierzchołków) $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ n -wymiarowej przestrzeni, taki że

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \neq 0. \quad (4.75)$$

W literaturze funkcjonują liczne odmiany omawianego algorytmu. Algorytm stosowany w rozprawie zaczerpnięto w całości z pracy [28]. Z kilkoma wyjątkami, mając na uwadze obrany wcześniej porządek oznaczeń, przyjęto również stosowaną w artykule notację. Omówimy obecnie wyłącznie najistotniejsze etapy algorytmu w wersji dwuwymiarowej. Pełny opis algorytmu znaleźć można w przywołanym wcześniej artykule.

Rozważmy zadanie minimalizacji $f(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Pierwszym etapem algorytmu jest konstrukcja $2 + 1$ punktowego sympleksu początkowego. Zadanie konstrukcji sympleksu początkowego omówimy szczegółowo w podpunkcie 4.7.3. Każda z iteracji (i) algorytmu rozpoczyna się od uporządkowania oraz odpowiedniej zmiany oznaczeń wierzchołków: $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sympleksu w taki sposób, aby spełniony był warunek

$$f(\mathbf{v}_0) \leq f(\mathbf{v}_1) \leq f(\mathbf{v}_2). \quad (4.76)$$

Sposób wyznaczania wartości funkcji f omówimy szczegółowo w podpunkcie 4.7.3. Po uporządkowaniu wierzchołków będziemy przyjmować, iż w i -tej iteracji algorytmu $\mathbf{v}_0$ jest rozwiązaniem najlepszym, $\mathbf{v}_2$ jest rozwiązaniem najgorszym a $\mathbf{v}_1$ jest rozwiązaniem pośrednim. Zgodnie z zaleceniami autorów [28], jeżeli warunek (4.76) przechodzi w warunek

$$f(\mathbf{v}_0) = f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2), \quad (4.77)$$

to konieczne jest arbitralne rozstrzygnięcie dotyczące uporządkowania wierzchołków.

W drugim etapie algorytmu wierzchołek $\mathbf{v}_2$ zostaje przekształcony w wierzchołek

$$\mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{v}} + \rho(\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_2), \quad (4.78)$$

gdzie $\bar{\mathbf{v}}$ nazywa się środkiem ciężkości sympleksu wyznaczonym z wyłączeniem punktu $\mathbf{v}_2$ i wynosi

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1}{2}. \quad (4.79)$$

Operacja (4.78) nosi nazwę *odbicia* a współczynnik $\rho > 0$ nazywa się współczynnikiem odbicia. Jeżeli spełniony jest warunek $f(\mathbf{v}_0) \leq f(\mathbf{v}_r) < f(\mathbf{v}_1)$, to tworzony jest nowy sympleks, w którym wierzchołek $\mathbf{v}_r$ zastępuje wierzchołek $\mathbf{v}_2$ a bieżąca iteracja zostaje zakończona. Jeżeli jednak powyższy warunek nie zachodzi, to w zależności od porządku liczb: $f(\mathbf{v}_0), f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), f(\mathbf{v}_r)$ realizowana jest jedna z poniższych operacji.

1. Jeżeli $f(\mathbf{v}_r) < f(\mathbf{v}_0)$, realizowana jest operacja *ekspansji* ze współczynnikiem χ , takim że $\chi > 1$ oraz $\chi > \rho$

$$\mathbf{v}_e = \bar{\mathbf{v}} + \chi(\mathbf{v}_r - \bar{\mathbf{v}}). \quad (4.80)$$

Jeżeli $f(\mathbf{v}_e) < f(\mathbf{v}_r)$, to przy tworzeniu nowego sympleksu wierzchołek $\mathbf{v}_2$ zastępuje się wierzchołkiem $\mathbf{v}_e$, w przeciwnym razie wierzchołek $\mathbf{v}_2$ zostaje zastąpiony wierzchołkiem $\mathbf{v}_r$.

2. Jeżeli $f(\mathbf{v}_r) \geq f(\mathbf{v}_1)$ oraz:

- a) $f(\mathbf{v}_r) < f(\mathbf{v}_2)$, to realizowana jest operacja *ściągnięcia zewnętrznego* ze współczynnikiem $0 < \gamma < 1$

$$\mathbf{v}_c = \bar{\mathbf{v}} + \gamma(\mathbf{v}_r - \bar{\mathbf{v}}), \quad (4.81)$$

- b) $f(\mathbf{v}_r) \geq f(\mathbf{v}_2)$, to realizowana jest operacja *ściągnięcia wewnętrznego* ze współczynnikiem $0 < \gamma < 1$

$$\mathbf{v}_c = \bar{\mathbf{v}} + \gamma(\mathbf{v}_2 - \bar{\mathbf{v}}). \quad (4.82)$$

Jeżeli po wykonaniu operacji ściągnięcia zewnętrznego bądź wewnętrznego spełniony jest warunek $f(\mathbf{v}_c) \leq f(\mathbf{v}_2)$, to przy tworzeniu nowego sympleksu wierzchołek $\mathbf{v}_2$ zastępuje się wierzchołkiem $\mathbf{v}_c$, w przeciwnym razie wykonywana jest operacja *skurczenia* sympleksu ze współczynnikiem $0 < \eta < 1$

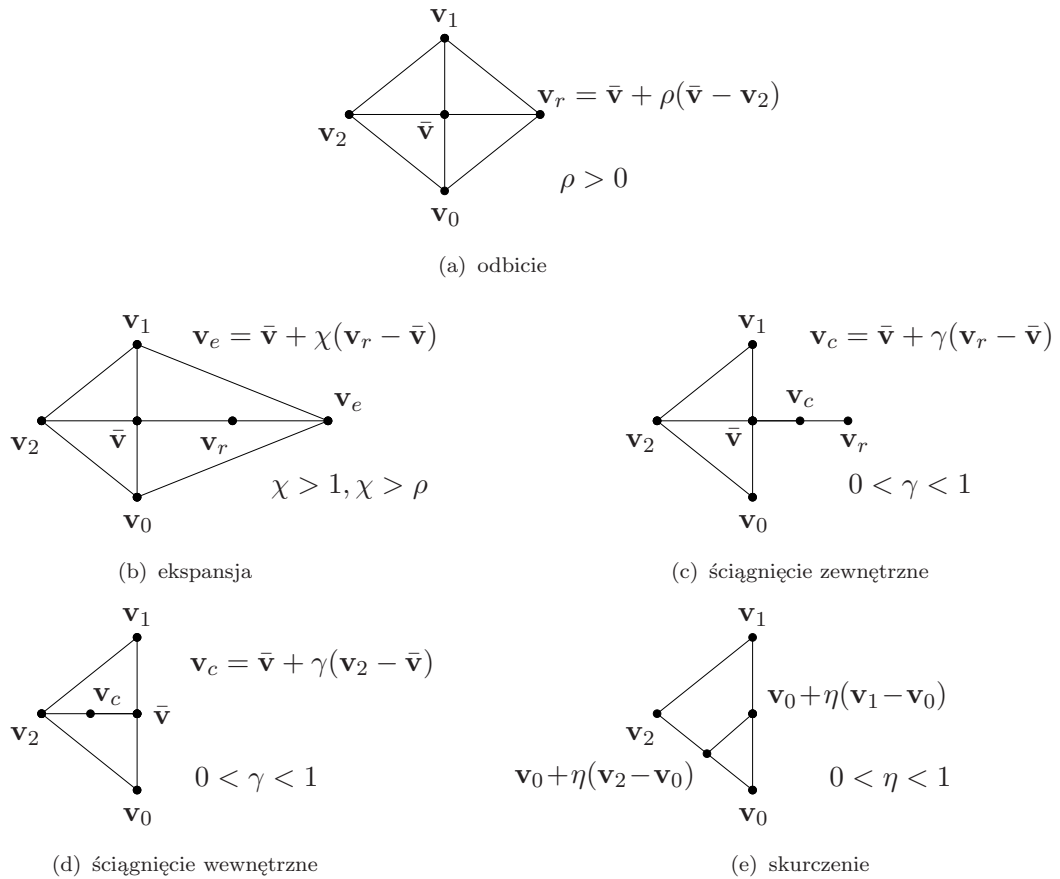
$$\mathbf{v}_1^* = \mathbf{v}_0 + \eta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0), \quad (4.83)$$

$$\mathbf{v}_2^* = \mathbf{v}_0 + \eta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0), \quad (4.84)$$

gdzie $\mathbf{v}_1^*$ i $\mathbf{v}_2^*$ oznaczają wierzchołki $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ w kolejnej iteracji, po czym tworzony jest nowy sympleks a bieżąca iteracja zostaje zakończona.

Wszystkie przedstawione powyżej operacje zilustrowano na rysunku 4.11. W wykorzystywanym algorytmie przyjmujemy następujące wartości współczynników [28]:

$$\rho = 1, \quad \chi = 2, \quad \gamma = \eta = \frac{1}{2}. \quad (4.85)$$



Rysunek 4.11: Operacje odbicia, ekspansji, ściągnięcia zewnętrznego i wewnętrznego oraz skurczenia.

W kolejnych iteracjach algorytmu sympleks przemieszcza się w przestrzeni poszukiwań względem powierzchni, jaką tworzy w tej przestrzeni funkcja celu, i jednocześnie zmienia swoje rozmiary. Działanie algorytmu zostaje zakończone, jeżeli rozmiar sympleksu w i -tej iteracji osiągnie zdefiniowany uprzednio rozmiar minimalny.

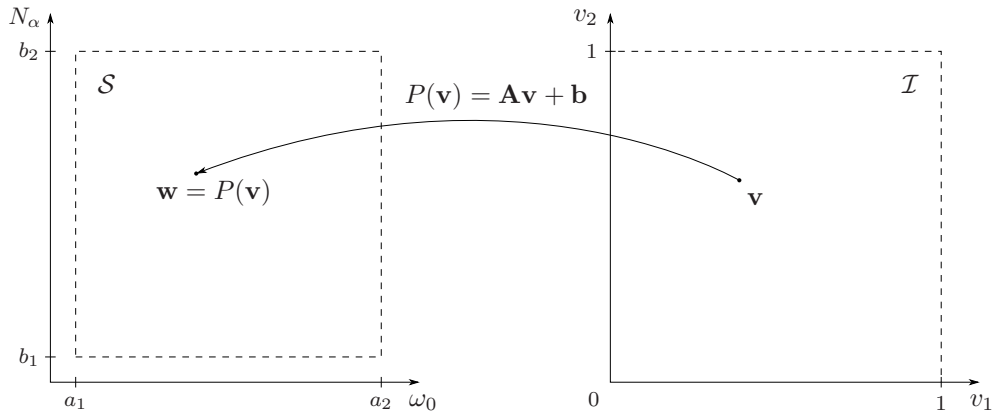
4.7.3 Konstrukcja sympleksu początkowego

Wydańność omawianego algorytmu zależy w znacznym stopniu od położenia i rozmiaru sympleksu początkowego. Jak to zostało zasugerowane w pracy [9], jedną z możliwości utworzenia sympleksu początkowego jest wybór punktu startowego $\mathbf{v}_0$ oraz wygenerowanie pozostałych punktów w następujący sposób

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + c_i \mathbf{e}_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.86)$$

gdzie $\mathbf{e}_i$ stanowią wektory jednostkowe tworzące naturalną bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Współczynniki c_i należy dobrać w taki sposób, aby rozmiar sympleksu początkowego odpowiadał skali rozpatrywanego problemu optymalizacji.

Zadanie konstrukcji sympleksu początkowego przeprowadzimy na podstawie informacji, jakie uzyskaliśmy w podrozdziale 4.5, rozważając zagadnienie optymalizacji na siatce.

Rysunek 4.12: Odwzorowanie $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Niech będzie dane odwzorowanie $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, takie że

$$P(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{b}, \quad (4.87)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_2 - a_1 & 0 \\ 0 & b_2 - b_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

Odwzorowanie P przekształca dowolny punkt $\mathbf{v}$ obszaru

$$\mathcal{I} = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \quad (4.89)$$

w odpowiadający mu punkt $\mathbf{w}$ obszaru

$$\mathcal{S} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \subset \mathbb{R}^2, \quad (4.90)$$

jak to zostało zilustrowane na rysunku 4.12. Rozważmy dwa warianty algorytmu.

Wariant 1. Generujemy sympleks początkowy wpisany w obszar $\mathcal{I}$. W kolejnych iteracjach algorytmu sympleks przemieszcza się w obszarze $\mathcal{I}$, wartości rozszerzonej funkcji celu wyznaczamy pośrednio według zasady

$$f_j(\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{b}). \quad (4.91)$$

Wariant 2. Wierzchołki $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sympleksu początkowego generujemy identycznie jak w wariantie pierwszym. Następnie każdy z wierzchołków przekształcamy do obszaru $\mathcal{S}$, otrzymując w rezultacie sympleks początkowy $\mathbf{w}_0 = P(\mathbf{v}_0)$, $\mathbf{w}_1 = P(\mathbf{v}_1)$, $\mathbf{w}_2 = P(\mathbf{v}_2)$. W kolejnych iteracjach algorytmu sympleks przemieszcza się w obszarze $\mathcal{S}$, wartości rozszerzonej funkcji celu wyznaczamy bezpośrednio według zasady

$$f_j(\mathbf{w}). \quad (4.92)$$

W ogólnym przypadku przekształcenie P nie jest przekształceniem liniowym. Można jednak wykazać, iż przedstawione powyżej warianty algorytmu są tożsame. Wystarczy zauważyć, iż operacja wyznaczania środka ciężkości (4.79) spełnia następującą własność

$$\bigwedge_{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^2} P\left(\frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)\right) = \frac{1}{2}P(\mathbf{v}_0) + \frac{1}{2}P(\mathbf{v}_1). \quad (4.93)$$

Podobnie, wszystkie pozostałe operacje, tj. (4.78) oraz (4.80) – (4.84), da się sprowadzić do uniwersalnej postaci

$$\mathbf{v}_0 + c(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad (4.94)$$

a następnie zauważyć, że

$$\bigwedge_{c \in \mathbb{R}} \bigwedge_{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2} P(\mathbf{v}_0 + c(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)) = P(\mathbf{v}_0) + c(P(\mathbf{v}_1) - P(\mathbf{v}_2)). \quad (4.95)$$

Tożsamość rozważanych wariantów wynika bezpośrednio z własności (4.93) i (4.95).

Do realizacji rozważanego zadania optymalizacji wykorzystamy algorytm działający według wariantu drugiego. Sympleks początkowy wpisany w obszar $\mathcal{I}$ skonstruujemy zgodnie z przytoczoną wcześniej zasadą (4.86). Rozpocniemy od wyboru punktu startowego $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{I}$, punkty $\mathbf{v}_1$ oraz $\mathbf{v}_2$ rozmieścimy następnie według zasady

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.96)$$

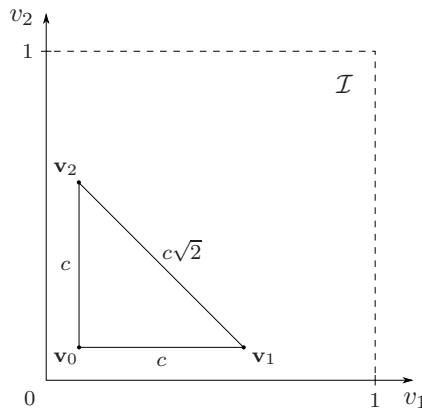
Sympleks początkowy utworzy w obszarze $\mathcal{I}$ równoramienny trójkąt prostokątny o długości boków c , c oraz $c\sqrt{2}$ (por. rys. 4.13). Uwzględniając przyjęte w podpunkcie 4.5.5 granice obszaru $\mathcal{S}$, macierz $\mathbf{A}$ oraz wektor $\mathbf{b}$ przekształcenia P zdefiniujemy jako

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 500\pi - \omega_\infty & 0 \\ 0 & 2,5N - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \omega_\infty \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.97)$$

Granice obszaru poszukiwań $\mathcal{S}$ wyznaczone przez proste p_1 oraz p_2 wynikają w naturalny sposób z równania opisującego funkcję uzmienniającą. Mamy pewność, iż poszukiwanie rozwiązań dopuszczalnych w obszarze $\omega_0 < \omega_\infty$ i $N_\alpha < 1$ jest bezcelowe. Punkt początkowy $\mathbf{v}_0$ umiejscowimy zatem w obszarze $\omega_0 > \omega_\infty$, $N_\alpha > 1$ i jednocześnie w pobliżu początku układu współrzędnych, przyjmując

$$\mathbf{v}_0 = [0, 1; 0, 1]^T. \quad (4.98)$$

Wybór ten ma charakter uniwersalny; z pierwszego zadania optymalizacji wiemy już, iż niezależnie od prędkości przenośników taśmowych poszukiwanie rozwiązania optymalnego rozpoczynać będziemy zawsze od układu filtrującego zbliżonego w swym działaniu do układu stacjonarnego, tj. od układu realizującego proces filtracji typu I.



