

ANALIZA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA UKŁADU ZMIENNEGO W CZASIE - ALGORYTM I PRZYKŁADY [†]

Przemysław ORŁOWSKI *

* Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny

ul. Sikorskiego 37, 70-313 Szczecin, e-mail: orzel@ps.pl, <http://orzel.ps.pl/>

Streszczenie: W artykule zaproponowano nowe narzędzie oraz metodę do analizy układów niestacjonarnych dyskretnych w dziedzinie częstotliwości. W części teoretycznej zamieszczono najważniejsze twierdzenia i definicje wraz z dowodami oraz wynikający z nich algorytm do aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych dla układów niestacjonarnych. Stosowane podejście bazuje na dekompozycji singularnej operatora układu, dyskretnej transformacji Fouriera i własnościach gęstości widmowej mocy. Wynikiem analizy jest funkcja przejścia dana w postaci zbioru częstotliwości wraz z odpowiadającym im zespolonym wektorem przejścia. Dla układów stacjonarnych funkcja ta pokrywa się z klasycznym odpowiednikiem – charakterystyką Bode’go i Nyquista. W końcowej części artykułu pokazano kilka przykładów charakterystyk dla różnych układów niestacjonarnych.

Słowa kluczowe: Układy niestacjonarne, układy dyskretne, analiza częstotliwościowa.

1. WPROWADZENIE

Analiza częstotliwościowa stanowi ważne narzędzie do badania własności układów liniowych, stacjonarnych. Niestety dobrze znane metody nie mogą być w prosty sposób przeniesione na układy niestacjonarne. Pierwsze próby rozszerzenia narzędzi częstotliwościowych do analizy układów niestacjonarnych liczą sobie przeszło pół wieku [9]. Zaproponowane tam podejście opierało się na rozszerzeniu transformaty Laplace’a do zmiennej odpowiedzi impulsowej poprzez wprowadzenie dodatkowego parametru w dziedzinie czasu. W wyniku otrzymuje się funkcję przejścia układu $S(\nu, \tau)$ zależną od 2 zmiennych odpowiadających przesunięciu częstotliwości i przesunięciu czasowemu. Podejście to stosuje obecnie m.in. Kozek [5] pod nazwą analizy częstotliwościowo-czasowej (time-frequency analysis). Inną formą stosowaną dla układów niestacjonarnych jest analiza wartości pseudomodalnych [7], [6]. W jej wyniku otrzymuje się zależność modów układu od czasu.

Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie nowego podejścia do problemu opisu układu niestacjonarnego w dziedzinie częstotliwości. Jego cechą charakterystyczną jest kompatybilność z klasycznymi wynikami otrzymywanymi dla układów stacjonarnych. Rezultatem tej analizy jest zbiór punktów charakterystyki Nyquista lub Bodego, przy czym dla układów niestacjonarnych powinien on być traktowany jedynie jako przybliżenie.

Oczywisty jest też fakt, iż tak znaczne uproszczenie, do 1-wymiarowej funkcji przejścia może w pewnych przypadkach ograniczać stosowalność oraz będzie miało wpływ na własności proponowanej metody.

Stosowane w niniejszej pracy podejście stanowi połączenie 3 znanych przekształceń układu dynamicznego oraz ich własności. Model układu niestacjonarnego w przestrzeni stanu zamieniany jest na odpowiadający mu opis operatorowy (sekcja 2), następnie dokonuje się dekompozycji singularnej (SVD) operatora wejściowo-wyjściowego układu (sekcja 3) oraz dyskretnej transformaty Fouriera wektorów własnych układu otrzymanych w wyniku SVD (sekcja 5). Uwzględniając własności gęstości widmowej mocy i ważone sumowanie przetworzonych wektorów możliwe jest wyznaczenie aproksymowanej charakterystyki częstotliwościowej (sekcja 6).

