

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Instytut Inżynierii Chemicznej i Chemii Fizycznej

Stanisław Masiuk

DYNAMIKA PROCESOWA

II

SZCZECIN 1990

2001-10-09

127486-02 W

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Instytut Inżynierii Chemicznej i Chemii Fizycznej

Stanisław Masiuk

DYNAMIKA PROCESOWA

II

SZCZECIN 1990

Nr syst. 25323
zam. 1869



W.127486

Recenzent

MŚCISŁAW PADEREWSKI

Opracowanie redakcyjne

Barbara Borowy

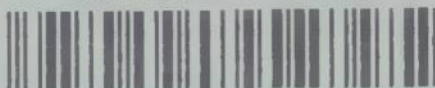
Wydane za zgodą

Rektora Politechniki Szczecińskiej

z dnia 29.03.90.

Biblioteka Główna
Politechniki Szczecińskiej

W. 127486



012-127486-02-0

WYDAWNICTWO UCZELNIANE POLITECHNIKI SZCZECIŃSKIEJ

Wyd. II. poprawione. Nakład 150+3 egz. Ark.wyd. 13.Ark.druk.
15,2. Papier offsetowy kl. III. 71g B₁. Oddano do druku
29.03.90 r. Druk ukończono w maju 1990 r. Zam. nr 209/90.

cena zł 4.200,-

ZAKŁAD POLIGRAFICZNY POLITECHNIKI SZCZECIŃSKIEJ "Z A P O L"

71 - 065 SZCZECIN, AL. PIASTÓW 42a

Z. 443/2000

SPIS TREŚCI

Przedmowa	7
Wykaz ważniejszych oznaczeń	9
4. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE NIEUSTALONE JEDNOWYMIAROWE	
0 PARAMETRACH SKUPIONYCH. WYMUSZENIA STOCHASTYCZNE . . .	11
4. 1. Wstęp	11
4. 2. Praktyczne kryteria własności nieustalonych procesu. .	11
4. 3. Charakterystyki statystyczne procesu stochastycznego .	13
4.3.1. Operatory uśrednienia	13
4.3.2. Funkcje rozkładu prawdopodobieństwa i całkowa oraz różniczkowa	14
4.3.3. Elementy teorii korelacyjnej	19
4.3.3.1. Nadzieja matematyczna	20
4.3.3.2. Dyspersja	22
4.3.3.3. Funkcje korelacyjne	23
4.3.3.4. Przedsiał korelacji	26
4.3.3.5. Rozkład kanoniczny procesu stochastycznego . .	27
4.3.4. Funkcja strukturalna	28
4.3.5. Analiza widmowa	29
4.3.5.1. Gęstość widmowa	29
4.3.5.2. Pasmo efektywne widma mocy	33
4. 4. Zasada uogólniona Wienera-Chinchina	34
4. 5. Ergodyczność procesów stochastycznych nieustalonych .	35
4. 6. Operatory stosowane w analizie procesów stochastycznych	38
4. 7. Dokładność wyznaczenia charakterystyk statystycznych .	41
4. 8. Typy procesów stochastycznych nieustalonych	42
4. 9. Estymacja charakterystyk statystycznych procesów stochastycznych nieustalonych	47
4.9.1. Estymacja charakterystyk probabilistycznych	48
4.9.2. Estymacja nadziei matematycznej	51
4.9.3. Estymacja dyspersji	53
4.9.4. Estymacja funkcji korelacji własnej	53
4.9.5. Estymacja funkcji korelacji wzajemnej	56
4.9.6. Estymacja gęstości widmowej	58
4.10. Aproksymacja charakterystyk statystycznych	60
4.11. Wymuszenie stochastyczne	64
4.12. Przejście procesu stochastycznego przez obiekt dyna- miczny liniowy nieustalony	66
4.12.1. Zależność pomiędzy procesami $\mu(t)$ oraz $\eta(t)$. . .	66
4.12.2. Nadzieja matematyczna procesu wyjściowego	68
4.12.3. Funkcja korelacyjna procesu wyjściowego	69
4.12.4. Dyspersja procesu wyjściowego	71
4.12.5. Gęstość widmowa procesu wyjściowego	73