Rysunek 4.13: Sympleks początkowy wpisany w obszar $\mathcal{I}$ dla $c = 0,5$.

W przeciwieństwie do prostych p_1 i p_2 , proste ograniczające obszar poszukiwań $\mathcal{S}$ od góry przyjęliśmy umownie. W ogólnym przypadku nie możemy zakładać, iż w obszarze $\omega_0 > 500\pi$ oraz $N_\alpha > 2,5N$ brakuje rozwiązań dopuszczalnych. Dotyczy to głównie niższych prędkości v przenośników taśmowych, co mogliśmy zaobserwować analizując zawarte w podpunkcie 4.5.5 wykresy warstwiczne. Wątpliwości dotyczące położenia górnych granic obszaru $\mathcal{S}$ uwzględnimy realizując drugie zadanie optymalizacji dla szeregu współczynników c , w szczególności dla

$$c = 1 \cdot 10^{-2}, 2 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}, 1 \cdot 10^{-1}, 2 \cdot 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-1}, 1, 2. \quad (4.99)$$

Dopuszczymy zatem przypadki, tj. $c = 1$ oraz $c = 2$, w których sympleks początkowy przestanie być sympleksem wpisanym w obszar $\mathcal{I}$, przekroczy tym samym granice obszaru $\mathcal{S}$.

W ostatnim etapie konstrukcji sympleksu początkowego, mając dane: macierz $\mathbf{A}$ oraz wektor $\mathbf{b}$, wierzchołki: $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sympleksu wpisanego w obszar $\mathcal{I}$ przekształcimy w odpowiadające im wierzchołki sympleksu wpisanego w obszar $\mathcal{S}$, takie że

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{A}\mathbf{v}_0 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{A}\mathbf{v}_2 + \mathbf{b}. \quad (4.100)$$

Zauważmy, iż skonstruowany w powyższy sposób sympleks początkowy spełnia ograniczenia (4.74). W ogólnym przypadku, aby na etapie konstrukcji sympleksu początkowego uwzględnić przyjęte ograniczenia, punkt początkowy $\mathbf{v}_0$ oraz współczynnik c należy dobrać w taki sposób, aby spełniony był warunek

$$\mathbf{v}_0 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_2 \geq \mathbf{0}. \quad (4.101)$$

Zaraz po utworzeniu sympleksu początkowego $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ wyznaczymy długość l_0 *najkrótszej* z krawędzi sympleksu danej zależnością

$$l_0 = \min \left\{ \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1\|, \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_2\|, \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\| \right\}. \quad (4.102)$$

Jak wspomnieliśmy wcześniej, warunek wyjścia algorytmu uzależnimy od rozmiaru sympleksu początkowego. Niech l_i oznacza *najdłuższą* z krawędzi sympleksu w i -tej iteracji, tj.

$$l_i = \max \left\{ \|\mathbf{w}_0(i) - \mathbf{w}_1(i)\|, \|\mathbf{w}_0(i) - \mathbf{w}_2(i)\|, \|\mathbf{w}_1(i) - \mathbf{w}_2(i)\| \right\}. \quad (4.103)$$

Działanie algorytmu zostanie zakończone, jeżeli

$$l_i < 0,01 \cdot l_0. \quad (4.104)$$

4.7.4 Wyznaczanie wartości rozszerzonej funkcji celu

Omówimy obecnie kolejne etapy procedury wyznaczania wartości rozszerzonej funkcji celu.

1. Dany jest wierzchołek sympleksu

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ N_\alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (4.105)$$

W trakcie kolejnych iteracji algorytmu ograniczenia (4.74) uwzględnimy w formie funkcji kary. Jeżeli $\omega_0 < \omega_\infty$ lub $N_\alpha < 1$, przyjmujemy $f_j(\mathbf{w}) = +\infty^9$; wyznaczanie wartości rozszerzonej funkcji celu zostanie zakończone.

2. Dany jest zbiór sygnałów pomiarowych

$$X_j = \{X_{1,j}, X_{2,j}, X_{3,j}, X_{4,j}\}. \quad (4.106)$$

3. Dokonajmy filtracji wszystkich sygnałów ze zbioru X_j , przyjmując:

- a) funkcję uzmienniającą (3.61),
- b) rząd $k = 3$,
- c) pulsację graniczną $\omega_\infty = 0,02\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$,
- d) zmienne ω_0 i N_α wyznaczone przez wierzchołek sympleksu (4.105),
- e) zerowe warunki początkowe procesu filtracji¹⁰, tj.

$$y_1(-1) = y_2(-1) = \dots = y_k(-1) = 0. \quad (4.107)$$

W wyniku filtracji otrzymujemy zbiór odpowiedzi układu filtrującego

$$Y_j = \{Y_{1,j}, Y_{2,j}, Y_{3,j}, Y_{4,j}\}. \quad (4.108)$$

4. Wyznamy zbiór wyników ważenia dynamicznego

$$Z_j = \{Z_{1,j}, Z_{2,j}, Z_{3,j}, Z_{4,j}\}. \quad (4.109)$$

5. Względem zbiorów $Z_{i,j}$ wyznaczmy wartości kryteriów

$$\delta_{1,j}(Z_{1,j}), \delta_{2,j}(Z_{2,j}), \delta(Z_{3,j}), \delta(Z_{4,j}) \quad (4.110)$$

oraz przyjmijmy $\delta_j = \max_{i=1,\dots,4} \{\delta_{i,j}(Z_{i,j})\}$.

6. Względem zbiorów $Y_{i,j}$ wyznaczmy wartości kryteriów

$$\kappa_{1,j}(Y_{1,j}), \kappa_{2,j}(Y_{2,j}), \kappa(Y_{3,j}), \kappa(Y_{4,j}) \quad (4.111)$$

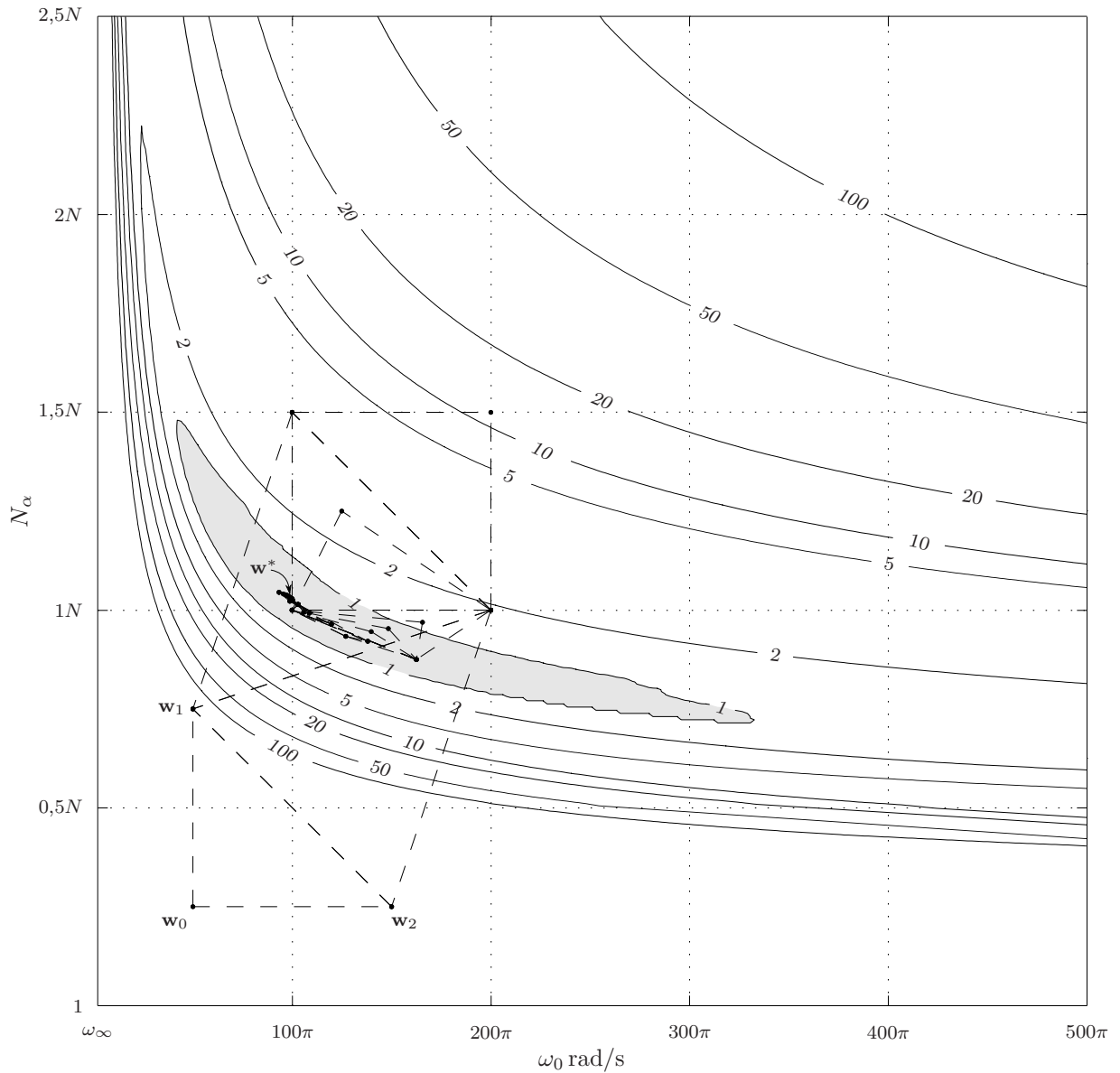
oraz przyjmijmy $\kappa_j = \max_{i=1,\dots,4} \{\kappa_{i,j}(Z_{i,j})\}$.

7. Wyznamy wartość rozszerzonej funkcji celu, przyjmując $f_j(\mathbf{w}) = \delta_j + \kappa_j$.

⁹Chodzi tu o tzw. wartość specjalną $+\text{Inf}$ standardu zapisu liczb zmiennoprzecinkowych [6].

¹⁰Podobnie jak w przypadku klasyfikacji węzłów siatki T , zerowe warunki początkowe przyjmować będziemy z uwagi na fakt, iż w momencie rozpoczęcia procesu filtracji przekaźnik ważący jest nieobciążony.

4.7.5 Wyniki optymalizacji

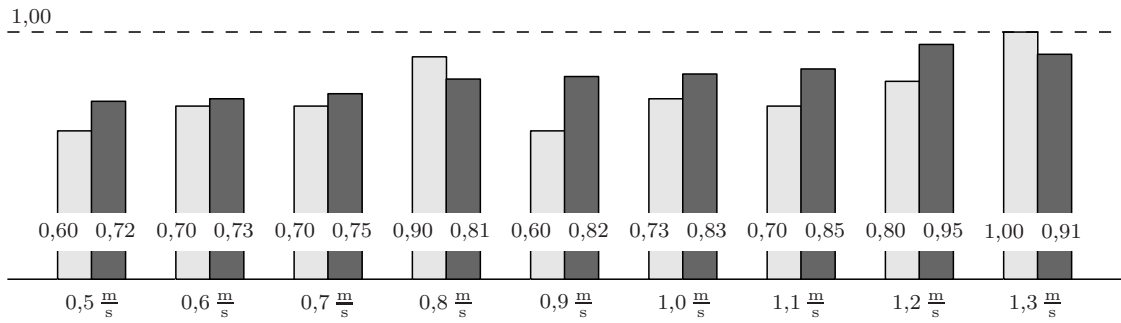
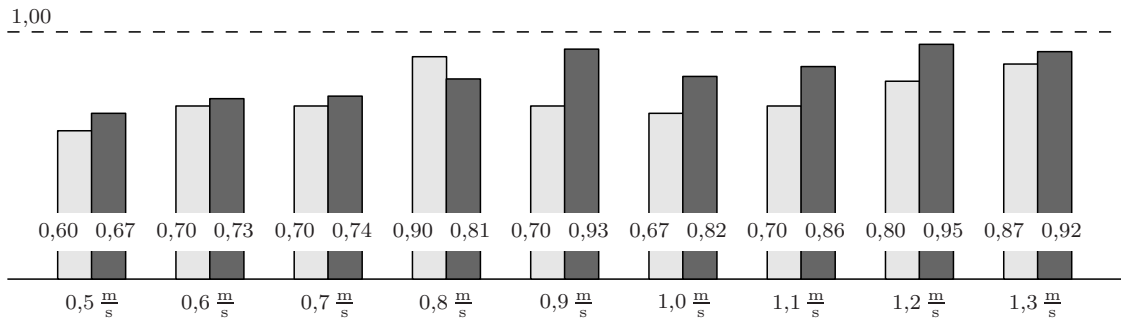
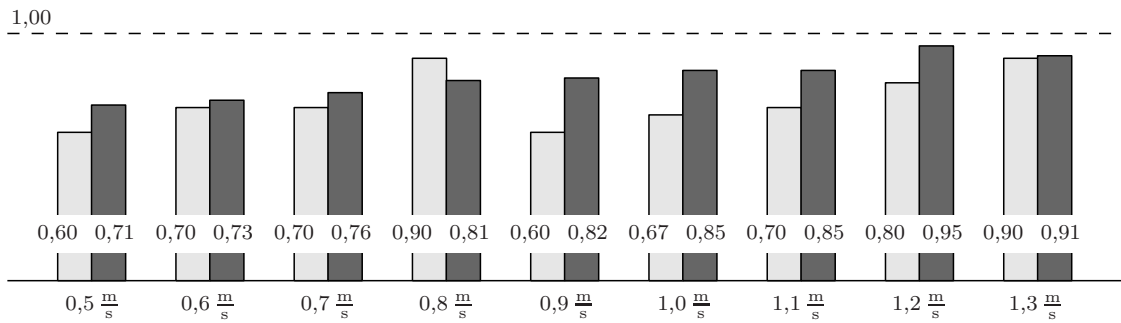
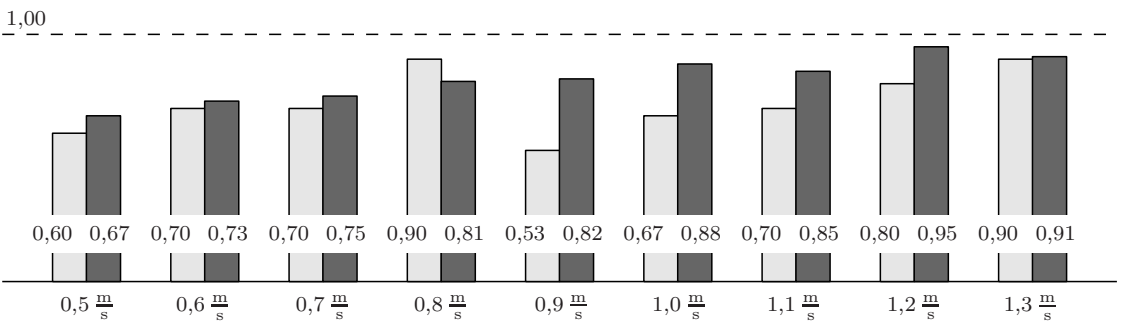