2. MODEL UKŁADU

Liniowy dynamiczny, dyskretny układ niestacjonarny może być opisany układem równań różnicowych w przestrzeni zmiennych stanu.

$$\mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{A}(k) \cdot \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{B}(k) \cdot \mathbf{v}_p(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_p(k) = \mathbf{C}(k) \cdot \mathbf{x}_p(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{x}_p(0) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{x}_p(\cdot) \in (\mathbb{R}^n)^N$, $\mathbf{v}_p(\cdot) \in (\mathbb{R}^m)^N$, $\mathbf{y}_p(\cdot) \in (\mathbb{R}^p)^N$ są odpowiednio stamen, wejściem i wyjściem układu, natomiast $\mathbf{A}(k) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{B}(k) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{C}(k) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ są macierzami układu

Równoważnie układ może być zapisany przy pomocy operatora ewolucyjnego lub macierzowego. Dla operatora ewolucyjnego wyjście układu przy zerowych warunkach początkowych można opisać następująco.

$$\mathbf{y}_p(k) = (\hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{B}}[\mathbf{v}_p(\cdot)])(k) = \mathbf{C}(k) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-2} \left[\prod_{j=i+1}^{k-1} \mathbf{A}(j) \right] \cdot \mathbf{B}(i) \mathbf{v}_p(i) + \mathbf{B}(k-1) \mathbf{v}_p(k-1) \right) \quad (3)$$

Natomiast pełny opis wyjścia układu dla operatora macierzowego jest następujący

$$\hat{\mathbf{y}}_p = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_p + \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x}_0 \quad (4)$$

Operator $\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}$ jest ograniczony i odwzorowuje sygnał $\mathbf{v}(k) \in \mathcal{V} = l_2[0, N]$ w sygnał $y \in \mathcal{Y}$.

Macierze powyższego operatora są określone następująco:

$$\hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \phi_1^1 & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \phi_1^{N-2} & \dots & \phi_{N-2}^{N-2} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \phi_0^0 \\ \vdots \\ \phi_0^{N-2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdzie

$$\phi_i^k = \mathbf{A}(k) \cdot \mathbf{A}(k-1) \cdot \dots \cdot \mathbf{A}(i) \quad (6)$$

a operatory macierzowe $\hat{\mathbf{B}}$ and $\hat{\mathbf{C}}$ przyjmują postać diagonalną.

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}(N-1) \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}(N-1) \end{bmatrix} \quad (7)$$

przy czym wektory $\mathbf{x}_p(\cdot)$, $\mathbf{y}_p(\cdot)$, $\mathbf{v}_p(\cdot)$ są zapisane w notacji kolumnowej blokowej.

$$\hat{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p(0) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_p(N-1) \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{y}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_p(0) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_p(N-1) \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{v}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p(0) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_p(N-1) \end{bmatrix} \quad (8)$$

3. TWIERDZENIA O ROZKŁADZIE

Elementy analizy częstotliwościowej, wprowadzone w niniejszej pracy opierają się głównie na dekompozycji singularnej (Singular Value Decomposition - SVD) operatorów układu. Dekompozycja taka jest uogólnieniem klasycznej dekompozycji singularnej macierzy [4]. Jest to możliwe dlatego, że operatory definiowane dla układów dyskretnych na skończonym horyzoncie czasowym są skończenie wymiarowe.

Podobnie jak w algebrze liniowej, SVD dekomponuje operator na odpowiadające mu zbiory wartości singularnych σ_i wektorów singularnych wejściowych $\mathbf{v}_i$ oraz wyjściowych $\mathbf{u}_i$. Dowolna zespolona lub rzeczywista macierz $\mathbf{X}$ może być zapisana jako iloczyn trzech macierzy $\mathbf{X} = \mathbf{U} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{V}^*$, gdzie $\Sigma = \text{diag}(\sigma_i)$ jest macierzą diagonalną, a macierze ortonormalne $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ są złożone z kolumnowych wektorów, odpowiednio $\mathbf{u}_i$ i $\mathbf{v}_i$.

Poniżej podano dwa twierdzenia, które posłużą dalej do zdefiniowania charakterystyk w dziedzinie częstotliwości dla układów niestacjonarnych.

4. TWIERDZENIA O UKŁADZIE ZDEKOMPONOWANYM

Twierdzenie 1. Dla układu, dla którego dokonano dekompozycji singularnej $\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T = \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$, na wejście którego podano sygnał $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_i$ równy i -tej kolumnie macierzy $\mathbf{V}$, odpowiedź układu $\mathbf{y}_v = \sigma_i \cdot \mathbf{u}_i$ jest równa iloczynowi i -tej wartości singularnej oraz i -tej kolumny macierzy $\mathbf{U}$.