4.13. Równanie dynamiki obiektu dynamicznego niustalonego .	75
4.14. Równanie całkowe dynamiki obiektu niustalonego . . .	77
4.15. Stosowanie metody filtrów kształtujących w analizie dynamiki obiektów niustalonych	79
4.15.1. Metoda filtru kształtującego	79
4.15.2. Metoda układu sprzężonego	81
4.16. Określenie charakterystyki impulsowej optymalnej . . .	82
4.17. Zastosowanie metod analizy statystycznej do badania dy- namiki obiektów niustalonych w czasie eksploatacji. .	86
5. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE NIUSTALONE JEDNOWYMIAROWE O PARAMETRACH ZMIENIAJĄCYCH SIĘ PRZYPADKOWO. WYMUSZE- NIA STOCHASTYCZNE	89
5.1. Charakterystyka obiektów stochastycznych	89
5.2. Równanie różniczkowe modelu obiektu	89
5.3. Charakterystyki statystyczne	92
5.4. Opisanie obiektu stochastycznego operatorem całkowym .	93
6. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE USTALONE WIELOWYMIAROWE O PARAMETRACH SKUPIONYCH. WYMUSZENIA ZDETERMINOWANE	97
6. 1. Wstęp	97
6. 2. Układ dynamiczny	98
6. 3. Schematy modeli obiektów wielowymiarowych	100
6. 4. Stan dynamiczny obiektu wielowymiarowego	102
6. 5. Rachunek macierzowy	103
6. 6. Równanie stanu obiektu wielowymiarowego w postaci standardowej	109
6. 7. Procesy przejściowe w obiekcie wielowymiarowym	110
6. 8. Macierz charakterystyki impulsowej	113
6. 9. Rozwiązanie fundamentalne równania stanu swobodnego .	118
6.10. Rozkład macierzy $\exp(At)$ w szereg potęgowy	120
6.11. Macierz funkcji przejścia	121
6.12. Momenty macierzy charakterystyki impulsowej	123
6.13. Metody rozwiązywania równania stanu	123
7. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE USTALONE WIELOWYMIAROWE O PARAMETRACH SKUPIONYCH. WYMUSZENIA STOCHASTYCZNE	127
7.1. Wstęp	127
7.2. Operator modelu obiektu wielowymiarowego	127
7.3. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej	128
7.3.1. Wstęp	128
7.3.2. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej dla sygnałów wejściowych statystycznie niezależnych	129
7.3.2.1. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulso- wej w dziedzinie oryginałów	129
7.3.2.2. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulso- wej w dziedzinie obrazów	132

7.3.3. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej dla sygnałów wejściowych statystycznie zależnych .	133
7.3.3.1. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej w dziedzinie oryginałów	133
7.3.3.2. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej w dziedzinie obrazów	136
7.3.4. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej przy użyciu macierzy korelacji własnej sygnału $\mu(t)$. .	137
8. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE NIEUSTALONE WIELOWYMIAROWE	
0 PARAMETRACH SKUPIONYCH. WYMUSZENIA ZDETERMINOWANE . . .	139
8.1. Wstęp	139
8.2. Równanie stanu w postaci macierzowej	140
8.3. Rozwiązanie równania jednorodnego	143
8.3.1. Macierz przejścia stanów	143
8.3.2. Własności macierzy przejścia stanów	145
8.4. Macierz charakterystyki impulsowej	146
8.5. Równanie stanu sprzężone	149
8.6. Sterowalność, obserwowalność oraz stabilność obiektu wielowymiarowego nieustalonego	153
8.7. Struktura kanoniosa Kalmana	155
8.8. Macierz charakterystyki impulsowej dla elementarnych połączeń schematów blokowych	156
9. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE NIEUSTALONE WIELOWYMIAROWE	
0 PARAMETRACH SKUPIONYCH. WYMUSZENIA STOCHASTYCZNE . . .	157
9.1. Układ równań modelu obiektu dynamicznego	157
9.2. Macierz korelacyjna	160
9.3. Macierz charakterystyki impulsowej	164
9.4. Filtry Kalmana-Bucy'ego	166
9.5. Obiekty dynamiczne z szumem parametrycznym	170
10. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE USTALONE JEDNOWYMIAROWE	
0 PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH. WYMUSZENIA ZDETERMINOWANE . . .	173
10.1. Wstęp	173
10.2. Równania różniczkowe modeli obiektów o parametrach rozłożonych	174
10.3. Modele obiektów o parametrach rozłożonych	175
10.4. Przykłady modeli matematycznych obiektów inżynierii chemicznej o parametrach rozłożonych	178
10.5. Warunki graniczne	180
10.6. Przegląd metod rozwiązywania równań różniczkowych liniowych cząstkowych, o stałych współczynnikach	183
10.6.1. Metoda szeregów	184
10.6.2. Metoda przekształceń całkowych	186
10.6.2.1. Przekształcenie Laplace'a, wielowymiarowe . . .	189
10.6.3. Rozwiązywanie cząstkowych równań różniczkowych	