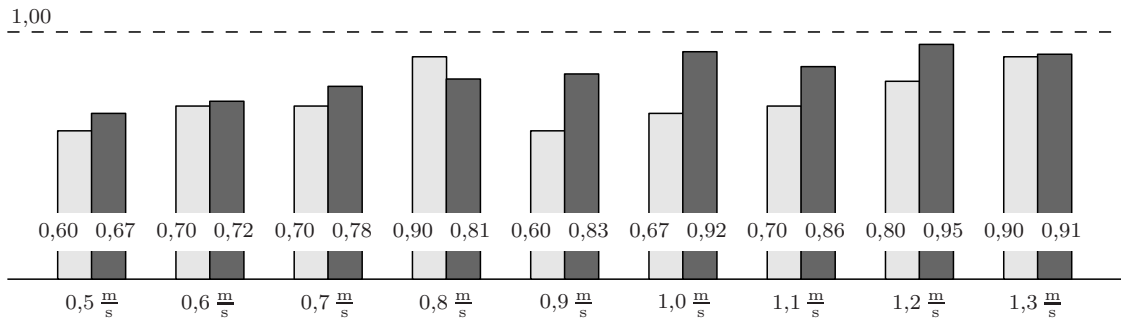
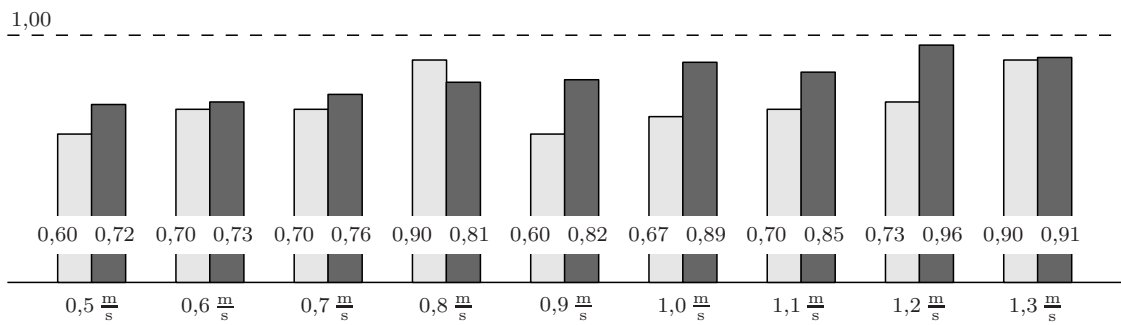
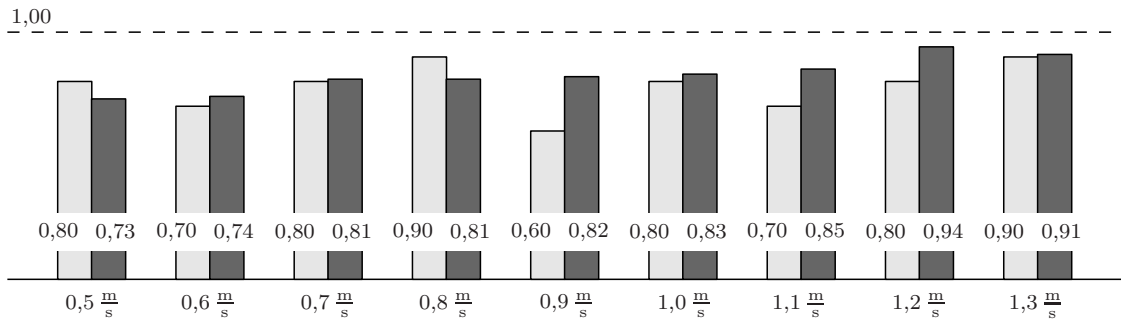
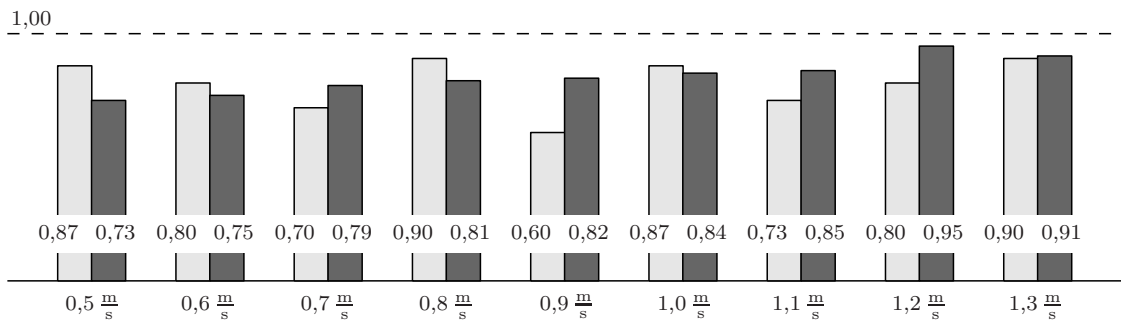
Rysunek 4.14: Ewolucja sympleksu początkowego względem rozszerzonej funkcji celu $f_3(\mathbf{w})$ dla $c = 0,2$ na tle wykresu warstwicowego eksperymentalnej funkcji celu $g_3(\mathbf{w})$.

Algorytm sympleksów Nelder – Meada, w wersji przedstawionej w podpunktach 4.7.2 – 4.7.4, zastosowano przy realizacji drugiego zadania optymalizacji. Uzyskane wyniki przedstawimy w niniejszym podpunkcie. Na rysunku 4.14 zilustrowano, typową dla rozważanego problemu, ewolucję sympleksu początkowego ze współczynnikiem $c = 0,2$.

Niech $\mathbf{w}^*$ oznacza punkt optymalny otrzymany w wyniku działania algorytmu. Wartości rozszerzonej funkcji celu $f_j(\mathbf{w}^*)$, odpowiadające wyznaczonym punktom optymalnym, przedstawiono na rysunkach 4.15(a) – 4.15(h). Wartości te rozłożono na dwie składowe, tj.: $\delta_j(\mathbf{w}^*)$ – słupek lewy oraz $\kappa_j(\mathbf{w}^*)$ – słupek prawy. Zauważmy, że:

- a) dla każdego z wyznaczonych punktów $\mathbf{w}^*$ zachodzi $\delta_j(\mathbf{w}^*) \leq 1$,
- b) dla każdego z wyznaczonych punktów $\mathbf{w}^*$ zachodzi $\kappa_j(\mathbf{w}^*) < 1$.

(a) $c = 0,01$ (b) $c = 0,02$.(c) $c = 0,05$.(d) $c = 0,1$.

(e) $c = 0,2$ (f) $c = 0,5$.(g) $c = 1$.(h) $c = 2$.

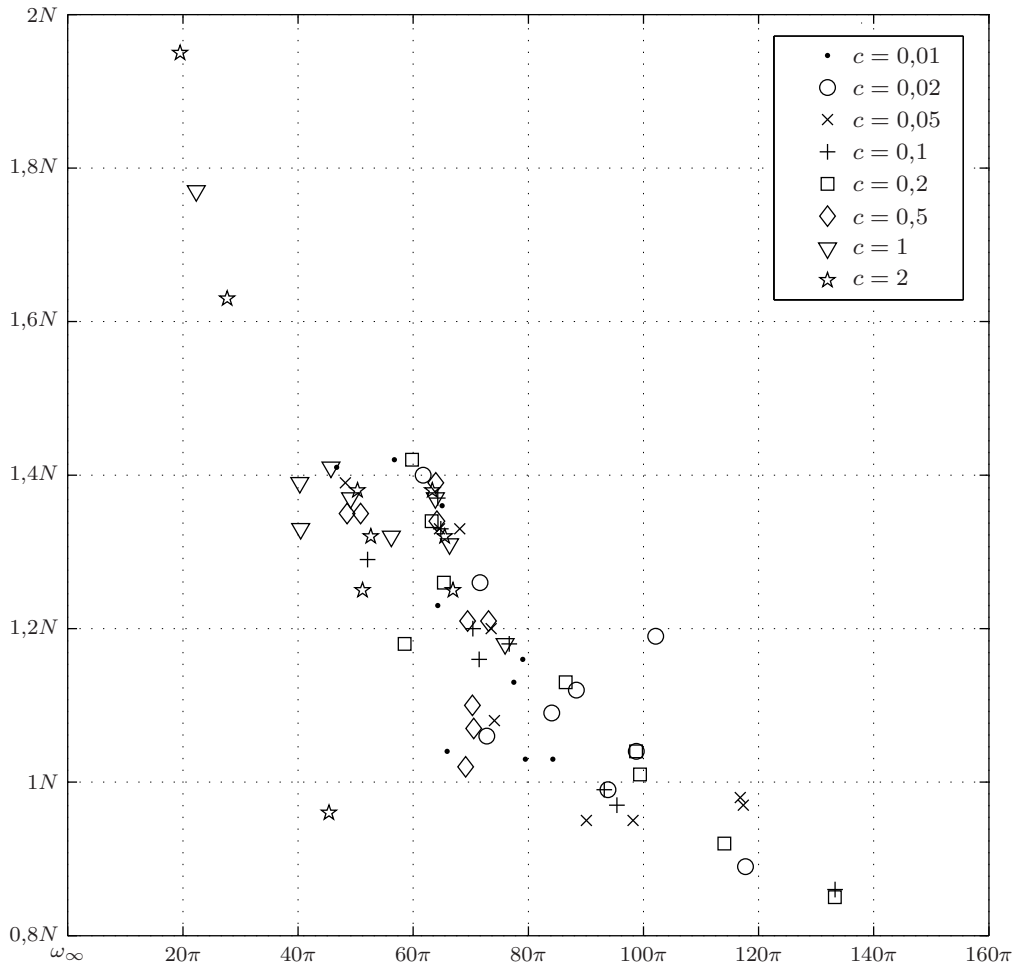
Rysunek 4.15: Wartość kryterium: $\delta_j(\mathbf{w}^*)$ (słupek lewy) oraz $\kappa_j(\mathbf{w}^*)$ (słupek prawy), uzyskane dla różnych wartości współczynnika c sympleksu początkowego w funkcji prędkości v .

Stwierdzenie faktu a) oznacza, iż maksymalny bezwzględny błąd, bezwzględny błąd średni oraz odchylenie standardowe błędów, cechujące uzyskane w procesie filtracji wyniki ważenia dynamicznego, nie przekraczają wartości dopuszczalnych określonych zgodnie z zadeklarowaną klasą dokładności. Stwierdzenie faktu b) oznacza, iż odpowiedź układu filtrującego ustala się w trakcie etapu ważenia dynamicznego wokół wskazania ostatecznego m . Wszystkie wyznaczone punkty optymalne reprezentują zatem proces filtracji spełniający zdefiniowany w rozdziale drugim cel filtracji. Podobnie jak w przypadku wyznaczania maksymalnej prędkości przenośników taśmowych $v_{\max}$, z ostatecznym rozstrzygnięciem wstrzymamy się do momentu weryfikacji uzyskanych wyników (por. rozdział 5).

Wszystkie wyznaczone w wyniku działania algorytmu punkty optymalne $\mathbf{w}^*$ umieszczono na rysunku 4.16. Jak można zauważyć, zawierają się one wewnątrz obszaru

$$\left[\omega_{\infty}, 160\pi \right] \times \left[0,8N, 2N \right] \subset \mathcal{S} \quad (4.112)$$

stanowiącego podobzdar obszaru poszukiwań $\mathcal{S}$. Oznacza to, iż przyjęte wcześniej proste: p_1 , p_2 , p_3 i p_4 , ograniczające rozważany obszar poszukiwań, dobrane zostały poprawnie. W przypadku współczynników $c = 1$ i $c = 2$, pomimo, że odpowiadającym im sympleks



Rysunek 4.16: Wyznaczone w wyniku działania algorytmu sympleksów punkty optymalne $\mathbf{w}^*$ dla każdej z rozpatrywanych wartości współczynnika c oraz dla każdej z przebadanych prędkości przenośników taśmowych v .

początkowy nie jest sympleksem wpisanym w obszar $\mathcal{S}$, wyznaczone punkty optymalne zawierają się również wewnątrz tego obszaru. Może to świadczyć o tym, iż rozwiązania dopuszczalne, które dla prędkości $v = 0,5 - 0,7 \frac{m}{s}$ znajdują się poza wskazanymi granicami obszaru poszukiwań (por. rys. 4.8(a) – 4.8(c)), cechują się wyższą wartością rozszerzonej funkcji celu f_j .

Porównując wartości kryterium δ charakteryzujące wyznaczone punkty optymalne z wartościami uzyskanymi metodą przeglądu na siatce (por. rys. 4.6(b)), można zauważyć, iż wartości te są do siebie zbliżone. Nie zdarzyło się jednak, aby którykolwiek z wyznaczonych wierzchołków $\mathbf{w}^*$ cechowała wartość niższa od odpowiadającej jej wartości cechującej punkt optymalny wyznaczony w pierwszym zadaniu optymalizacji. Twierdzenie, iż metoda przeglądu na siatce oferuje lepsze rezultaty, choć przypuszczalnie prawdziwe, nie jest jednak w pełni uprawnione, należy bowiem pamiętać, że w przypadku algorytm sympleksów inna jest funkcja celu.

Niewątpliwym atutem metody sympleksów jest jej niski koszt obliczeniowy. Średnią liczbę wywołań¹¹ procedury wyznaczania wartości rozszerzonej funkcji celu f_j , przedstawionej w podpunkcie 4.7.4, umieszczono w tabeli 4.3. Odnosząc wyznaczone liczby wywołań do liczby węzłów klasyfikowanych w ramach metody przeglądu na siatce¹², możemy mówić o różnicy trzech rzędów wielkości. Zauważmy jednocześnie, iż właściwy dobór rozmiaru sympleksu początkowego istotnie wpływa na wydajność algorytmu. Jest ona niższa zarówno w przypadku zbyt małego ($c = 0,01$), jak i zbyt dużego ($c = 1$, $c = 2$) rozmiaru sympleksu początkowego.

Uwzględniając wyznaczone wartości rozszerzonej funkcji celu f_j oraz średnią liczbę wywołań procedury 4.7.4, do realizacji drugiego zadania optymalizacji zastosujemy ostatecznie sympleks początkowy o współczynniku $c = 0,1$. Tym samym weryfikację skuteczności opracowanej metody filtracji przeprowadzimy z wykorzystaniem układu (3.25) o parametrach przedstawionych w tabeli 4.4, umieszczonej na stronie 80. Ostatnie dwie kolumny zawierają współrzędne wyznaczonych, w wyniku działania algorytmu, punktów optymalnych $\mathbf{w}^*$.

4.8 Optymalizacja stacjonarnego procesu filtracji

Mając na uwadze tezę niniejszej rozprawy, wyniki ważenia oraz czasy trwania pomiarów charakteryzujące optymalny układ niestacjonarny (3.25) porównamy w rozdziale 5

$c = 0,01$	$c = 0,02$	$c = 0,05$	$c = 0,1$	$c = 0,2$	$c = 0,5$	$c = 1$	$c = 2$
62	53	50	48	55	55	82	111

Tabela 4.3: Średnia liczba wywołań procedury wyznaczania wartości rozszerzonej funkcji celu, przedstawionej w podpunkcie 4.7.4, w funkcji współczynnika sympleksu początkowego c .

¹¹Chodzi tu o wartość średnią wyznaczoną w zbiorze jedenastu liczb określających ilość wywołań procedury 4.7.4 dla każdej z przebadanych prędkości v przenośników taśmowych.

¹²Siatka S zawiera $H_1 \cdot H_2 = 62500$ węzłów.

z odpowiadającymi im wartościami charakteryzującymi optymalny, w sensie rozszerzonej funkcji celu f_j , stacjonarny układ filtrujący (3.9).

Zadanie optymalizacji parametrów układu stacjonarnego zrealizowano metodą przeglądu na siatce podprzestrzeni $\mathbb{R}^2$, wyznaczonej przez zmienne k i ω_∞ . Mając dany pewien prostokątny obszar

$$\mathcal{U} = [e_1, e_2] \times [f_1, f_2] \subset \mathbb{R}^2, \quad (4.113)$$

w przestrzeni zmiennych k i ω_∞ utworzono siatkę U zawierającą $H_5 \cdot H_6$ węzłów o stałym oczku, taką że

$$U = \left\{ (k, \omega_\infty) \in \mathcal{U} : \begin{aligned} k &= e_1 + \frac{h_5 - 1}{H_5 - 1}(e_2 - e_1), \quad h_5 = 1, \dots, H_5, \\ \omega_\infty &= f_1 + \frac{h_6 - 1}{H_6 - 1}(f_2 - f_1), \quad h_6 = 1, \dots, H_6 \end{aligned} \right\}. \quad (4.114)$$

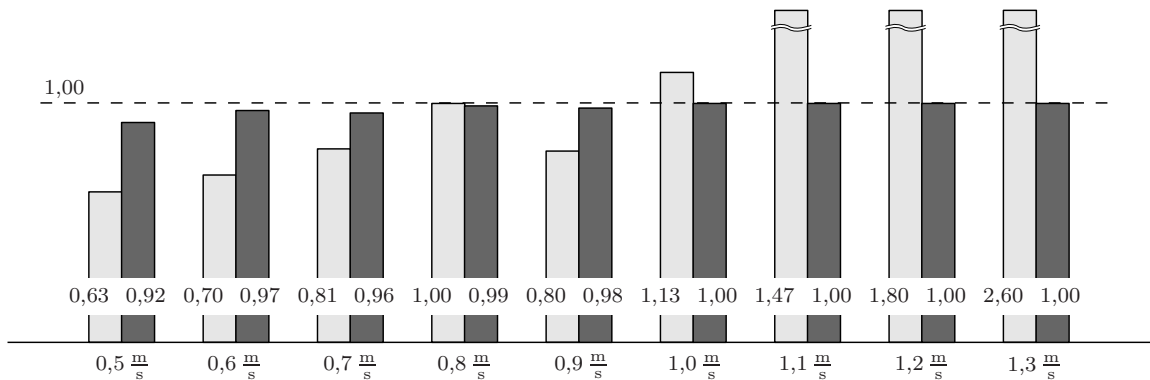
Przyjęto następujące wartości parametrów siatki U :

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 50, \quad H_5 = 50, \quad f_1 = 0,2\pi, \quad f_2 = 20\pi, \quad H_6 = 100. \quad (4.115)$$

Klasyfikacji węzłów siatki U dokonano podobnie, jak to miało miejsce w podpunkcie 4.5.3, realizując proces filtracji zgromadzonego zestawu sygnałów, o których mowa w tabeli 4.2. Każdemu węzłowi siatki U przyporządkowano w ten sposób wartość rozszerzonej funkcji celu niezależnej od masy przedmiotu testowego f_j . Spośród wszystkich sklasyfikowanych węzłów dla każdej z prędkości $v = 0,5 - 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wyznaczono węzeł

$$(k^*, \omega_\infty^*) = \min_{(k, \omega_\infty) \in U} f_j(k, \omega_\infty) \quad (4.116)$$

charakteryzujący się najmniejszą wartością funkcji f_j . Wyznaczone współrzędne węzłów optymalnych (k^*, ω_∞^*) umieszczono w tabeli 4.5 a odpowiadające im wartości rozszerzonej funkcji celu f_j , rozłożone na składowe $\delta_j(k^*, \omega_\infty^*)$ oraz $\kappa_j(k^*, \omega_\infty^*)$ przedstawiono na rysunku 4.17.