Twierdzenie 2. Dla układu, dla którego dokonano dekompozycji singularnej $\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{V}_0^T = \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{N}}$, przy warunkach początkowych $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_i$ równych i -tej kolumnie macierzy $\mathbf{V}_0$, odpowiedź swobodna układu $\mathbf{y}_v = \sigma_i \cdot \mathbf{u}_i$ jest równa iloczynowi i -tej wartości singularnej oraz i -tej kolumny macierzy $\mathbf{U}$.

Dowody twierdzeń 1-2 wynikają z ortonormalności macierzy $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ i własności SVD.

5. TWIERDZENIA O TRANSFORMACIE

Jednoznaczne wyznaczenie charakterystyki amplitudowej $|G(\omega_k)|$ jest możliwe wówczas, gdy znane są widma wejściowe i wyjściowe gęstości mocy układu. Korzystając z dekompozycji singularnej operatora układu można udowodnić następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3. Dyskretne widmo gęstości mocy dla dowolnej ortonormalnej macierzy powstałej wskutek dekompozycji singularnej, liczone jako suma widmowych gęstości mocy poszczególnych kolumn macierzy $\{\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_{ij}\}, i, j=1 \dots N\}$ jest równe $S(\omega_k) = 1$.

$$\begin{aligned} S_v(\omega_k) &= \sum_{j=1}^N S_j(\omega_k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N |\text{DFT}_k[\mathbf{v}_j]|^2 \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left| \sum_{n=1}^N v_{ni} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N} \right|^2 = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

where $\omega_k = \frac{k}{2 \cdot T_p \cdot N}$, T_p – sampling period.

Dowód twierdzenia wynika bezpośrednio z ortonormalności macierzy rozkładu SVD [4] oraz własności transformaty DFT, która jest transformatą unitarną. Spełnione jest wówczas równanie:

$$|\text{DFT}_k[\mathbf{v}_j]|^2 = 1 \quad (10)$$

zatem

$$S(\omega_k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N 1 = 1 \quad (11)$$

co dowodzi powyższego twierdzenia.

Twierdzenie 4. Wyjściowe widmo gęstości mocy może być obliczone jako suma widmowych gęstości mocy poszczególnych kolumn macierzy będącej iloczynem macierzy $\mathbf{U} \cdot \mathbf{S}$. Można to zapisać następująco

$$S_y(\omega_k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N |\text{DFT}_k[\mathbf{u}_j \cdot S_{jj}]|^2$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left| \sum_{n=1}^N u_{ni} \cdot \sigma_i \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N} \right|^2 \quad (12)$$

where $\omega_k = \frac{k}{2 \cdot T_p \cdot N}$, T_p – sampling period, $\sigma_i = s_{ii}$ – i –

singular value of $\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T = \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$ decomposition.

Dowód twierdzenia wynika z własności SVD, w szczególności z ortonormalności macierzy $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$.

Wyprowadzenie zależności, które umożliwiają wyznaczenie charakterystyk: amplitudowej i fazowej dla niestacjonarnych układów dyskretnych wymaga posłużenia się gęstością widmową mocy. Związek gęstości widmowej mocy z charakterystyką amplitudową układu wyraża się następująco:

$$S_y(\omega_k) = |G(\omega_k)|^2 \cdot S_v(\omega_k) \quad (13)$$

gdzie $S_y(\omega_k)$, $S_v(\omega_k)$ oznaczają odpowiednio wyjściowe i wejściowe widmo gęstości mocy układu.

6. APROKSYMACJA CHARAKTERYSTYK CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH

Wyznaczenie charakterystyk Bodego sprowadza się do wyznaczenia charakterystyki amplitudowej $|G(\omega_k)|$ oraz charakterystyki fazowej $\varphi(\omega_k) = \arg(G(\omega_k))$. Charakterystykę amplitudową można uzyskać podstawiając zależność (11) do równania (13). Obustronne pierwiastkowanie daje w rezultacie:

$$|G(\omega_k)| = \sqrt{S_y(\omega_k)} \quad (14)$$

Po podstawieniu zależności (12) można ostatecznie zapisać

$$|G(\omega_k)| = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N \sigma_j^2 \cdot |\text{DFT}_k[\mathbf{u}_j]|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left| \sigma_i \cdot \sum_{n=1}^N u_{ni} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N} \right|^2} \quad (15)$$

co jednoznacznie definiuje charakterystykę amplitudową.