przy użyciu maszyn cyfrowych oraz analogowych	194
10.7. Charakterystyki dynamiczne	195
10.7.1. Wstęp	195
10.7.2. Operator modelu	197
10.7.3. Charakterystyka impulsowa	198
10.7.4. Funkcja przejścia	202
10.7.5. Charakterystyka częstotliwościowa	204
10.8. Wyznaczenie charakterystyki częstotliwościowej	207
10.9. Wyznaczenie sygnału wyjściowego z obiektu dynamicznego	209
10.10. Schematy strukturalne z członami rozłożonymi	210
10.10.1. Połączenie równoległe i szeregowo członów dynamicznych rozłożonych	210
10.10.2. Człon rozłożony: wzmacniający, różniczkujący oraz całkujący	212
10.10.3. Obiekty o parametrach rozłożonych, objęte sprzężeniem zwrotnym	213
10.11. Aproksymacja charakterystyk dynamicznych	215
10.11.1. Wstęp	215
10.11.2. Rozkład charakterystyk dynamicznych w szereg	216
10.11.3. Aproksymacja oparta na kryteriach całkowych	219
10.11.4. Aproksymacja funkcji przejścia obiektu o parametrach rozłożonych funkcją przejścia lub kombinacją funkcji przejścia obiektów o parametrach skupionych	221
10.11.5. Aproksymacja funkcji przejścia wielomianami	223
10.11.6. Sprowadzenie równań różniczkowych cząstkowych do równań różniczkowych w obszarze współrzędnej x	225
10.11.7. Aproksymacja charakterystyk dynamicznych metodą wariacyjną	225
10.12. Równania różniczkowe cząstkowe, warunki graniczne, funkcje standaryzujące, charakterystyki impulsowe oraz funkcje przejścia	227
10.13. Optymalizacja obiektów o parametrach rozłożonych	229
10.13.1. Wstęp	229
10.13.2. Formułowanie zagadnień optymalizacji	231
10.13.3. Metody rozwiązywania zagadnień optymalizacji	233
10.13.3.1. Metoda klasyczna badania ekstremum funkcji	233
10.13.3.2. Metoda mnożników nieokreślonych Lagrange'a	234
10.13.3.3. Metoda wariacyjna	235
10.13.3.4. Metoda programowania dynamicznego	237
10.13.3.5. Zasada maksimum	240
Literatura	241
Skorowidz rzeczowy	243

PRZEDMOWA

"Dynamika procesowa II" jest drugą częścią skryptu pod tym samym tytułem przeznaczoną dla studentów specjalności Inżynieria Chemiczna na Wydziale Technologii i Inżynierii Chemicznej Politechniki Szczecińskiej.

Liczba godzin dydaktycznych przewidziana w programie studiów na wykłady i ćwiczenia audytoryjne z przedmiotu dynamika procesów oraz przedmiotu pokrewnego - pomiary i automatyka jest następująca:

- wykłady 68 godz.,
- ćwiczenia audytoryjne 23 godz.

W skrypcie omówiono zagadnienia dotyczące:

- dynamiki obiektów liniowych niestabilnych jednowymiarowych o parametrach skupionych dla wymuszeń stochastycznych,
- dynamiki obiektów liniowych ustalonych oraz niestabilnych wielowymiarowych o parametrach skupionych dla wymuszeń zdeterminowanych oraz stochastycznych,
- dynamiki obiektów liniowych ustalonych jednowymiarowych o parametrach rozłożonych dla wymuszeń zdeterminowanych.

Dla każdego typu obiektu i wymuszenia sformułowano metody identyfikacji oraz aproksymacji operatora modelu. Omówiono sposoby wyznaczenia charakterystyk dynamicznych w obszarze oryginałów oraz obrazów. W skrypcie zamieszczono również metody i sposoby analizy nie stosowane w matematyce klasycznej a stanowiące zagadnienia matematyki stosowanej. Metody te mogą być z powodzeniem zastosowane w obliczeniach praktycznych oraz podczas opracowania pomiarów doświadczalnych w zakresie badania dynamiki obiektów inżynierii chemicznej.

Zrozumienie problemów omawianych w skrypcie wymaga od studentów minimalnego zasobu wiedzy technicznej. Przyjęto pewne założenia dotyczące poziomu przygotowania czytelników w zakresie zagadnień matematyki, mechaniki płynów, inżynierii chemicznej oraz automatyki. Zagadnienia te obejmują:

a/ w zakresie matematyki

- procesy stochastyczne, funkcje analityczne, rachunek macierzowy, przekształcenia całkowite, równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe, równania całkowe, elementy matematyki stosowanej;

- b/ w zakresie mechaniki płynów - bilanse masy, pędu oraz energii;
- c/ w zakresie inżynierii chemicznej - statyka i kinetyka procesowa;
- d/ w zakresie automatyki - teoria regulacji liniowej, algebra schematów blokowych.