Rysunek 4.17: Wartość kryterium: δ_j (słupki lewe) oraz κ_j (słupki prawe), charakteryzujące, wyznaczone metodą przeglądu na siatce, węzły optymalne (k^*, ω_∞^*) w funkcji prędkości v .

v	k	$\omega_\infty, \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	ω_0	N_α
$0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	3	$2\pi \cdot 0,1$	$2\pi \cdot 66,64$	$0,86N \approx 933$
$0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$			$2\pi \cdot 47,7$	$0,97N \approx 885$
$0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$			$2\pi \cdot 46,6$	$0,99N \approx 775$
$0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$			$2\pi \cdot 26,03$	$1,29N \approx 886$
$0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$			$2\pi \cdot 35,73$	$1,16N \approx 717$
$1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$			$2\pi \cdot 35,18$	$1,20N \approx 676$
$1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$			$2\pi \cdot 38,35$	$1,18N \approx 616$
$1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$			$2\pi \cdot 32,13$	$1,37N \approx 655$
$1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$			$2\pi \cdot 32,4$	$1,33N \approx 575$

Tabela 4.4: Parametry optymalnego układu niestacjonarnego (3.25), w funkcji prędkości przenośników taśmowych v , wyznaczone w ramach pierwszego i drugiego zadania optymalizacji.

v	k	$\omega_\infty, \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	18	$2\pi \cdot 2,5$
$0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	19	$2\pi \cdot 2,7$
$0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	14	$2\pi \cdot 3$
$0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	17	$2\pi \cdot 3,4$
$0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	13	$2\pi \cdot 3,5$
$1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	13	$2\pi \cdot 3,7$
$1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	14	$2\pi \cdot 4,1$
$1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	12	$2\pi \cdot 4,3$
$1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	8	$2\pi \cdot 4,4$

Tabela 4.5: Parametry optymalnego układu stacjonarnego (3.9), w funkcji prędkości przenośników taśmowych v , wyznaczone metodą optymalizacji na siatce.

Mając wyznaczony zestaw parametrów cechujący optymalny stacjonarny oraz optymalny niestacjonarny układ filtrujący, możemy przystąpić do weryfikacji tezy sformułowanej we wstępie rozprawy.

Rozdział 5

Eksperymentalna weryfikacja uzyskanych wyników

5.1 Ciągły tryb pracy układu filtrującego

W poprzednim rozdziale stwierdziliśmy, iż w zależności od aktualnego cyklu pracy wagi zmienia się również cel filtracji sygnału pomiarowego. Podstawowym celem filtracji jest oczywiście cel szczegółowy zdefiniowany w rozdziale drugim. Do tej pory nie uwzględniliśmy jednak dwóch innych celów, tj.:

- a) wykonywania operacji zerowania (por. podpunkt 2.2.2),
- b) odczytu bieżącego obciążenia przenośnika ważącego w trybie statycznym, zgodnie z rekomendacją [5].

Aby umożliwić realizację dwóch pozostałych celów, zdefiniujemy obecnie ciągły tryb pracy układu filtrującego, w którym rozważać będziemy proces filtracji określony w nieskończonym horyzoncie czasowym, tj. proces filtracji realizowany z wykorzystaniem układu (3.25) rzędu k , wyznaczony przez ciąg współczynników

$$\lambda(0), \lambda(1), \lambda(2), \dots, \quad (5.1)$$

w wyniku którego danemu ciągowi wejściowemu

$$x(-1), x(0), x(1), \dots \quad (5.2)$$

przyporządkowany zostaje ciąg

$$y(0), y(1), y(2), \dots, \quad (5.3)$$

stanowiący odpowiedź układu filtrującego. Rozszerzymy także przyjętą w podrozdziale 3.4 definicję funkcji uzmienniającej, przez którą od teraz rozumieć będziemy funkcję

$$\omega_g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \Omega, \quad (5.4)$$

wyznaczającą ciąg $\{\omega_g(n)\}_0^\infty$. W niniejszym rozdziale rozpatrzemy tryb pracy układu, uwzględniający przywołany wcześniej cel szczegółowy oraz cel b). Ciągły tryb pracy układu filtrującego, uwzględniający cel szczegółowy oraz cel a), omówiono w pracy [39].

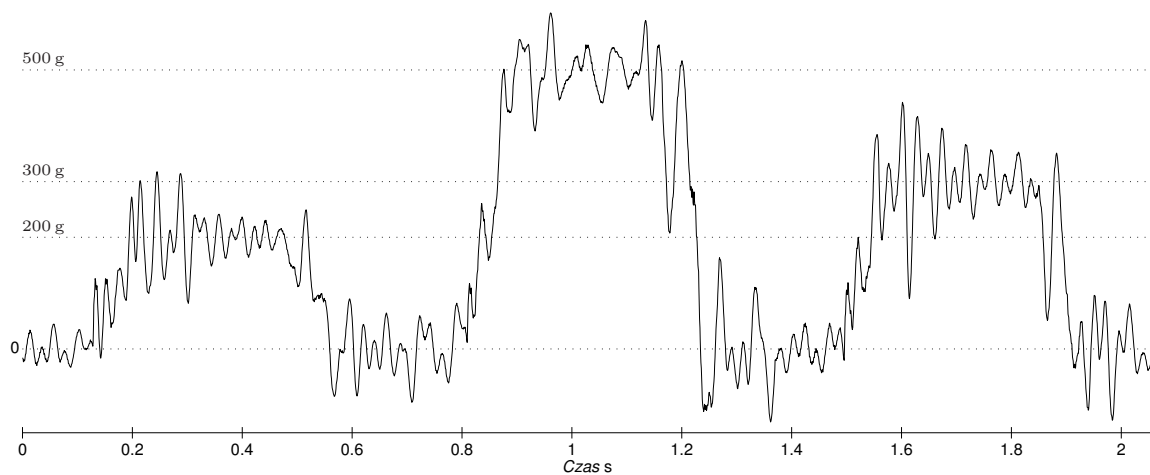
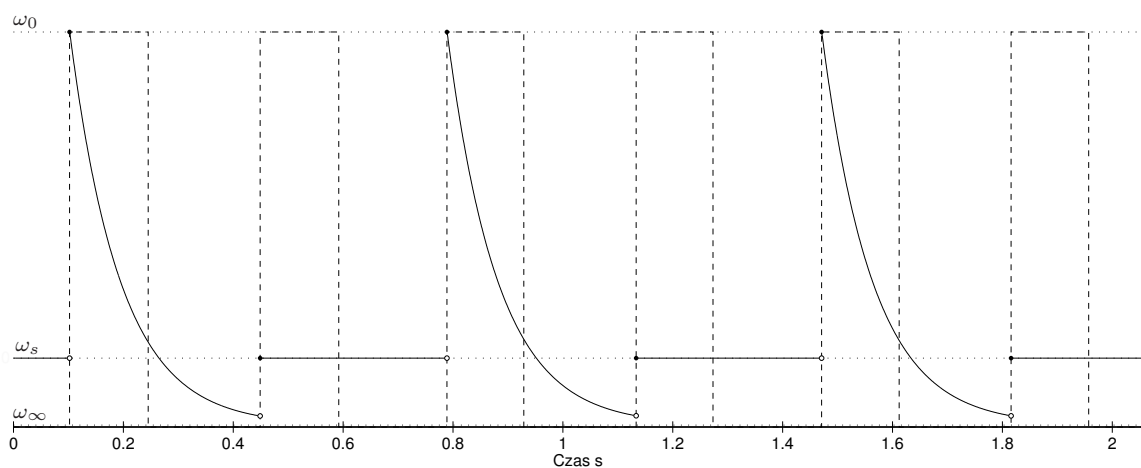
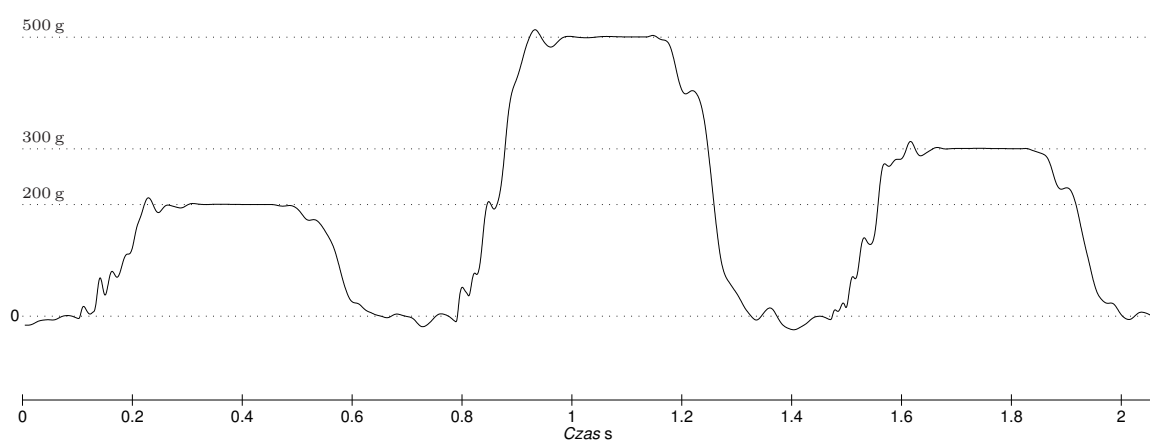
Przyjmijmy, iż dany jest stacjonarny układ filtrujący (3.9) rzędu $k = 3$, którego pulsację graniczną ω_s dobrano w taki sposób, aby dokonywany z jego udziałem odczyt wskazania wagi kontrolującej w trybie statycznym cechował błąd nieprzekraczający wartości dopuszczalnych zawartych w rekomendacji [5]. Zarówno szczegółowy cel filtracji jak i zadanie odczytu bieżącego obciążenia przenośnika ważącego w trybie statycznym realizować będziemy z wykorzystaniem układu niestacjonarnego (3.25) rzędu $k = 3$, pracującego w dwóch trybach pracy, tj.: *statycznym* i *ważenia dynamicznego*.

Statyczny tryb pracy stanowić będzie tryb *domyślny*; będzie on aktywny od momentu włączenia napięcia zasilającego modułu pomiarowego wagi aż do momentu wystąpienia zbocza narastającego sygnału s_1 fotokomórki umieszczonej pomiędzy przenośnikiem wejściowym i ważącym, tak jak to zostało przedstawione na rysunku 5.1. Wykrycie owego zbocza spowoduje aktywację trybu ważenia dynamicznego. W momencie wystąpienia zbocza narastającego sygnału s_2 fotokomórki umieszczonej pomiędzy przenośnikiem ważącym i wyjściowym bieżąca próbka sygnału $y(n)$, znajdująca się na wyjściu układu filtrującego, potraktowana zostanie jako wynik ważenia dynamicznego $\hat{m}$ a następnie aktywowany zostanie statyczny tryb pracy układu. Szczegółowy opis czynności towarzyszących przełączaniu pomiędzy rozważanymi trybami pracy układu filtrującego przedstawiono w tabeli 5.1. W tabeli zawarto także wartości parametrów γ , a i β , umożliwiające rekurencyjną realizację sekwencji działania układu filtrującego dla przyjętej w rozdziale czwartym funkcji uzmienniającej (3.61) tak, jak to zostało przedstawione w podrozdziale 3.5. Warto podkreślić, iż w przypadku aktywacji dowolnego z rozpatrywanych trybów pracy stan układu nie podlega żadnej zewnętrznej ingerencji; *zmienia się on jedynie według równań opisujących działanie układu filtrującego*. W trakcie procesu filtracji zmianie podlega natomiast wartość parametru $\omega_g(n)$, przy czym przebieg funkcji uzmienniającej kształtowany jest występującymi zdarzeniami tak, jak to zostało przedstawione w tabeli 5.1. Ponadto z rozdziału trzeciego wiadomo także, iż z punktu widzenia stabilności układu opracowany filtr niestacjonarny nie podlega żadnym ograniczeniom, parametr $\omega_g(n)$ może przyjmować dowolne wartości ze zbioru Ω .

Aktywacja statycznego trybu pracy w momencie wystąpienia zbocza narastającego sygnału s_2 nie jest podyktowana względami pomiarowymi. Rozwiązanie takie umożliwia śledzenie zmian sygnału pomiarowego poza etapem ważenia dynamicznego w celu aktuali-

Zdarzenie	Opis wykonanych czynności
Włączenie napięcia zasilającego	Aktywacja trybu statycznego, wyzerowanie warunków początkowych układu, $\gamma = \frac{2\xi_k}{\Delta}$, $a = 1$, $\beta(n) = \omega_g$
Zbocze narastające s_1	Aktywacja trybu ważenia dynamicznego $\gamma = \frac{2\xi_k + \omega_0}{\omega_0 - \omega_\infty}$, $a = \alpha^{\frac{1}{N\alpha}}$, $\beta(n) = a^{-1}$
Zbocze narastające s_2	Ustalenie wyniku ważenia dynamicznego $\hat{m} = y(n)$, aktywacja trybu statycznego, $\gamma = \frac{2\xi_k}{\Delta}$, $a = 1$, $\beta(n) = \omega_g$

Tabela 5.1: Czynności towarzyszące zmianie trybu pracy niestacjonarnego układu filtrującego.

(a) ciąg wejściowy $\{x(n)\}_{-1}^{\infty}$ (fragment)(b) funkcja uzmienniająca układu $\{\omega_g(n)\}_0^{\infty}$ (fragment)(c) odpowiedź układu $\{y(n)\}_0^{\infty}$ (fragment)Rysunek 5.1: Ciągły tryb pracy niestacjonarnego układu filtrującego (3.25) rzędu $k = 3$, $v = 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

zacji wskazań wyświetlacza wagi¹. Ponadto dzięki takiemu rozwiązaniu, w momencie aktywacji trybu ważenia dynamicznego stan układu filtrującego jest bliski wartości zerowej, co uzasadnia przyjęcie założenia o zerowych warunkach początkowych, które poczyniliśmy w podpunktach 4.5.3 oraz 4.7.4.

5.2 Wyniki weryfikacji

Weryfikacji skuteczności opracowanej metody filtracji dokonano w oparciu o zestaw sygnałów pomiarowych zarejestrowanych w ramach drugiego etapu prac eksperymentalnych. Zarejestrowane sygnały poddano procesowi filtracji, wykorzystując w tym celu:

1. Układ stacjonarny (3.9) o parametrach zawartych w tabeli 4.5, który w niniejszym podrozdziale nazywać będziemy dalej *układem stacjonarnym*.
2. Układ niestacjonarny (3.25), pracujący w ciągłym trybie pracy tak, jak to zostało przedstawione w podrozdziale 5.1, który w niniejszym podrozdziale nazywać będziemy dalej *układem niestacjonarnym*. Przyjęto następujące wartości parametrów układu niestacjonarnego:
 - a) w trybie statycznym: $k = 3$, $\omega_s = 12\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$,
 - b) w trybie ważenia dynamicznego: zgodnie z danymi zawartymi w tabeli 4.4.