Przez analogię do charakterystyki amplitudowej zależność aproksymująca charakterystykę fazową może być zapisana w sposób następujący:

$$\varphi(\omega_k) = \arg \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j \cdot \frac{\text{DFT}_k[\mathbf{u}_j]}{\text{DFT}_k[\mathbf{v}_j]} \right)$$

$$= \arg \left(\sum_{i=1}^N \left(\sigma_i \cdot \frac{\sum_{n=1}^N u_{ni} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N}}{\sum_{n=1}^N v_{ni} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot (n-1) / N}} \right) \right) \quad (16)$$

Wartości singularne σ_i pełnią w zależnościach 15-16 funkcję wag.

Wyprowadzone zależności są prawdziwe zarówno dla układów stacjonarnych jak i niestacjonarnych. Charakterystyki wyznaczone podaną metodą dla układów stacjonarnych przy skończonym horyzoncie czasowym są bliskie charakterystykom Bodego wyznaczonym klasycznie przez podstawienie w transformacie $z = \exp(j \cdot \omega \cdot T_p)$. Trudno jest o porównanie dla układów niestacjonarnych. Funkcja przejścia zdefiniowana w pracy i udoskonalana przez następców [1], [2], [3], [5] jest określona na nieskończonym horyzoncie czasowym. Nieco łatwiej jest o porównanie rezultatów z wynikami analizy parametrów pseudo modalnych [7], [6]. Niemniej jednak analiza SVD-DFT jest bardziej kompleksowa gdyż uwzględnia mogące występować nie tylko zjawisko przesuwania się biegunów ale również zjawisko przesuwania się zer i wzmocnienia układu.

7. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Poniżej dokonano analizy kilku stanów pracy układu zmiennej struktury o charakterze oscylacyjno-inercyjnym. Układ jest opisany modelem w przestrzeni stanu (1-2), przy czym macierze układu przyjmują następujące wartości.

(I) charakter oscylacyjny układu

$$\mathbf{A}_I = \begin{bmatrix} -0.21 & 0.66 & -0.31 \\ -0.57 & -0.21 & -0.49 \\ 0.45 & 0.35 & -0.27 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} -0.95 \\ 0 \\ -1.19 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_I = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.47 \\ 0.056 \end{bmatrix}^T$$

(II) charakter inercyjny układu

$$\mathbf{A}_{II} = \begin{bmatrix} 0.071 & 0.25 & 0.14 \\ -0.25 & -0.18 & -0.35 \\ 0.14 & -0.35 & -0.23 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{II} = \begin{bmatrix} -1.17 \\ -0.46 \\ -0.26 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{II} = \begin{bmatrix} -1.21 \\ -1.32 \\ 0.93 \end{bmatrix}^T$$

Okres próbkowania wynosi 0.04 s. W dalszej części zostaną przedstawione rezultaty otrzymane dla analizy metodą SVD-DFT opisaną we wcześniejszych sekcjach niniejszej pracy dla trzech różnych stanów pracy układu, a w szczególności metod przejścia pomiędzy stanami (I) i (II) układu.