Podczas opracowania skryptu korzystano z prac wielu autorów, jednak wobec dużej liczby tych prac w literaturze zestawiono jedynie ważniejsze prace źródłowe natury zwartej.

Skrypt spełni swoje zadanie, jeżeli jego treść będzie dla czytelnika bodźcem do samodzielnego i bardziej dociekliwego zbadania problemów współczesnej dynamiki procesowej. Źródłem informacji są następujące czasopisma:

AIChE Journal,
 Automatica,
 Automatizace,
 Automatika i Telemekhanika,
 Chem.Eng.J.,
 Chem.Eng.Sci.,
 Cybernetics,
 Eng.Cybernetics,
 IEC Fundamental,
 IEC Proc.Des.Develop.,
 IEEE Trans Autom.Control,
 IFAC Sympos.on Control,
 Int.J.Eng.Sci.,
 Int.J.Control,
 Int.J.System.Sci.,
 IZV.VUZ,Priborostroenie,
 J.Math. and Mech.,
 J.Opt.Theor.Appl.,
 Proc IEE,
 Regulunstechnik,
 SIAM J.Control,
 Trans ASME,J.Dyn.Syst.Meas.and Control.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

A	- macierz parametrów obiektu
A_k	- akumulacja substancji /masy, pędu, energii/
A_t	- macierz operatora modelu obiektu
$A(t, \tau)$	- operator modelu obiektu nieustalonego
$A_{\Sigma, t}$	- operator całkowy modelu obiektu o parametrach rozłożonych
B	- macierz przekształcająca wielkości wejściowe
C	- macierz charakteryzująca urządzenie pomiarowe
c	- współczynnik
D	- macierz bezpośrednich sprzężeń wejście-wyjście
D	- współczynnik dyfuzji
D_μ	- dyspersja procesu $\mu(t)$
E	- macierz jednostkowa
E	- współczynnik zniekształcenia wzdłużnego
$F(s)$	- transformata Laplace'a funkcji $f(t)$
$F(\omega)$	- transformata Fouriera funkcji $f(t)$
$F(\bar{p}, s)$	- transformata Laplace'a funkcji $f(\bar{x}, t)$
$g(\bar{x}, t)$	- charakterystyka impulsowa obiektu o parametrach rozłożonych
H	- funkcja Hamiltona
J	- funkcjonal
K	- funkcja celu
L	- funkcja Lagrange'a
L	- operator
$L(x, \omega)$	- charakterystyka częstotliwościowa logarytmiczna modułu
M	- operator uśrednienia statystycznego
$m(t)$	- sygnał wejściowy
$m(t)$	- realizacja procesu stochastycznego $\mu(t)$
$\bar{m}(t)$	- wektor sygnału wejściowego
$m(\bar{x}, t)$	- sygnał wejściowy rozłożony w przestrzeni i w czasie
m_μ	- nadzisie matematyczna procesu stochastycznego $\mu(t)$
N	- intensywność szumu białego
Q	- charakterystyka statystyczna
Q	- estymator charakterystyki statystycznej
Q	- aproksymacja charakterystyki statystycznej
$R(\tau)$	- funkcja korelacyjna średnia
$R(i, \tau)$	- funkcja korelacyjna lokalna
$R(t, \tau)$	- funkcja korelacyjna bieżąca
$R_{\mu\mu}(\tau)$	- macierz korelacyjna wektora procesu stochastycznego $\mu(t)$
R_0	- macierz fundamentalna równania jednorodnego
$\bar{r}(t)$	- wektor stanu
$\bar{r}^*(t)$	- wektor stanu sprzężony