Do weryfikacji wykorzystano dziewięć serii sygnałów, tj. dla każdej prędkości v z zakresu od $0,5$ do $1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Uzyskane w procesie filtracji wyniki ważenia dynamicznego uporządkowano względem masy przedmiotu testowego, otrzymując łącznie cztery dwudziesto-elementowe zbiory wyników ważenia dynamicznego

$$Z_{1,j}, Z_{2,j}, Z_{3,j}, Z_{4,j}, \quad (5.5)$$

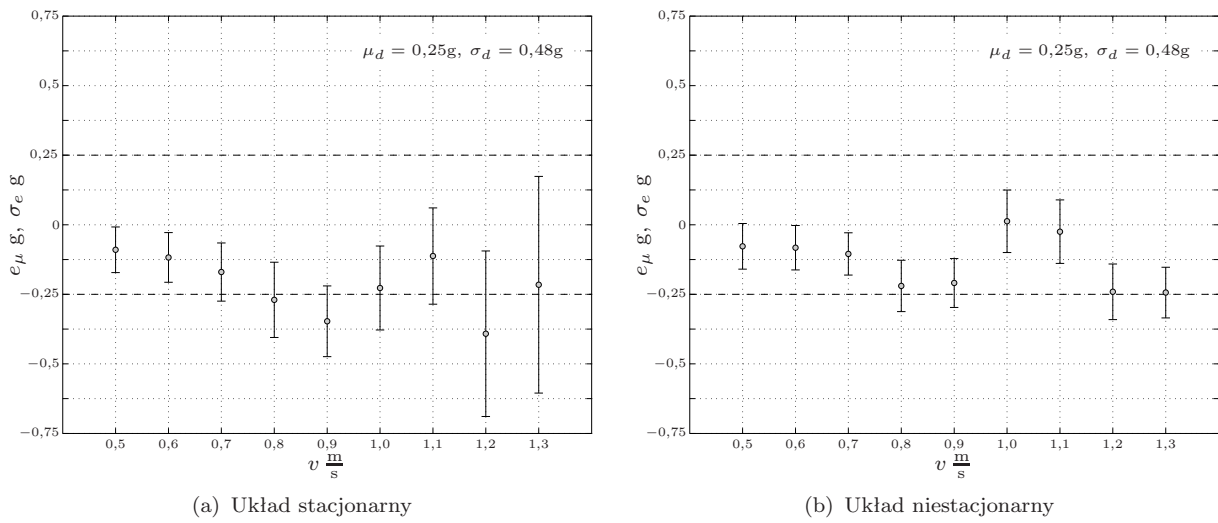
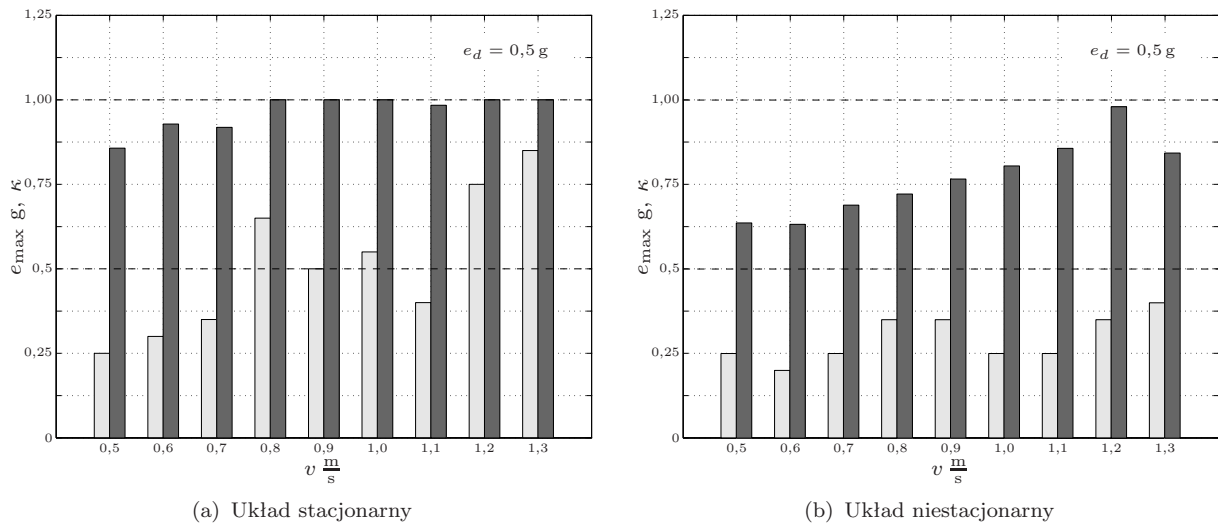
odpowiadające przedmiotom testowym

$$m_1, m_2, m_3, m_4. \quad (5.6)$$

Względem każdego ze zbiorów wyznaczono: maksymalny bezwzględny błąd $e_{\max}$, błąd średni e_μ oraz odchylenie standardowe błędu σ_e . W podobny sposób, tj. oddzielnie dla każdego przedmiotu testowego, wyznaczono wartości kryterium κ charakteryzujące otrzymane w procesie filtracji odpowiedzi układu. Uzyskane wyniki weryfikacji przedstawiono na stronach 85 – 88.

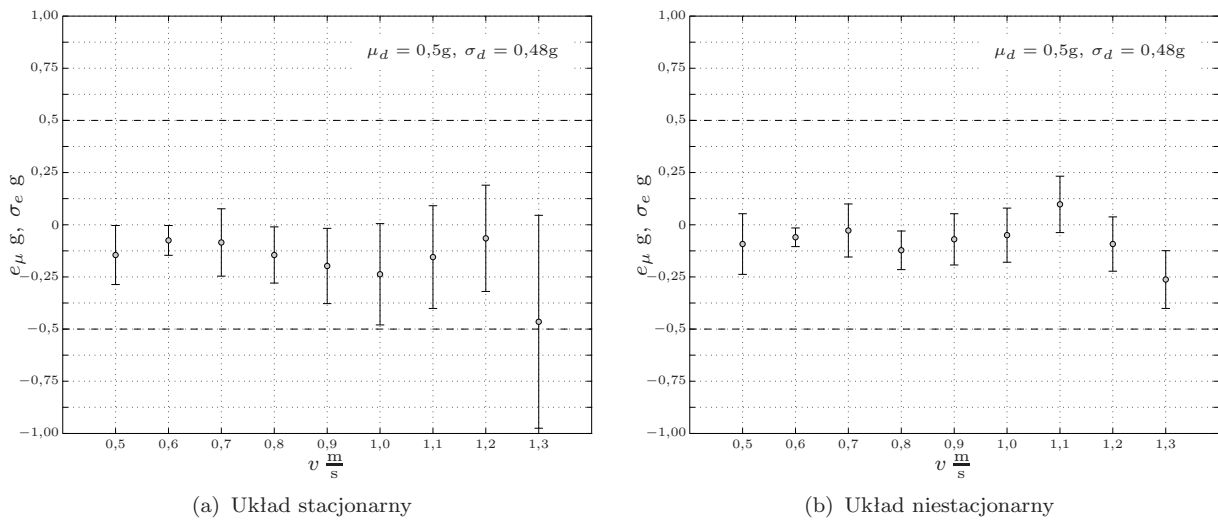
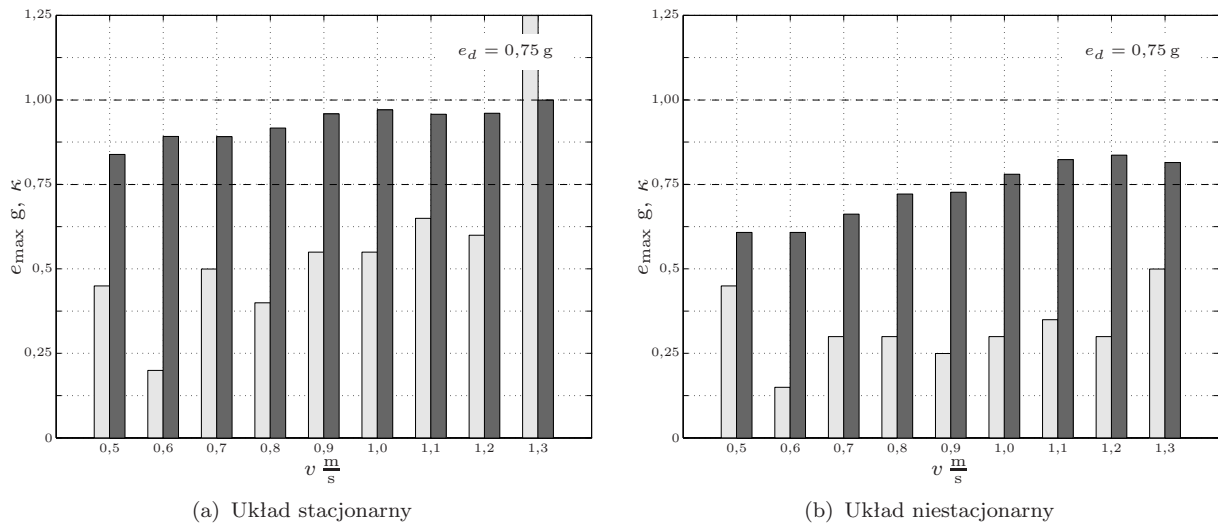
Na rysunkach 5.2, 5.4, 5.6, 5.8 zestawiono błędy średnie oraz odchylenia standardowe błędów cechujące porównywane układy. Wartości maksymalnego dopuszczalnego błędu średniego oraz maksymalnego dopuszczalnego odchylenia standardowego, określone zgodnie z klasą dokładności XIII(1), umieszczono w prawym górnym rogu każdego z rysunków. Ponadto linią przerywaną zaznaczono maksymalny dopuszczalny błąd średni.

¹Wartości parametru N_α , wyznaczone w poprzednim rozdziale, są bliskie długości N horyzontu wyznaczającego etap ważenia dynamicznego. Z niewielkim przybliżeniem można zatem przyjąć, iż w momencie zakończenia etapu ważenia dynamicznego układ niestacjonarny zachowuje się tak, jak klasyczny filtr dolnoprzepustowy, którego – przypomnijmy – pięcioprocentowy czas ustalania przekracza pięćdziesiąt sekund.

Rysunek 5.2: Błąd średni e_μ oraz odchylenie standardowe błędu σ_e , $m = 200$ g.Rysunek 5.3: Bezwzględny błąd maksymalny $e_{\max}$ (s. lewy) i wartość kryterium κ (s. prawy), $m = 200$ g.

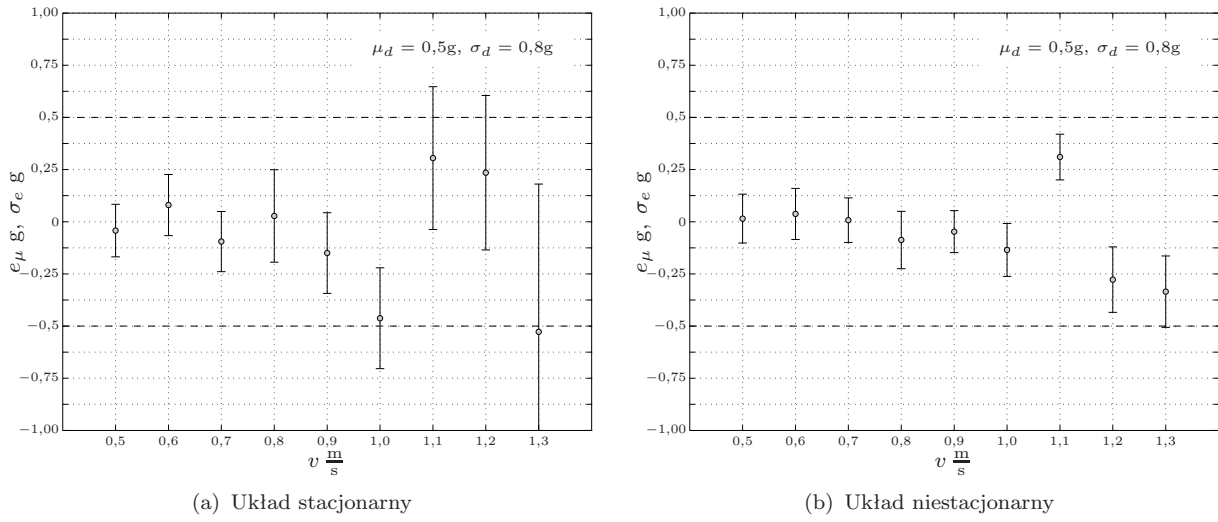
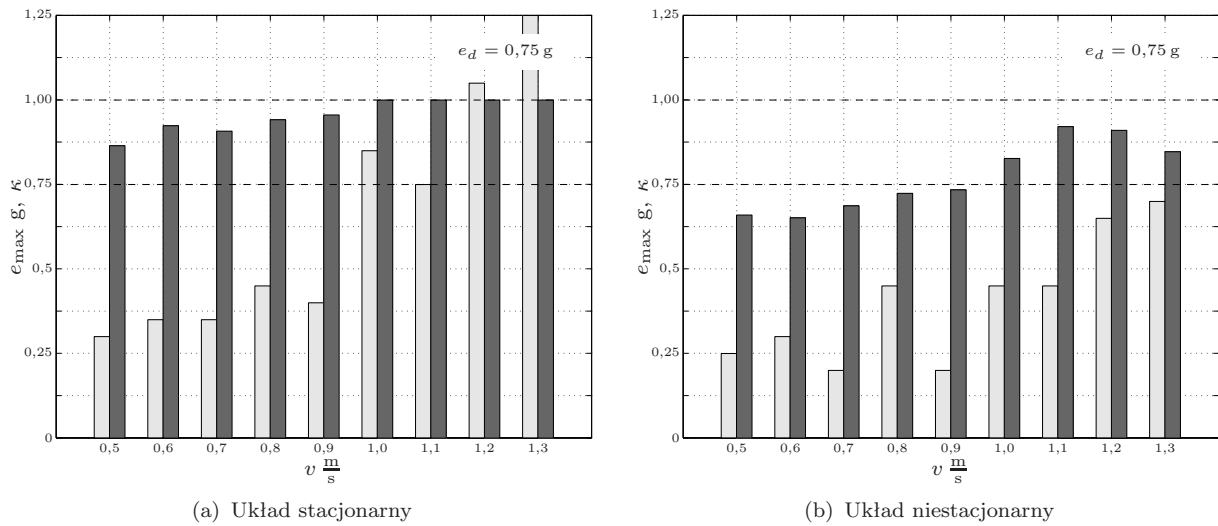
$v, \frac{\text{m}}{\text{s}}$	Układ stacjonarny				Układ niestacjonarny			
	$e_{\max}, \text{g}$	e_μ, g	σ_e, g	κ	$e_{\max}, \text{g}$	e_μ, g	σ_e, g	κ
0,5	0,25	-0,090	0,082	0,86	0,25	-0,078	0,082	0,64
0,6	0,30	-0,118	0,089	0,93	0,20	-0,083	0,080	0,63
0,7	0,35	-0,170	0,104	0,92	0,25	-0,105	0,076	0,69
0,8	0,65	-0,270	0,135	1,00	0,35	-0,220	0,092	0,72
0,9	0,50	-0,347	0,127	1,00	0,35	-0,209	0,088	0,77
1,0	0,55	-0,228	0,151	1,00	0,25	+0,013	0,112	0,81
1,1	0,40	-0,113	0,173	0,98	0,25	-0,025	0,114	0,86
1,2	0,75	-0,392	0,298	1,00	0,35	-0,241	0,100	0,98
1,3	0,85	-0,216	0,389	1,00	0,40	-0,244	0,091	0,84

Tabela 5.2: Wyniki weryfikacji, przedmiot testowy m_1 , $m = 200$ g.

Rysunek 5.4: Błąd średni e_μ oraz odchylenie standardowe błędu σ_e , $m = 300$ g.Rysunek 5.5: Bezwzględny błąd maksymalny $e_{\max}$ (s. lewy) i wartość kryterium κ (s. prawy), $m = 300$ g.