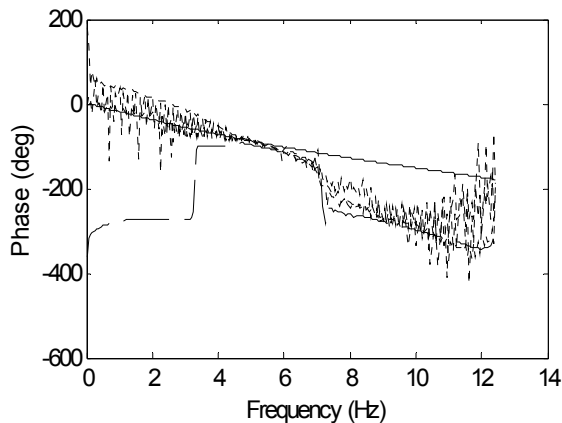
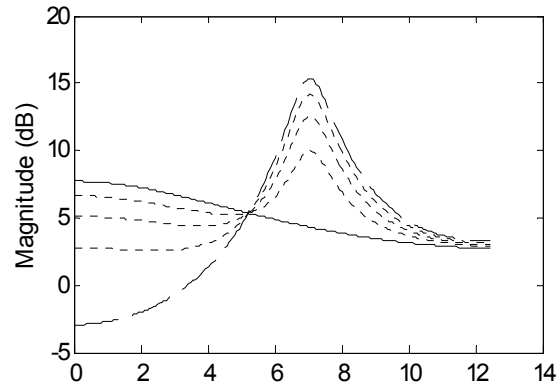
7.1. Przejście skokowe oscylacyjno-inercyjne

Zmiana struktury układu następuje jednorazowo podczas całego horyzontu analizy $N=400$ kroków i odbywa się w sposób skokowy w pewnym ustalonym z góry

momencie czasu N_p . Można to zapisać przy pomocy następującego modelu matematycznego:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_I, \mathbf{B}(k) = \mathbf{B}_I, \mathbf{C}(k) = \mathbf{C}_I & \text{dla } k \leq N_p \\ \mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_{II}, \mathbf{B}(k) = \mathbf{B}_{II}, \mathbf{C}(k) = \mathbf{C}_{II} & \text{dla } k > N_p \end{cases} \quad (17)$$

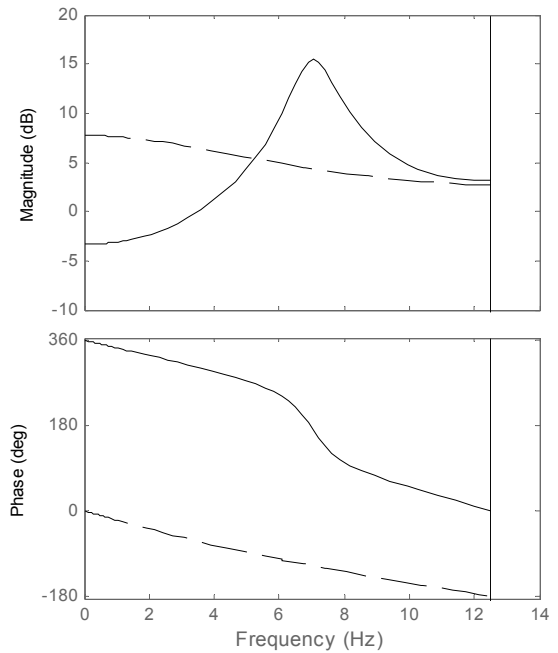
Rys. 1 przedstawia charakterystyki amplitudowe i fazowe układu wyznaczone proponowaną metodą SVD-DFT dla 5 różnych wartości N_p równych odpowiednio 1 – linia ciągła, 100, 200, 300 – linie kropkowane, 399 – linia przerywana.



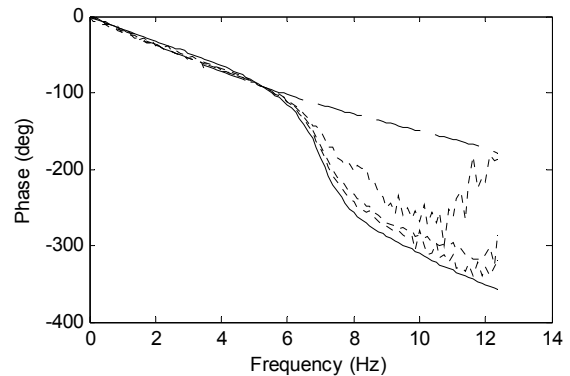
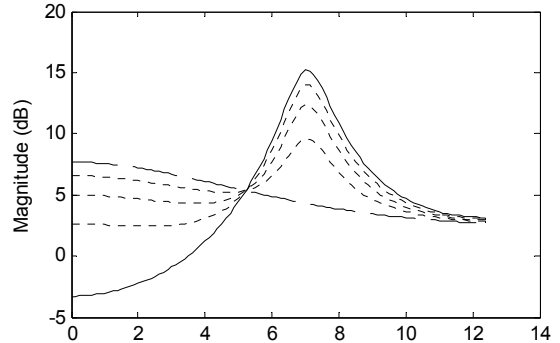
Rys. 1. Aproxymowane charakterystyki Bode'go dla przejścia skokowego oscylacyjno-inercyjnego.