- $S(\omega, t)$ - gęstość widmowa bieżąca
 $T (A^T)$ - operacja transpozycji
 T - stała czasowa
 $u(t)$ - sygnał wyjściowy
 $u(\bar{x}, t)$ - sygnał wyjściowy obiektu o parametrach rozłożonych
 $\bar{u}(t)$ - wektor sygnału wyjściowego
 $V(t)$ - macierz szumu parametrycznego
 $v(x, t)$ - funkcja standaryzująca
 $W(t)$ - macierz charakterystyki impulsowej obiektu ustalonego
 $W(t, \tau)$ - macierz charakterystyki impulsowej obiektu nieustalonego
 $W(T, t)$ - macierz charakterystyki impulsowej sprzężonej
 $W_F(t, \tau)$ - macierz charakterystyki impulsowej filtru
 $W(s)$ - macierz funkcji przejścia
 $W(j\omega, t)$ - funkcja przejścia parametryczna sprzężona
 $W(j\omega, \tau)$ - funkcja przejścia parametryczna sprzężona
 $W(\bar{p}, s)$ - funkcja przejścia obiektu o parametrach rozłożonych
 $\bar{W}(t, \tau, \alpha)$ - macierz scentrowana macierzy przypadkowej charakterystyki impulsowej
 α - parameter przypadkowy operatora modelu
 $\bar{x}(t)$ - wektor oddziaływań przypadkowych
 ΔQ - błąd określenia charakterystyki statystycznej
 Δ - wyznacznik
 $\Delta\omega$ - pasmo efektywne widma
 ΔT_{kor} - przedział korelacji
 $\bar{e}(t)$ - wektor błędu
 $\bar{\xi}(t)$ - wektor przypadkowy sygnału wyjściowego obarczony szumem
 $\bar{\eta}(t)$ - wektor przypadkowy sygnału wyjściowego
 $\bar{\tilde{\eta}}(t)$ - wektor przypadkowy $\bar{\eta}(t)$ scentrowany
 $\eta(\bar{x}, t)$ - charakterystyka skokowa obiektu o parametrach rozłożonych
 λ - mnożnik nieokreślony Lagrange'a
 λ - wartość własna operatora
 $\bar{p}(t)$ - wektor przypadkowy zmiennych stanu
 τ_0 - opóźnienie transportowe
 $\bar{\mu}(t)$ - wektor przypadkowy sygnału wejściowego
 Φ - macierz przejścia stanów
 $\Phi(t, \tau)$ - macierz przejścia stanów obiektu nieustalonego
 Ω - przestrzeń

4. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE NIEUSTALONE JEDROWYMIAROWE O PARAMETRACH SKUPIONYCH. WYMUSZENIA STOCHASTYCZNE

4.1. Wstęp

Własności nieustalone obiektu dynamicznego /obiekt fizyczny oraz urządzenie pomiarowe/ wynikają ze zmienności w czasie parametrów fizykochemicznych, kinetycznych oraz kinematycznych. Odpowiedzią obiektu tego typu na oddziaływanie czynników przypadkowych lub na sygnał wejściowy, w postaci sztucznie generowanej funkcji przypadkowej, jest proces stochastyczny nieustalony.

Praktycznie proces nieustalony na wyjściu z obiektu dynamicznego uzyskujemy, jeżeli:

- do obiektu ustalonego wprowadzimy jako wymuszenie proces stochastyczny ustalony, a proces wyjściowy obserwujemy w przedziale czasu $t < t_u$, gdzie t_u jest czasem trwania charakterystyki impulsowej obiektu,
- do obiektu dynamicznego ustalonego wprowadzimy jako wymuszenie proces stochastyczny nieustalony,
- do obiektu dynamicznego nieustalonego wprowadzimy jako wymuszenie proces stochastyczny ustalony lub nieustalony.

Wyznaczenie charakterystyk dynamicznych obiektów nieustalonych metodami statystycznymi wymaga znajomości teorii procesów stochastycznych nieustalonych.

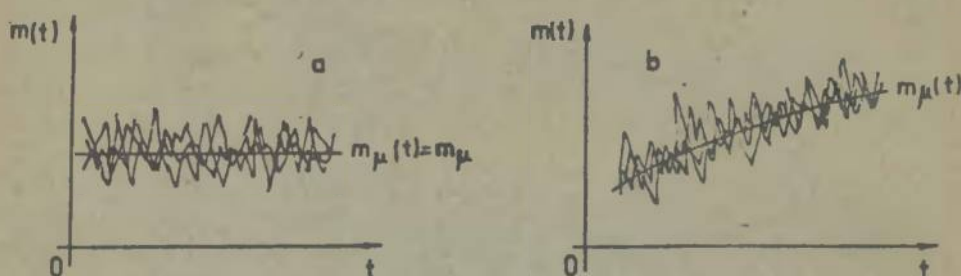
4.2. Praktyczne kryteria własności nieustalonych procesu stochastycznego

Procesem stochastycznym nieustalonym nazywamy taki proces stochastyczny, którego charakterystyki statystyczne zależą od czasu. Przykład procesu stochastycznego ustalonego oraz nieustalonego pokazano na rysunku 1.

O procesie stochastycznym możemy mówić, że jest ustalony jeżeli moglibyśmy wykazać, że wszystkie charakterystyki statystyczne nie zależą od czasu. Praktycznie wykazać tego nie możemy, ponieważ nigdy nie będziemy dysponowali nieskończoną wieloma charakterystykami statystycznymi, bo tylko taki zbiór charakterystyk w zupełności opisuje proces stochastyczny.