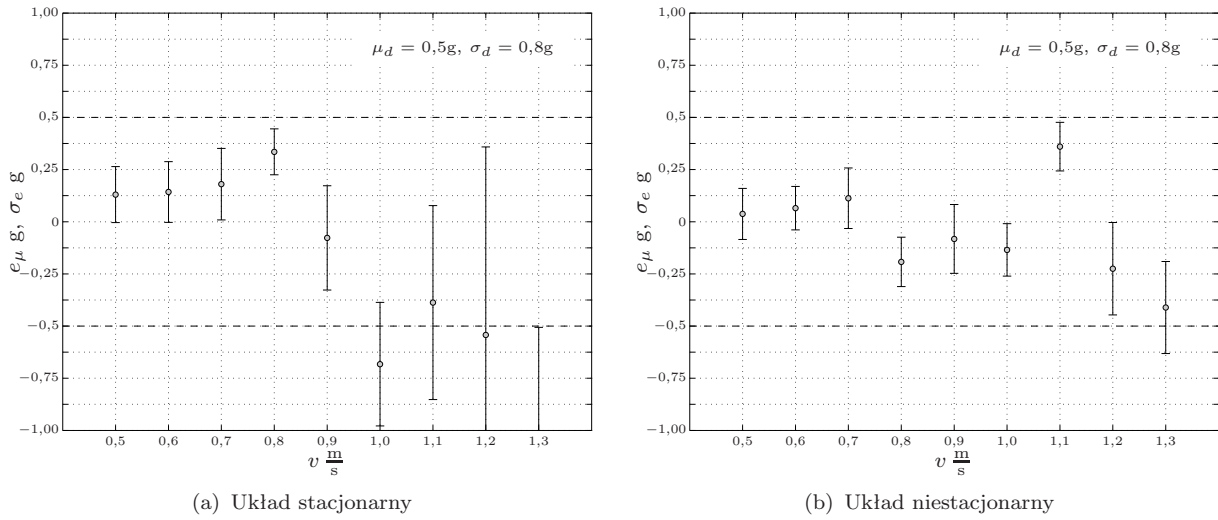
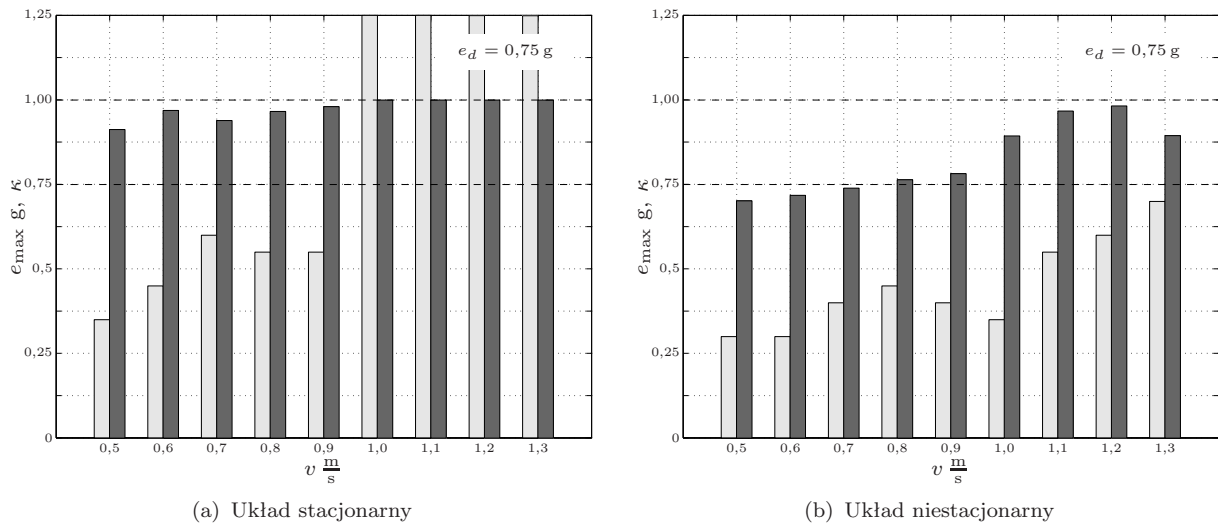
$v, \frac{\text{m}}{\text{s}}$	Układ stacjonarny				Układ niestacjonarny			
	$e_{\max}, \text{g}$	e_μ, g	σ_e, g	κ	$e_{\max}, \text{g}$	e_μ, g	σ_e, g	κ
0,5	0,45	-0,145	0,141	0,839	0,45	-0,093	0,145	0,608
0,6	0,20	-0,075	0,072	0,892	0,15	-0,060	0,045	0,608
0,7	0,50	-0,085	0,161	0,892	0,30	-0,028	0,127	0,662
0,8	0,40	-0,145	0,135	0,917	0,30	-0,123	0,092	0,722
0,9	0,55	-0,198	0,180	0,959	0,25	-0,070	0,123	0,727
1,0	0,55	-0,238	0,243	0,971	0,30	-0,050	0,130	0,780
1,1	0,65	-0,155	0,246	0,958	0,35	+0,098	0,135	0,824
1,2	0,60	-0,065	0,254	0,961	0,30	-0,093	0,130	0,837
1,3	1,25	-0,465	0,510	1,002	0,50	-0,263	0,138	0,815

Tabela 5.3: Wyniki weryfikacji, przedmiot testowy m_2 , $m = 300$ g.

Rysunek 5.6: Błąd średni e_μ oraz odchylenie standardowe błędu σ_e , $m = 500$ g.Rysunek 5.7: Bezwzględny błąd maksymalny $e_{\max}$ (s. lewy) i wartość kryterium κ (s. prawy), $m = 500$ g.

$v, \frac{\text{m}}{\text{s}}$	Układ stacjonarny				Układ niestacjonarny			
	$e_{\max}, \text{g}$	e_μ, g	σ_e, g	κ	$e_{\max}, \text{g}$	e_μ, g	σ_e, g	κ
0,5	0,30	-0,043	0,126	0,87	0,25	+0,015	0,117	0,66
0,6	0,35	+0,080	0,146	0,92	0,30	+0,038	0,122	0,65
0,7	0,35	-0,095	0,144	0,91	0,20	+0,008	0,107	0,69
0,8	0,45	+0,028	0,222	0,94	0,45	-0,088	0,138	0,72
0,9	0,40	-0,150	0,193	0,96	0,20	-0,048	0,101	0,73
1,0	0,85	-0,463	0,242	1,00	0,45	-0,135	0,127	0,83
1,1	0,75	+0,305	0,342	1,00	0,45	+0,310	0,110	0,92
1,2	1,05	+0,235	0,370	1,00	0,65	-0,278	0,157	0,91
1,3	1,65	-0,528	0,708	1,00	0,70	-0,335	0,171	0,85

Tabela 5.4: Wyniki weryfikacji, przedmiot testowy m_3 , $m = 500$ g.

Rysunek 5.8: Błąd średni e_μ oraz odchylenie standardowe błędu σ_e , $m = 700$ g.Rysunek 5.9: Bezwzględny błąd maksymalny $e_{\max}$ (s. lewy) i wartość kryterium κ (s. prawy), $m = 700$ g.

$v, \frac{\text{m}}{\text{s}}$	Układ stacjonarny				Układ niestacjonarny			
	$e_{\max}, \text{g}$	e_μ, g	σ_e, g	κ	$e_{\max}, \text{g}$	e_μ, g	σ_e, g	κ
0,5	0,35	+0,130	0,134	0,91	0,30	+0,038	0,122	0,70
0,6	0,45	+0,143	0,145	0,97	0,30	+0,065	0,104	0,72
0,7	0,60	+0,180	0,171	0,94	0,40	+0,113	0,145	0,74
0,8	0,55	+0,335	0,110	0,97	0,45	-0,193	0,118	0,76
0,9	0,55	-0,078	0,250	0,98	0,40	-0,083	0,165	0,78
1,0	1,35	-0,683	0,296	1,00	0,35	-0,135	0,126	0,89
1,1	1,30	-0,388	0,465	1,00	0,55	+0,360	0,117	0,97
1,2	2,25	-0,543	0,901	1,00	0,60	-0,225	0,222	0,98
1,3	3,30	-1,408	0,902	1,00	0,70	-0,411	0,221	0,86

Tabela 5.5: Wyniki weryfikacji, przedmiot testowy m_4 , $m = 700$ g.

Na rysunkach 5.3, 5.5, 5.7, 5.9 zestawiono maksymalne bezwzględne błędy oraz wartości kryterium κ cechujące porównywane układy. Na podstawie rozważań zawartych w podrozdziale 4.6 miarą czasu trwania pomiaru uczynimy wartość kryterium κ ; za układ o krótszym czasie trwania pomiaru uważać będziemy ten, który cechuje niższa wartość tegoż kryterium. Wartości maksymalnego dopuszczalnego błędu, określone zgodnie z klasą dokładności Y(a), umieszczono w prawym górnym rogu każdego z rysunków oraz zaznaczono linią przerywaną. Linią przerywaną zaznaczono także maksymalną dopuszczalną wartość kryterium κ . Wszystkie uzyskane wyniki weryfikacji zebrano w tabelach 5.2 – 5.5.

Na podstawie wyników przeprowadzonej weryfikacji wyznaczono ostatecznie maksymalną wartość prędkości v przenośników taśmowych, charakteryzującą przyrząd pomiarowy, o którym mowa w podpunkcie 2.4.1, wyposażony w stacjonarny i niestacjonarny układ filtrujący. Wyznaczone wartości prędkości $v_{\max}$ umieszczono w tabeli 5.6.

W zakresie prędkości v od 0,5 do $0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, tj. w zakresie prędkości, dla którego oba porównywane układy poprawnie realizują zdefiniowany w rozdziale drugim szczegółowy cel filtracji, układ niestacjonarny cechują nieznacznie niższe wartości błędów oraz wyraźnie niższe wartości kryterium κ .

Dla prędkości v wyższych niż $0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wyniki uzyskane w układzie niestacjonarnym są już znacząco lepsze od wyników, jakie uzyskano w układzie stacjonarnym. Przedstawione w niniejszym rozdziale wyniki weryfikacji potwierdzają zatem tezę sformułowaną we wstępie rozprawy – *zastosowanie dyskretnych liniowych układów niestacjonarnych w procesie filtracji sygnałów pomiarowych, występujących w dynamicznych procesach ważenia, umożliwia znaczne, w odniesieniu do ich stacjonarnych odpowiedników, skrócenie czasu trwania pomiaru przy jednoczesnym zachowaniu wymaganej dokładności*.

Układ stacjonarny	Układ niestacjonarny
$v_{\max} = 0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$v_{\max} = 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

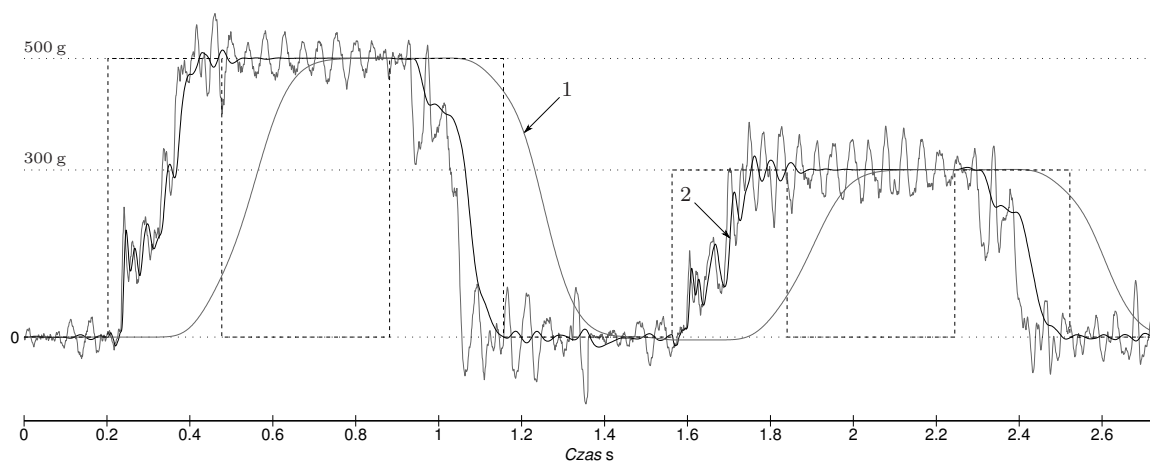
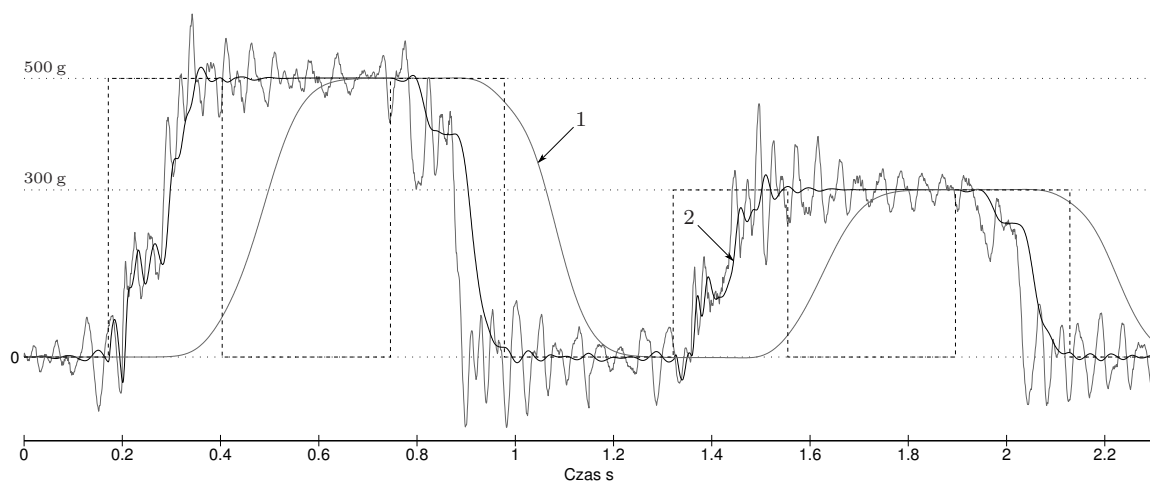
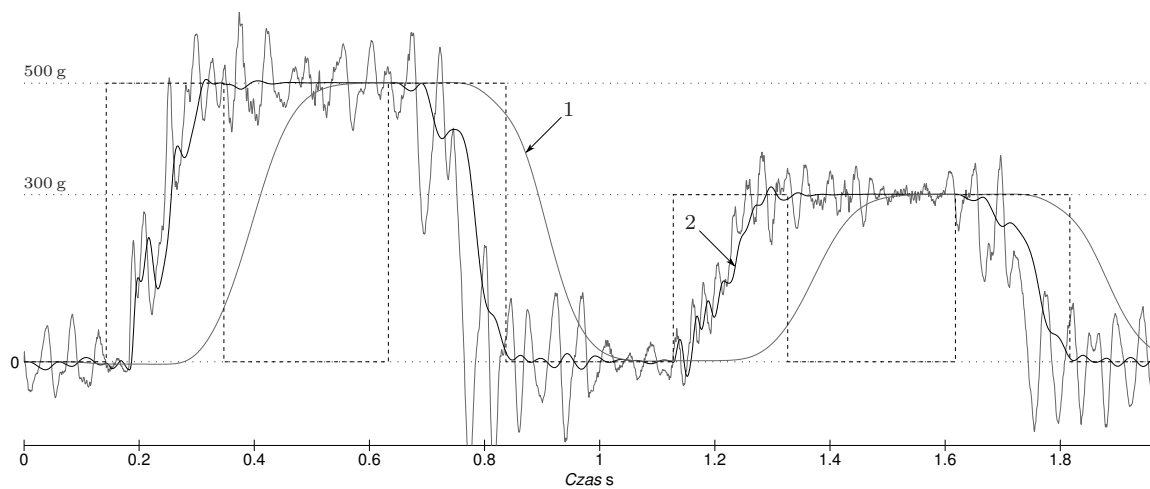
Tabela 5.6: Maksymalna prędkość przenośników taśmowych $v_{\max}$.