W zależności od wartości parametru N_p następuje przejście pomiędzy kolejnymi charakterystykami, przy czym dla odpowiednio dużego horyzontu czasowego przejście to jest niemal płynne, szczególnie dla charakterystyki amplitudowej.

Dla ekstremalnych wartości parametru N_p (1, 399) otrzymane charakterystyki są zbieżne do klasycznych charakterystyk dla układu stacjonarnego wykreślonych dla porównania na rys. 2. Dla pośrednich wartości N_p na charakterystyce fazowej daje się zauważyć oscylacje charakterystyczne dla układu niestacjonarnego.



Rys. 2. Charakterystyki Bode'go dla układów stacjonarnych (I)-oscylacyjnego linia ciągła i (II)-inercyjnego linia przerywana.



Rys. 3. Aproxymowane charakterystyki Bode'go dla przejścia skokowego inercyjno- oscylacyjnego.

7.2. Przejście skokowe inercyjno-oscylacyjne

Interesująca może być zamiana kolejności zmiany struktury. Można domniemywać, że powinna ona również wywołać pewne zmiany na charakterystykach układu.

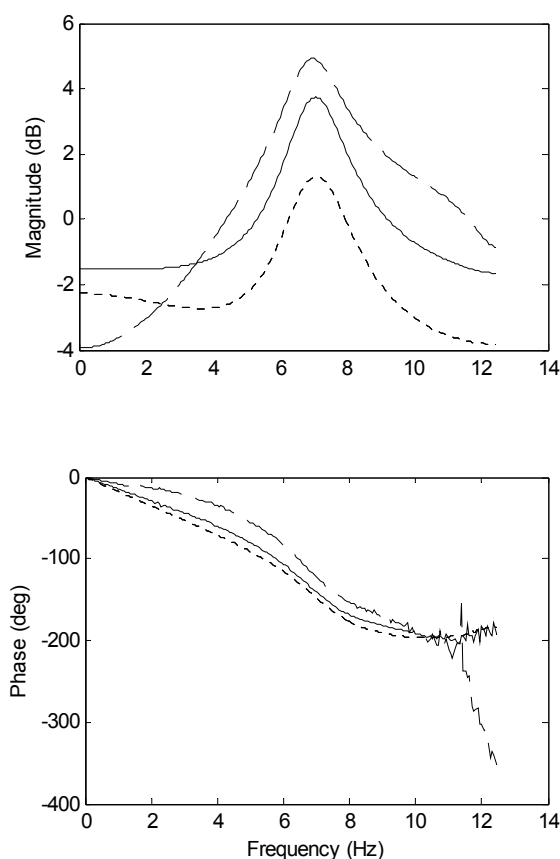
Model matematyczny układu można zapisać następująco:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_{II}, \mathbf{B}(k) = \mathbf{B}_{II}, \mathbf{C}(k) = \mathbf{C}_{II} & \text{dla } k \leq N_p \\ \mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_I, \mathbf{B}(k) = \mathbf{B}_I, \mathbf{C}(k) = \mathbf{C}_I & \text{dla } k > N_p \end{cases} \quad (18)$$

Na rys. 3 wykreślono aproksymowane charakterystyki Bode'go dla tego układu. Horyzont czasowy wynosi tym razem $N=200$ kroków. Momenty przełączeń N_p są odpowiednio równe 1 – linia ciągła, 50, 100, 150 – linie kropkowane, 199 – linia przerywana. Spodziewane zmiany można zauważyć na charakterystyce fazowej, podczas gdy charakterystyka amplitudowa pozostała praktycznie nie zmieniona.