Dla większości procesów przypadkowych obserwowanych w urządzeniach przemysłowych wystarczy znać szereg kryteriów określających własności

ustalone, których niespełnienie przez proces stochastyczny świadczyłoby o jego własnościach nieustalonych.



Rys. 1. Proces stochastyczny ustalony/a/ oraz nieustalony/b/

Proces stochastyczny jest procesem ustalonym jeżeli:

- charakterystyki statystyczne obliczone z realizacji o krótkim przedziale czasu trwania nie zależą od momentu odliczania czasu

$$F_n(m_1, t_1; m_2, t_2; \dots; m_n, t_n) = F_n(m_1, t_1 + \tilde{t}; m_2, t_2 + \tilde{t}; \dots; m_n, t_n + \tilde{t}) \quad (1a)$$

$$W_n(m_1, t_1; m_2, t_2; \dots; m_n, t_n) = W_n(m_1, t_1 + \tilde{t}; m_2, t_2 + \tilde{t}; \dots; m_n, t_n + \tilde{t}) \quad (1b)$$

$$M\{\mu^{k_1}(t_1), \dots, \mu^{k_n}(t_n)\} = M\{\mu^{k_1}(t_1 + \tilde{t}), \dots, \mu^{k_n}(t_n + \tilde{t})\} \quad (-\infty < \tilde{t} < \infty, n=1, 2, \dots) \quad (1c)$$

- utworzone ciągi z obliczonych wartości średnich oraz wartości średnich kwadratu wielkości przypadkowej $\mu(t)$ dla N niezależnych przedziałów trwania realizacji nie mają trendu nieustalonego lub drgań o dużym okresie.

W obliczeniach praktycznych nie analizuje się funkcji rozkładu oraz momentów, a ogranicza się do analizy podstawowych charakterystyk statystycznych. Wówczas relacje ujęte wzorem (1c) upraszczają się do postaci

$$\begin{aligned} m_\mu(t) &= m_\mu \\ D_\mu(t) &= D_\mu \\ R_{mm}(t_1, t_2) &= R_{mm}(t_2 - t_1) = R_{mm}(\tilde{t}) \end{aligned} \quad (2)$$

Wszystkie procesy stochastyczne nie spełniające wzorów (1) oraz (2) traktowane są jako procesy stochastyczne niustalone. Własności niustalonego procesu stochastycznego mogą pojawiać się dopiero od pewnej wielkości rzędu momentu początkowego lub centralnego.

4.3. Charakterystyki statystyczne procesu stochastycznego niustalonego

4.3.1. Operatory uśrednienia

Własności statystyczne procesu stochastycznego niustalonego wyrażone charakterystykami statystycznymi określane są przez uśrednienie po zbiorze realizacji w momencie t

$$Q\{\mu(t)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q(m_i(t)) \quad (3)$$

gdzie: $m_i(t)$ - i -ta realizacja procesu stochastycznego,

$q(\quad)$ - operator przekształcenia określający charakterystykę statystyczną,

Q - charakterystyka statystyczna,

N - liczba realizacji podlegających uśrednieniu,

$\{m_i(t)\}$ - proces stochastyczny $\mu(t)$.

Wzór (3) można zrealizować praktycznie jedynie w postaci estymatora

$$Q^*\{\mu(t)\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q(m_i(t)) \quad (4)$$

z dokładnością

$$Q = L_1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_2(\Delta Q_k^*\{\mu(t)\}) \right) \quad (5)$$

gdzie: n - liczba rejestracji,

L_1, L_2 - operatory przekształcenia,

$\Delta Q_k^*\{\}$ - błąd pomiaru charakterystyki statystycznej,

$$\Delta Q_k^*\{\mu(t)\} = Q\{\mu(t)\} - Q_k^*\{\mu(t)\} \quad (6)$$

W zagadnieniach wyznaczenia charakterystyk statystycznych procesu stochastycznego niustalonego używane są również poza operatorem L_N /uśrednienie po zbiorze/ inne operatory jak L_T /uśrednienie po czasie/ oraz L_{NT} .

Stąd dla procesu stochastycznego $\mu(t)$ określane są trzy charakterystyki statystyczne:

- bieżąca

$$Q(t) = L_N \{ \mu(t) \} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(m_i(t)) \quad (7)$$

- lokalna

$$Q(i) = L_T \{ \mu(t) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(m_i(t)) dt \quad (8)$$

- średnia

$$\begin{aligned} Q &= L_{NT} \{ \mu(t) \} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \int_0^T g(m_i(t)) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Q(i) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q(i) \end{aligned} \quad (9)$$

Charakterystyki statystyczne lokalna $Q(i)$ oraz średnia Q własnościami swoimi odpowiadają w zasadzie charakterystykom procesu stochastycznego ustalonego. Charakterystyka statystyczna bieżąca $Q(t)$ istotnie różni się od charakterystyk statystycznych procesu ustalonego. Naturalnie wynika stąd wniosek, że charakterystyka $Q(t)$ jest nośnikiem informacji o własnościach niustalonych procesu stochastycznego.