5.3 Przebiegi czasowe

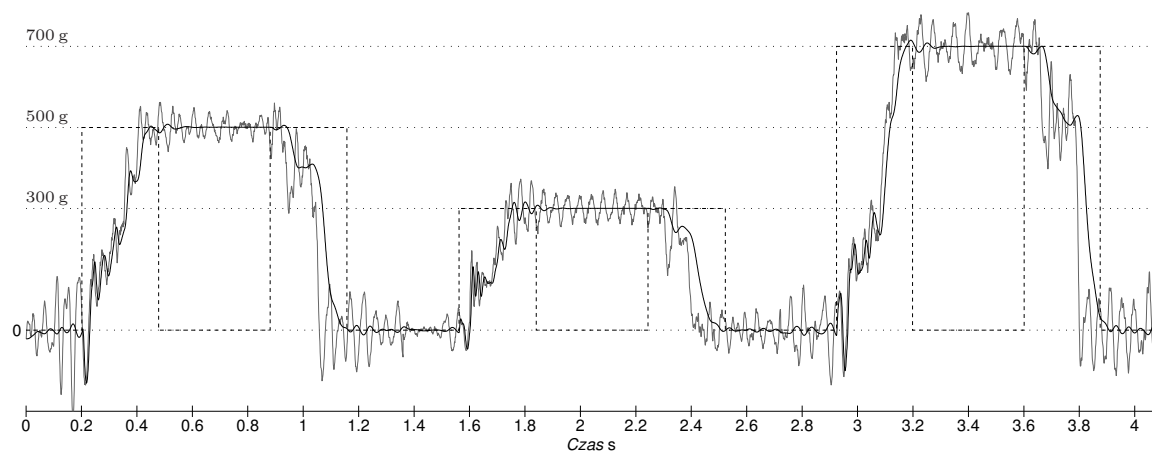
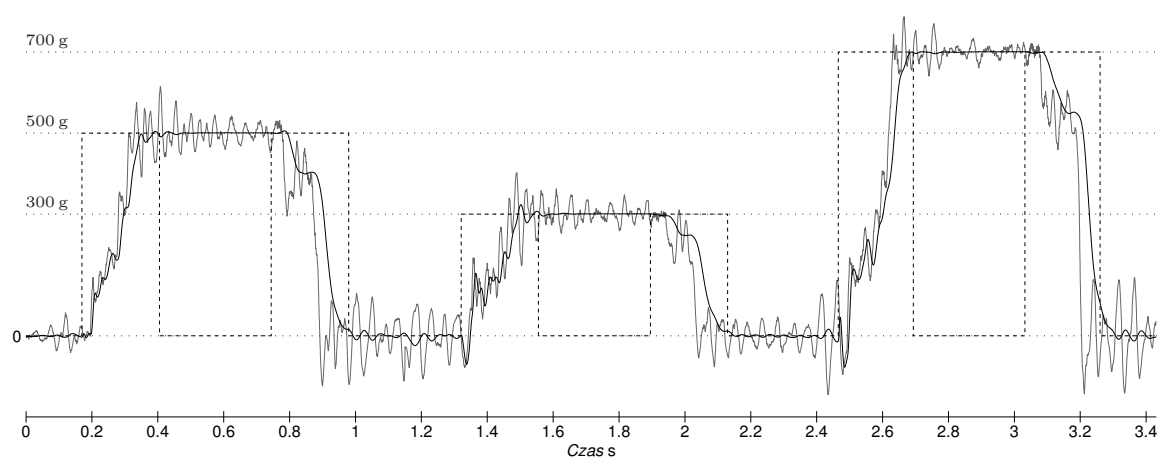
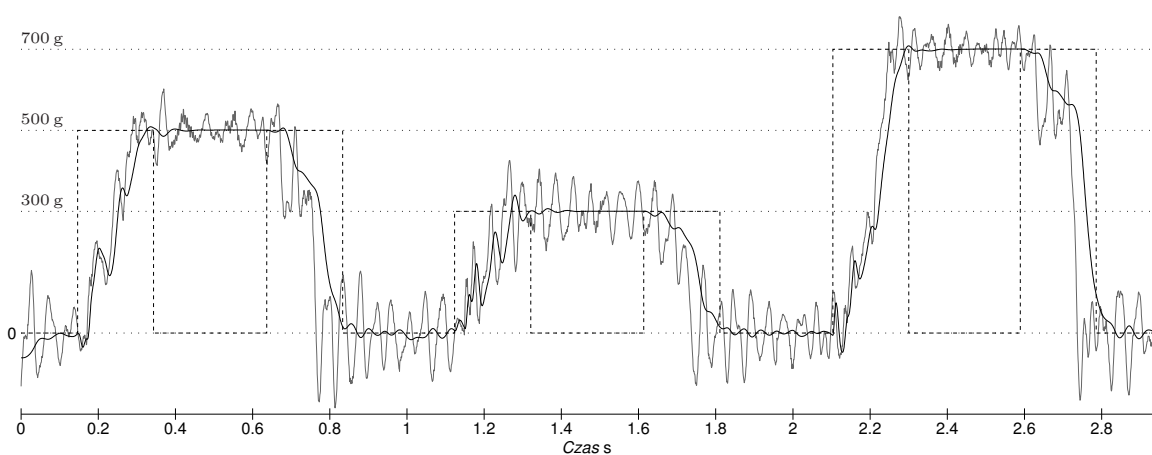
Na zakończenie niniejszego rozdziału przedstawimy jeszcze wybrane odpowiedzi stacjonarnego i niestacjonarnego układu filtrującego, jakie uzyskano w wyniku przeprowadzonej weryfikacji. Oszacujemy także wydajność procesu kontroli ilości towarów paczkowanych prowadzonego z wykorzystaniem przyrządu pomiarowego wyposażonego w stacjonarny i niestacjonarny układ filtrujący.

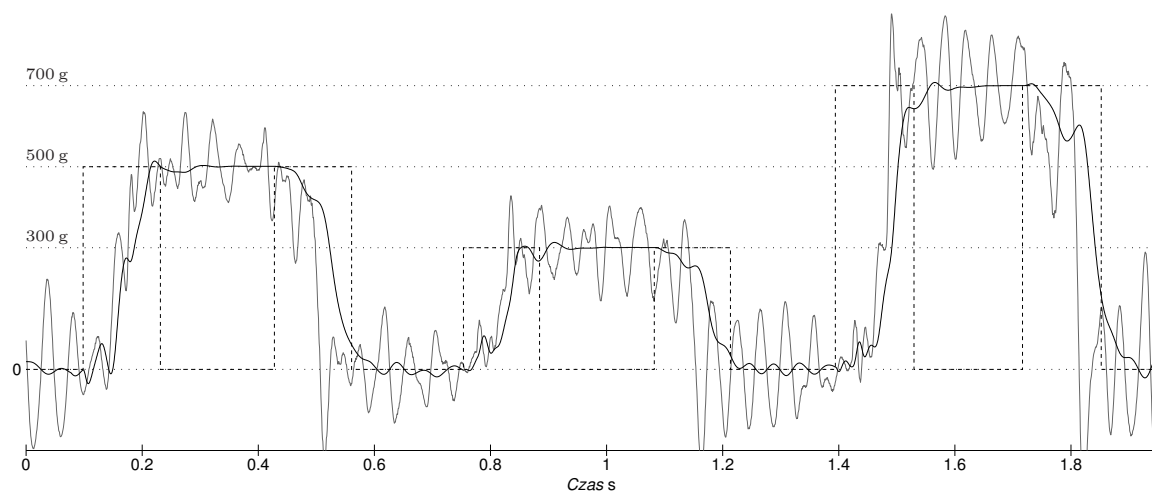
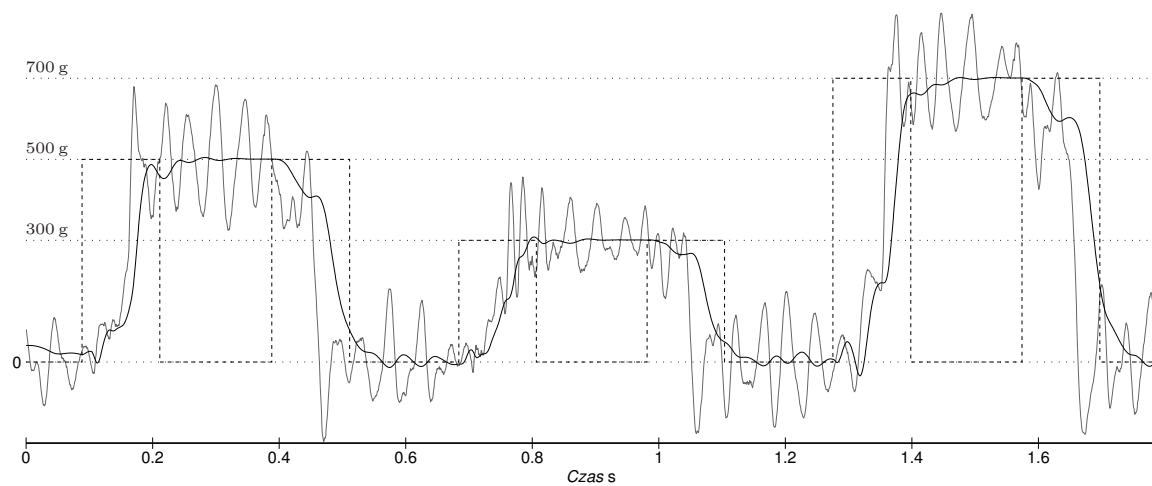
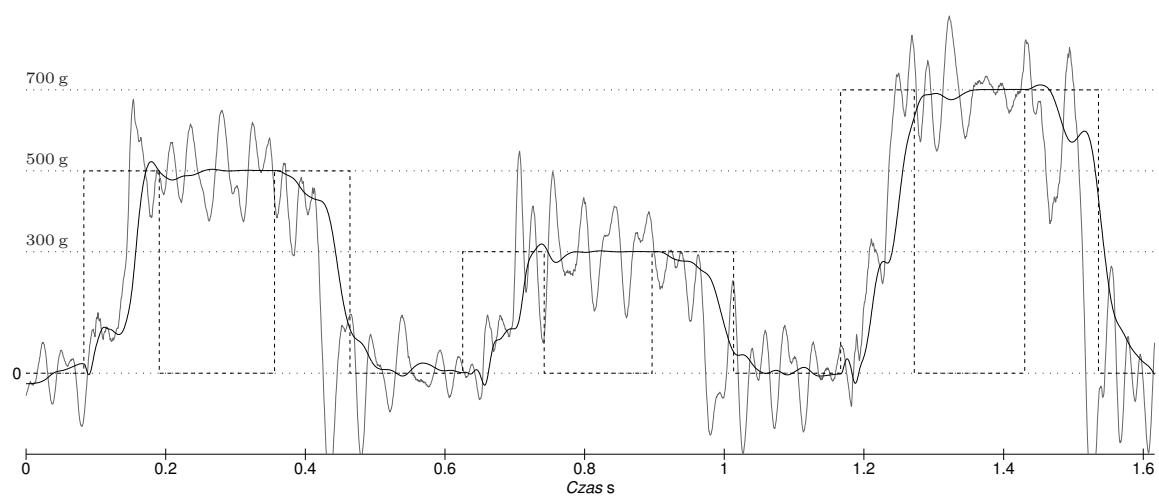
Odpowiedzi układów stacjonarnego i niestacjonarnego na tle wejściowego sygnału pomiarowego oraz sumy sygnałów obu fotokomórek, dla prędkości v wynoszącej 0,5, 0,6 i $0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, przedstawiono odpowiednio na rysunkach 5.10(a), 5.10(b) oraz 5.10(c).

Odpowiedzi niestacjonarnego układu filtrującego na tle wejściowego sygnału pomiarowego oraz sumy sygnałów obu fotokomórek, dla każdej z prędkości v od 0,5 do $1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, przedstawiono na rysunkach 5.11(a) – 5.11(i).

(a) $v = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (b) $v = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (c) $v = 0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Rysunek 5.10: Porównanie odpowiedzi stacjonarnego (1) i niestacjonarnego (2) układu filtrującego.

(a) $v = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (b) $v = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (c) $v = 0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(g) $v = 1.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (h) $v = 1.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (i) $v = 1.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Rysunek 5.11: Wybrane odpowiedzi niestacjonarnego układu filtrującego.

Przyjmijmy, iż dany jest proces kontroli ilości towaru paczkowanego realizowany z wykorzystaniem automatycznej wagi kontrolującej z przenośnikiem taśmowym. Przyjmijmy ponadto, iż etap zerowania realizowany jest w każdym cyklu pracy wagi. Całkowity czas trwania pojedynczego cyklu pracy wynosi wtedy

$$t_c = t_i + t_w + t_o + t_z. \quad (5.7)$$

Wyrażając czasy t_i , t_w , t_o i t_z , tak jak to zostało przedstawione na rysunku 2.2(b), otrzymujemy po przekształceniu

$$t_c = \frac{D + l}{v}. \quad (5.8)$$

Niech v_n i v_s oznaczają maksymalne wartości prędkości przenośników taśmowych charakteryzujące przyrząd pomiarowy wyposażony odpowiednio w niestacjonarny i stacjonarny układ filtrujący. Zdefiniujmy ponadto wydajność procesu kontroli ilości towarów paczkowanych jako liczbę cykli pracy automatycznej wagi kontrolującej przypadających na jedną minutę, tj.

$$W = \frac{60}{t_c}. \quad (5.9)$$

Iloraz wydajności procesu prowadzonego z wykorzystaniem przyrządu wyposażonego w niestacjonarny i stacjonarny układ filtrujący odpowiada ilorazowi prędkości v_n i v_s , zauważmy bowiem, że

$$\frac{W_n}{W_s} = \frac{\frac{v_n}{D + l} \cdot 60}{\frac{v_s}{D + l} \cdot 60} = \frac{v_n}{v_s}. \quad (5.10)$$

W przypadku omawianych w niniejszym rozdziale układów filtrujących wydajność procesu kontroli ilości towarów paczkowanych prowadzonego z wykorzystaniem przyrządu pomiarowego wyposażonego w układ niestacjonarny, szacowana względem analogicznego przyrządu wyposażonego w klasyczny filtr stacjonarny, wzrasta zatem o 85%.

Warto dodać, iż przedstawioną w niniejszej rozprawie metodę filtracji można z powodzeniem zastosować w podobnych powtarzanych cyklicznie procesach pomiarowych, w tym m.in.: w automatycznych wagach kontrolujących ważących statycznie [26],[38] oraz w automatycznych wagach porcjujących [25],[37].

Rozdział 6

Podsumowanie

W pracy zaproponowano metodę filtracji sygnałów pomiarowych występujących w dynamicznych procesach ważenia prowadzonych z wykorzystaniem automatycznych wag kontrolujących, których konstrukcje oparte są o przenośnik taśmowy. Urządzenia te odgrywają istotną rolę w procesie kontroli ilości szerokiej gamy występujących na rynku towarów paczkowanych. Skrócenie, dzięki opracowanej metodzie filtracji, czasu trwania ważenia dynamicznego przy jednoczesnym zachowaniu wymaganej dokładności stanowiło główny postulat prezentowanej rozprawy, zawarty w jej tezie.

Dostrzeżono, iż niestacjonarność układu filtrującego przyczynia się do ograniczenia zachodzącego w układzie stanu przejściowego wywołanego niemal skokową zmianą składowej stałej sygnału pomiarowego, do jakiej dochodzi w trakcie ważenia dynamicznego. Z tego względu do realizacji procesu filtracji sygnałów pomiarowych zaproponowano wykorzystanie dyskretnego liniowego układu niestacjonarnego. Syntezy tegoż układu dokonano w rozdziale trzecim. Wykazano, że układ taki można traktować z jednej strony jako strukturę złożoną z zestawu stacjonarnych dolnoprzepustowych układów filtrujących o komplementarnych własnościach, z drugiej strony filtr ten posiada także równoważną postać rekurencyjną, tj. równanie różnicowe o zmiennych w czasie współczynnikach; można go zatem bez przeszkód zaimplementować w systemie mikroprocesorowym.

Rozważane w rozprawie zagadnienie filtracji umiejscowiono w dziedzinie czasu traktując przy tym proces filtracji jako proces wygładzania sygnału pomiarowego w układzie dynamicznym, jakim jest filtr. Przebieg tego procesu w sposób jednoznaczny wyznacza sekwencja kolejnych wartości współczynników równania różnicowego opisującego układ filtrujący lub równoważnie funkcja uzmienniająca układu. Wykazano, iż opracowany układ filtrujący jest układem stabilnym asymptotycznie oraz w sensie wejściowo-wyjściowym a także, iż z praktycznego punktu widzenia warunki stabilności układu nie nakładają na funkcję uzmienniającą żadnych ograniczeń. Sformułowano następnie problem optymalizacji rozumianego w powyższy sposób procesu filtracji, jako problem poszukiwania takiej funkcji uzmienniającej układu, aby układ ten realizował szczegółowy cel filtracji zdefiniowany w rozdziale drugim, tj. aby:

- a) w wyniku filtracji sygnałowi stanowiącemu odpowiedź układu nadane zostały cechy umożliwiające poprawne określenie wyniku pomiaru,

- b) odpowiedź układu w trakcie etapu ważenia ustaliła się z pewną dopuszczalną tolerancją wokół wskazania ostatecznego opowiadającego prawdziwej wartości masy m przedmiotu ważonego.

Sformułowany w powyższy sposób problem przeanalizowano w postaci sparametryzowanej. Przestrzeń poszukiwań wszystkich ciągów określających funkcję uzmienniającą układu ograniczono do rodziny czterech funkcji¹ zmiennych: ω_0 , ω_∞ i N_α , uwzględniono także możliwość doboru rzędu k układu filtrującego. Problem ten sprowadzono tym samym do zadania poszukiwania optymalnych wartości parametrów: ω_0 , ω_∞ , N_α i k , nazwanych w rozprawie zmiennymi decyzyjnymi. Optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych poszukiwano z wykorzystaniem przybliżonych metod optymalizacji, w tym:

- a) metody przeglądu na siatce omówionej w podrozdziale 4.5,
b) metody poszukiwań bezpośrednich opartej o algorytm sympleksów Neldera – Meada, omówionej w podrozdziale 4.7.