7.3. Przejście płynne inercyjno-oscylacyjne

W tym przypadku zmiana struktury macierzy układu ma charakter płynny. Możliwych przypadków jest oczywiście bardzo dużo, przy czym rozważono 3 następujące: liniowy ($r=1$), kwadratowy ($r=2$) i pierwiastkowy ($r=0.5$).



Rys. 4. Aproksymowane charakterystyki Bode'go dla przejścia płynnego inercyjno-oscylacyjnego.

Opis matematyczny modelu jest następujący:

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \left(\frac{N-k}{N-1} \right)^r, \quad \beta(k) = \left(\frac{k-1}{N-1} \right)^r \\ \mathbf{A}(k) &= \alpha(k) \cdot \mathbf{A}_I + \beta(k) \cdot \mathbf{A}_{II} \\ \mathbf{B}(k) &= \alpha(k) \cdot \mathbf{B}_I + \beta(k) \cdot \mathbf{B}_{II} \\ \mathbf{C}(k) &= \alpha(k) \cdot \mathbf{C}_I + \beta(k) \cdot \mathbf{C}_{II} \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie $k = 1, 2, \dots, N$, $N = 400$, $r = 1, 2, 0.5$.

Wyznaczone charakterystyki przedstawia rys. 4. Przejście liniowe wykreślono linią ciągłą, przejście kwadratowe linią kropkowaną, natomiast przejście pierwiastkowe linią przerywaną. W tym przypadku trudniej o porównanie z przypadkiem stacjonarnym, można jednak zauważyć, że zmiana parametru r zdecydowanie mniej wpływa na charakterystykę fazową niż w przypadku zmiany parametru N_p w dwóch poprzednich przykładach.

8. PODSUMOWANIE

Przedstawione w pracy metody umożliwiają w prosty sposób wyznaczenie przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych dla układów niestacjonarnych dyskretnych. Z uwagi, że są one jedynie przybliżeniem i uproszczeniem rzeczywistości, powinny być traktowane jako użyteczne, aczkolwiek jedynie przybliżone narzędzie do badania układów zmiennych w czasie. Mogą one również posłużyć do oceny stopnia niestacjonarności układu co szerzej omówiono w [8].

FREQUENCY ANALYSIS OF TIME VARYING SYSTEM – ALGORITHM AND EXAMPLES

Abstract: The paper develops new frequency analysis tools for linear time-varying (LTV), discrete-time systems. The paper begins from theoretical introduction with the most important definitions, theorems, proofs and algorithm for approximation of Bode frequency diagrams for LTV systems. The main method is based on the properties of the Singular Value Decomposition (SVD), Discrete Fourier Transform (DFT) and Power Spectral Density (PSD). The result of analysis is transfer function given as set of frequencies and corresponding complex transfer values. For linear time invariant (LTI) systems the function gives results identical to their classical equivalents: Bode and Nyquist diagrams. Numerical examples of LTV systems illustrate how the algorithm works in practise. The most important features in each example are characterized on the basis of two estimated diagrams: magnitude and phase.

Literatura

- [1] Bello P.A. (1963). Characterisation of randomly time-variant linear channels. IEEE Trans. Comm. Syst., 11, 360-393.

- [2] Coates M. (1998). Time-frequency modelling. University of Cambridge. Ph.D. Thesis
- [3] Debnath L., Ed. (2001). Wavelet Transforms and Time-Frequency Signal Analysis. Birkhauser. Boston.
- [4] Golub, G.H. Van Loan, C.F. (1983). *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland.
- [5] W. Kozek (1997). On the generalized transfer function calculus for underspread LTV channels. IEEE Trans. Signal Proc. 45, 219-223.
- [6] Liu, K. (1999). *Extension of modal analysis to linear time-varying systems*. Journal of Sound and Vibration **226**, 149-167.
- [7] Maia, N. M. M., Silva J. M. M. (1997). *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. New York. John Wiley&Sons Inc.
- [8] Orłowski P. (2004). *Selected problems of frequency analysis for time-varying discrete-time systems using singular value decomposition and discrete Fourier transform*. Journal of Sound and Vibration. Vol. **278**, pp. 903-921.
- [9] Zadeh, L. A. (1950). *Frequency analysis of variable networks*. Proceedings of the Institute of Radio Engineers. **38**, 291-299.