Do opisu własności procesu stochastycznego niustalonego stosowane są charakterystyki statystyczne określone w dziedzinie oryginału /funkcje rozkładu prawdopodobieństwa różniczkowa i całkowa, momenty początkowe i centralne, funkcje korelacyjne oraz strukturalne/ oraz charakterystyki statystyczne określone w dziedzinie obrazu /gęstość widmowa/.

4.3.2. Funkcje rozkładu prawdopodobieństwa: całkowa oraz różniczkowa

Funkcje rozkładu prawdopodobieństwa całkowa i różniczkowa są charakterystykami probabilistycznymi. Najprostszą charakterystyką tego typu jest funkcja rozkładu prawdopodobieństwa całkowa jednowymiarowa

$$F(m, t) = P \{ -\infty < \mu(t) \leq m \} \quad (10)$$

Charakterystykę tę określa się przy użyciu operatora L_N dla dowolnego momentu t ; i jest funkcją zmiennej niezależnej t

$$F(m, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi(m; (t)) \quad (11)$$

gdzie: $m_i(t)$ - realizacja procesu stochastycznego $\mu(t)$,
 $\{m_i(t)\}_{i=1}^N$ - zbiór realizacji tworzących proces stochastyczny,

$t_i (i=\overline{1,n}) \in [0,T]$ - przedział czasu, w którym proces stochastyczny został określony

$$\psi(m) = \begin{cases} 1 & \text{dla } m(t) < m \\ 0 & \text{dla } m(t) > m \end{cases} \quad (12)$$

Warunek $m(t) < m$ oznacza, że chwilowa wartość realizacji $m(t)$ nie jest większa od pewnej wartości m .

Używając operatorów L_T i L_{NT} otrzymamy funkcje rozkładu prawdopodobieństwa całkową lokalną oraz średnią

$$F(m,i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(m_i(t)) dt \quad (13)$$

$$F(m) = \lim_{NT \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \int_0^T \sum_{i=1}^N \psi(m_i(t)) dt \quad (14)$$

Dla dwóch momentów t_1 oraz t_2 wzór (10) przyjmie postać

$$F(m_1, t_1; m_2, t_2) = P\{-\infty < \mu(t_1) \leq m_1; -\infty < \mu(t_2) \leq m_2\} \quad (15)$$

Funkcje rozkładu prawdopodobieństwa dwuwymiarowe całkowe F_2 bieżąca, lokalna oraz średnia określane są kolejnymi wzorami /przyjęto oznaczenia: $t_1=t, t_2=t+\tau$ /

$$F_2(m_1, t; m_2, t+\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi(m_i(t), m_i(t+\tau)) \quad (16)$$

$$F_2(m_1, m_2, k, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(m_i(t), m_i(t+\tau)) d\tau \quad (17)$$

$$F_2(m_1, m_2, \tau) = \lim_{NT \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \int_0^T \sum_{i=1}^N \psi(m_i(t), m_i(t+\tau)) d\tau \quad (18)$$

gdzie: T - czas obserwacji,

τ - przesunięcie momentów odczytania wartości procesu $\mu(t)$

$$\psi(m(t), m(t+\tau)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } m(t) \leq m_1; m(t+\tau) \leq m_2 \\ 0 & \text{dla } m(t) > m_1; m(t+\tau) > m_2 \end{cases} \quad (19)$$

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa całkowa dwuwymiarowa jest charak-

terystyką pełną tylko dla procesu Markowa. Charakterystyką probabilistyczną opisującą w zupełności proces stochastyczny $\mu(t)$ w pewnym przedziale czasu $(t_1, \dots, t_n) \in [0, T]$ jest funkcja rozkładu prawdopodobieństwa całkowa wielowymiarowa

$$F_n(m_1, t_1; m_2, t_2; \dots; m_n, t_n) = P\{\mu(t_1) \leq m_1, \mu(t_2) \leq m_2, \dots, \mu(t_n) \leq m_n\} \quad (20)$$