Istota poszukiwań sprowadzała się do wielokrotnej filtracji rzeczywistych sygnałów pomiarowych zarejestrowanych w trakcie przeprowadzonych wcześniej badań eksperymentalnych, realizowanej dla różnych wartości zmiennych decyzyjnych. Względem uzyskanych odpowiedzi układu filtrującego wyznaczono wartości kryterium wyrażającego dokładność uzyskanych w procesie filtracji wyników pomiaru oraz wartości kryterium odnoszącego się do czasu trwania pomiaru. Oba kryteria zdefiniowano z uwzględnieniem wymagań metrologicznych, jakie na automatyczne wagi kontrolujące nakładają obowiązujące przepisy prawne. W analogiczny sposób, wykorzystując wyłącznie metodę optymalizacji na siatce, wyznaczono również optymalne wartości parametrów stacjonarnego układu filtrującego, będącego odpowiednikiem opracowanego wcześniej układu niestacjonarnego. Wyznaczono w ten sposób dwa zestawy parametrów cechujące optymalny niestacjonarny układ filtrujący, opracowany w rozdziale trzecim, oraz optymalny stacjonarny układ filtrujący.

Skuteczność opracowanej metody filtracji zweryfikowano ostatecznie w rozdziale piątym, wykorzystując w tym celu sygnały pomiarowe zarejestrowane w trakcie przeprowadzonych wcześniej badań eksperymentalnych, różne jednak od tych, które wykorzystano przy poszukiwaniu optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych. W ramach weryfikacji ustalono maksymalną wartość prędkości v przenośników taśmowych, przy której niestacjonarny układ filtrujący poprawnie realizuje przywołany wcześniej szczegółowy cel filtracji. Wielkość ta wyniosła $1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Analogiczna wielkość charakteryzująca układ stacjonarny wyniosła $0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wykazano tym samym, iż wydajność procesu kontroli ilości towarów paczkowanych prowadzonego z wykorzystaniem przyrządu pomiarowego wyposażonego w niestacjonarny układ filtrujący wzrasta względem analogicznego przyrządu wyposażonego w klasyczny filtr stacjonarny o 85%. W zakresie prędkości v od $0,5$ do $0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, tj. w zakresie prędkości, dla którego oba porównywane układy poprawnie realizują szczegółowy cel filtracji, układ niestacjonarny cechowały nieznacznie niższe wartości błędów oraz wyraźnie krótsze czasy trwania ważenia dynamicznego. Dla prędkości wyższych niż $0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wyniki uzyskane w układzie niestacjonarnym były już znacząco lepsze od wyników,

¹Mowa tu o funkcjach (3.60) – (3.63), których wykresy przedstawiono na rysunku 3.2 umieszczonym na stronie 39.

jakie uzyskano w układzie stacjonarnym. Na podstawie uzyskanych wyników weryfikacji stwierdzono, iż zastosowanie dyskretnych liniowych układów filtrujących umożliwia znaczne, w odniesieniu do ich stacjonarnych odpowiedników, skrócenie czasu trwania pomiaru przy jednoczesnym zachowaniu określonej dokładności. Wykazano tym samym słuszność postawionej w rozprawie tezy.

Pomimo, że zasadniczy cel rozprawy został osiągnięty, wiele poruszonych w pracy kwestii pozostaje otwartych, warto je zatem zasygnalizować:

1. Funkcje uzmienniające, wyznaczające sekwencję kolejnych wartości współczynników równania różnicowego opisującego układ filtrujący, dobrane zostały a priori. Pomimo, że posiadały one zbliżone kształty, różnica wartości maksymalnej prędkości v przenośników taśmowych charakteryzująca niestacjonarny układ filtrujący o najlepszej i najgorszej funkcji uzmienniającej wyniosła $0,2 \frac{m}{s}$. Przypuszczalnie istnieje zatem dalsza możliwość poprawy wydajności ważenia dynamicznego, o ile tylko problem poszukiwania optymalnej funkcji uzmienniającej układu filtrującego udałoby się sformułować analitycznie, w bardziej ogólnej formie, najlepiej bez jakichkolwiek założeń co do równania opisującego daną funkcję.
2. We wstępie rozprawy stwierdzono, iż głównym źródłem zakłóceń występujących w trakcie ważenia dynamicznego są drgania mechaniczne, które objawiają się w widmie sygnału pomiarowego w postaci dominujących składowych harmonicznym. Z tego względu producenci modułów pomiarowych wag kontrolujących oprócz klasycznych filtrów dolnoprzepustowych stosują także filtry pasmowo-zaporowe oraz filtry selektywne (ang. *notch*), których charakterystyki widmowe uwzględniają dominujące źródła zakłóceń. Warto rozważyć zatem metody filtracji, w których niestacjonarny układ filtrujący współpracowałby z wymienionymi wcześniej układami filtrującymi.
3. Wynik ważenia zdefiniowano w rozprawie jako ostatnią próbkę odpowiedzi układu filtrującego przypadającą na etap ważenia dynamicznego. W literaturze dotyczącej poruszanej tematyki można napotkać także inne sposoby określania wyniku ważenia, w tym m.in.: maksymalną wartość odpowiedzi układu filtrującego występującą w trakcie prowadzenia pomiaru, czy wartość średnią sygnału występującego na wyjściu układu filtrującego w zadanym horyzoncie czasowym. Warto przeanalizować zatem możliwość dalszego zwiększenia wydajności ważenia dynamicznego poprzez zmianę sposobu określenia wyniku ważenia.

Wymienione powyżej problemy otwarte są tylko częścią pytań, jakie pojawiły podczas pracy nad niniejszą rozprawą. Niewykluczone, że staną się one przedmiotem przyszłych badań autora.

Bibliografia

- [1] „Rozporządzenie ministra gospodarki w sprawie zasadniczych wymagań dla przyrządów pomiarowych,” *Dziennik Ustaw* Nr 3/2007, poz. 27.
- [2] „Ustawa o towarach paczkowanych,” *Dziennik Ustaw* Nr 91/2009, poz. 740.
- [3] *International recommendation OIML R 87, Quantity of product in prepackages*, 2004.
- [4] *International recommendation OIML R 51-1, Automatic catchweighing instruments. Part 1: Metrological and technical requirements - Test*, 2006.
- [5] *International recommendation OIML R 76-1, Non-automatic weighing instruments. Part 1: Metrological and technical requirements - Tests*, 2006.
- [6] „IEEE standard for floating-point arithmetic,” *IEEE Std 754-2008*, pp. 1–58, August 2008.
- [7] H. Bahar and D. Horrocks, „Dynamic weight estimation using an artificial neural network,” *Artificial Intelligence in Engineering*, vol. 12, no. 1-2, pp. 135–139, 1998.
- [8] W. Balachandran, M. Halimic, M. Hodzic, M. Tariq, Y. Enab, and F. Cecelja, „Optimal digital control and filtering for dynamic weighing systems,” in *Proc. IEEE IMTC*, April 1995, pp. 293 – 298.
- [9] E. K. P. Chong and S. H. Zak, *An Introduction to Optimization (Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization)*. Wiley-Interscience, 2008.
- [10] G. Frantz and R. Simar, *Comparing Fixed- and Floating-Point DSPs*, 2004, dokumentacja techniczna Texas Instruments.
- [11] K. Fukuda, K. Yoshida, T. Kinugasa, S. Fujimoto, M. Kamon, Y. Kagawa, and T. Ono, „A new weighing method for checkweighers by using signal processing,” in *Proc. XIX IMEKO*, September 2009, pp. 373–378.
- [12] K. Fukuda, K. Yoshida, T. Kinugasa, M. Kamon, Y. Kagawa, and T. Ono, „A new method of mass measurement for checkweighers,” *Metrology and Measurement Systems*, vol. XVII, no. 2, pp. 151–162, 2010.
- [13] *Poradnik dotyczący organizacji systemu kontroli wewnętrznej ilości towaru paczkowanego*, Główny Urząd Miar, Czerwiec 2009.

- [14] M. Halimic and W. Balachandran, „Kalman filter for dynamic weighing system,” in *Proc. IEEE ISIE*, vol. 2, July 1995, pp. 786–791.
- [15] M. Halimic, W. Balachandran, and F. Cecelja, „Enhanced adaptive network fuzzy inference system in checkweighing systems performance improvement,” in *Proc. IEEE IMTC*, vol. 2, May 2003, pp. 1094–1097.
- [16] M. Halimic, W. Balachandran, F. Cecelja, and M. Tariq, „Adaptive deconvolution approach for estimating the input of checkweighing systems,” in *Proc. IEEE IMTC*, vol. 2, May 2003, pp. 1098–1101.
- [17] M. Halimic, W. Balachandran, and Y. Enab, „Fuzzy logic estimator for dynamic weighing system,” in *Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, vol. 3, September 1996, pp. 2123–2129.
- [18] M. Halimic, W. Balachandran, M. Hodzic, and F. Cecelja, „Performance improvement of dynamic weighing systems using linear quadratic Gaussian controller,” in *Proc. IEEE IMTC*, vol. 2, May 2003, pp. 1537–1540.
- [19] M. Halimic, A. Halimic, S. Zugail, and Z. Huneiti, „Intelligent signal processing for electro-mechanical systems,” in *Proc. ISMA*, May 2008, pp. 1–5.
- [20] N. Huang and J. Aggarwal, „Synthesis and implementation of recursive linear shift-variant digital filters,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 30, no. 1, pp. 29–36, January 1983.
- [21] N.-C. Huang and J. Aggarwal, „On linear shift-variant digital filters,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 27, no. 8, pp. 672–679, August 1980.
- [22] M. Jafaripanah, B. Al-Hashimi, and N. White, „Application of analog adaptive filters for dynamic sensor compensation,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 54, no. 1, pp. 245–251, February 2005.
- [23] M. Jaskula and R. Kaszyński, „Using the parametric time-varying analog filter to average-evoked potential signals,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 53, no. 3, pp. 709–715, June 2004.
- [24] T. Kaneko, „Limit-cycle oscillations in floating-point digital filters,” *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. 21, no. 2, pp. 100–106, April 1973.
- [25] A. Kaszkin, R. Kaszyński, P. Pietrzak, and W. Stiehl, *Method and Apparatus for Gravimetrically Metering Pourable or Flowable Material to be Weighed*, Europejski wniosek patentowy EP20060012230, Czerwiec 2006.
- [26] A. Kaszkin, P. Pietrzak, and W. Stiehl, *Checkscales and Method for Checkweighing*, Europejski wniosek patentowy EP20060012226, Czerwiec 2006.

- [27] R. Kaszyński, „The parametric filter of signal constant component,” in *Proc. IEEE ISCAS*, vol. 1, 2001, pp. 200–203.
- [28] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, „Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions,” *SIAM Journal of Optimization*, vol. 9, pp. 112–147, 1998.
- [29] J. Larimer and D. Chen, „Fixed or floating? a pointed question in DSPs,” *EDN Magazine*, August 1995.
- [30] T.-Y. Leou and J. Aggarwal, „Recursive implementation of LTV filters; frozen-time transfer function versus generalized transfer function,” *Proc. IEEE*, vol. 72, no. 7, pp. 980–982, July 1984.
- [31] R. Maier and G. Schmidt, „Integrated digital control and filtering for an electro-dynamically compensated weighing cell,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 38, no. 5, pp. 998–1003, October 1989.
- [32] M. McGuinness, D. Jenkins, and G. Senaratne, „Modelling the physics of high-speed weighing,” Mathematics in Industry Information Service, Tech. Rep., 2005.
- [33] J. Nelder and R. Mead, „A simplex method for function minimization,” *The Computer Journal*, vol. 7, no. 4, pp. 308–313, January 1965.
- [34] M. Niedzwiecki and A. Wasilewski, „Application of adaptive filtering to dynamic weighing of vehicles,” *Control Engineering Practice*, vol. 4, no. 5, pp. 635–644, 1996.
- [35] A. Oppenheim and R. Schaffer, *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 1975.
- [36] S. Peters and M. Fahmy, „Synthesis of recursive LTV digital filters using the frozen-time approximation,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 36, no. 3, pp. 448–451, March 1989.
- [37] P. Pietrzak, „Koncepcja szybkiej filtracji sygnałów wagowych z wykorzystaniem filtrów parametrycznych,” *PAK*, vol. 53, no. 9, pp. 134–137, 2007.
- [38] —, „Fast filtration method for static automatic catchweighing instruments using a nonstationary filter,” *Metrology and Measurement Systems*, vol. XVI, no. 4, pp. 669–676, 2009.
- [39] —, „Dynamic mass measurement using a discrete time-variant filter,” in *Proc. IEEE IEEEI*, November 2010, pp. 151–155.
- [40] J. Piskorowski, „On problems of compensated continuous-time Chebyshev filters in the time domain,” in *Proc. IEEE ISCAS*, May 2007, pp. 2228–2231.
- [41] J. Piskorowski and T. Barcinski, „Dynamic compensation of load cell response: A time-varying approach,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, no. 7, pp. 1694–1704, 2008.

- [42] J. Piskorowski and M. de Anda, „A new class of continuous-time delay-compensated parameter-varying low-pass elliptic filters with improved dynamic behavior,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, vol. 56, no. 1, pp. 179–189, January 2009.
- [43] J. Piskorowski and R. Kaszyński, „A non-standard method of signals filtering in systems containing analog multiplexers,” in *Proc. IEEE ISIE*, June 2007, pp. 1751–1754.
- [44] R. Rabenstein and R. Czarnach, „Stability of recursive time-varying digital filters by state vector transformation,” *Signal Processing*, vol. 8, no. 1, pp. 75–92, 1985.
- [45] H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*. PWN, 2007.
- [46] P. Regalia, *Adaptive IIR Filtering in Signal Processing and Control (Electrical and Computer Engineering)*. CRC Press, 1994.
- [47] Y. Sasamoto, T. Umemoto, M. Adachi, and Y. Kagawa, „Frequency analysis method using the adaptive algorithm and application to dynamic measurement of mass and weight,” in *Proc. SICE*, September 2007, pp. 37–41.
- [48] R. Schwartz, „Automatic weighing-principles, applications and developments,” in *Proc. XVI IMEKO*, September 2000, pp. 259–267.
- [49] W.-Q. Shu, „Dynamic weighing under nonzero initial conditions,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 42, no. 4, pp. 806–811, August 1993.
- [50] W. Spendley, G. R. Hext, and F. R. Himsworth, „Sequential application of simplex designs in optimisation and evolutionary operation,” *Technometrics*, vol. 4, no. 4, pp. 441–461, November 1962.
- [51] M. Tariq, W. Balachandran, and S. Song, „Checkweigher modeling using dynamical subsystems,” in *Proc. IEEE IAS*, vol. 2, October 1995, pp. 1715–1722.
- [52] R. Tasaki, T. Yamazaki, H. Ohnishi, M. Kobayashi, and S. Kurosu, „Development of continuous weighing by multi-stage conveyor belt scale,” in *Proc. SICE*, vol. 1, August 2004, pp. 813–818.
- [53] —, „Continuous weighing on a multi-stage conveyor belt with FIR filter,” *Measurement*, vol. 40, no. 7-8, pp. 791–796, 2007.
- [54] T. Umemoto, T. Doi, and K. Terashita, „Dynamic mass measurement by the frequency estimation method used the frequency analysis type adaptive algorithm,” in *Proc. SICE*, vol. 1, August 2004, pp. 198–203.
- [55] *Guide for packers and importers of e-marked prepacked products*, WELMEC, 2005.
- [56] Y. Yamakawa, T. Yamazaki, J. Tamura, and O. Tanaka, „Dynamic behaviors of a checkweigher with electromagnetic force compensation,” in *Proc. XIX IMEKO*, September 2009, pp. 208–211.

-
- [57] T. Yamazaki and T. Ono, „Dynamic problems in measurement of mass-related quantities,” in *Proc. SICE*, September 2007, pp. 1183–1188.
 - [58] T. Yamazaki, Y. Sakurai, H. Ohnishi, M. Kobayashi, and S. Kurosu, „Continuous mass measurement in checkweighers and conveyor belt scales,” in *Proc. SICE*, vol. 1, August 2002, pp. 470–474.
 - [59] T. Yamazaki, R. Tasaki, H. Ohnishi, M. Kobayashi, and S. Kurosu, „Continuous weighing by multi-stage conveyor belt scale,” in *Proc. SICE*, vol. 3, August 2003, pp. 2533–2538.