Funkcja $F_n(\dots)$ zależy od n argumentów m_i oraz n parametrów t_i . Charakterystykę tę określa się przy użyciu operatora L_N

$$F_n(\{m_i\}, \{t_i\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Psi(m_i(t_i)) \quad (21)$$

gdzie: $i = \overline{1, N}$,
 $t_i \in [0, T]$,

$$\Psi(m_i(t_i)) = \begin{cases} 1 & \text{dla } m_i(t_i) \leq m_i \\ 0 & \text{dla pozostałych przypadków} \end{cases} \quad (22)$$

Uogólnioną postacią funkcji rozkładu prawdopodobieństwa całkowej jest funkcjonal rozkładu prawdopodobieństwa określony prawdopodobieństwem nierówności $\mu(t) \leq m(t)$ dla wszystkich wartości argumentu t

$$F[m(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\{m_i\}, \{t_i\}) \quad (23)$$

gdzie $(\{m_i\}, \{t_i\}) = \{m(t_1^{(n)}), \dots, m(t_n^{(n)})\}$ $n = \overline{1, \infty}$ jest zbiorem realizacji procesu stochastycznego $\mu(t)$, którego wartości w punktach $t_1, \dots, t_n$ rozbita dowolnego przedziału $[0, T]$ na n równych odcinków /wymiar odcinka dąży do zera gdy $n \rightarrow \infty$ /przynależą odpowiednio do półniśskóńcównych przedziałów $(-\infty, m(t_1^{(n)}), \dots, -\infty, m(t_n^{(n)}))$.

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa różniczkowa jednowymiarowa / gęstość rozkładu prawdopodobieństwa nieustalona / określona jest relacją

$$w(m, t) = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{P\{m < \mu(t_1) \leq m + \Delta m\}}{\Delta m}, \quad (24)$$

którą przy użyciu funkcji (20) można zapisać w postaci

$$w(m, t) = \frac{\partial F(m, t)}{\partial m} \quad (25)$$

Dla dwóch momentów czasu t_1 oraz t_2 własna i wzajemna gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wyrażone są odpowiednio zależnościami

$$w(m_1, t_1; m_2, t_2) = \lim_{\Delta m_1 \rightarrow 0, \Delta m_2 \rightarrow 0} \frac{P\{m_1 < \mu(t_1) \leq m_1 + \Delta m_1; m_2 < \mu(t_2) \leq m_2 + \Delta m_2\}}{\Delta m_1 \Delta m_2} \quad (26)$$

$$w(m_1, t_1; u, t_2) = \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ \Delta u \rightarrow 0}} \frac{P\{m < \gamma(t_1) \leq m + \Delta m, u < \eta(t_2) \leq u + \Delta u\}}{\Delta m \Delta u} \quad (27)$$

Funkcje rozkładu prawdopodobieństwa nieustalone całkowe i różniczkowe powiązane są ze sobą następującymi relacjami

$$w(m_1, t_1; m_2, t_2) = \frac{\partial^2 F(m_1, t_1; m_2, t_2)}{\partial m_1 \partial m_2} \quad (28)$$

$$w(m, t_1; u, t_2) = \frac{\partial^2 F(m, t_1; u, t_2)}{\partial m \partial u} \quad (29)$$

$$F(m_1, t_1; m_2, t_2) = \int_{-\infty}^{m_1} \int_{-\infty}^{m_2} w(m_1, t_1; m_2, t_2) dm_1 dm_2 \quad (30)$$

$$F(m, t_1; u, t_2) = \int_{-\infty}^m \int_{-\infty}^u w(m, t_1; u, t_2) dm du \quad (31)$$

Charakterystyką probabilistyczną opisującą wyczerpująco proces stochastyczny nieustalony jest n -wymiarowa gęstość rozkładu prawdopodobieństwa

$$w_n(m_1, t_1; m_2, t_2; \dots; m_n, t_n) = \frac{\partial^n F(m_1, t_1; m_2, t_2; \dots; m_n, t_n)}{\partial m_1 \partial m_2 \dots \partial m_n} \quad (32)$$

Ze wzrostem wskaźnika n wzrasta dokładność opisanie własności statystycznych procesu stochastycznego.

Wyznaczenie funkcji $w(m, t)$ jest zagadnieniem niezmiernie pracochłonnym, ponieważ należy rozpatrzyć wszystkie możliwe kombinacje wielkości m oraz t . Otrzymany estymator gęstości ma sens wówczas, gdy $N \rightarrow \infty$.

Jeżeli dodatkowo dysponujemy funkcją $w(m_1, t_1; m_2, t_2)$ oraz założymy, że rozpatrywane procesy stochastyczne są procesami Markowa lub Gaussa, to funkcję rozkładu prawdopodobieństwa różniczkową nieustaloną n -wymiarową można wyrazić przez funkcje $w_2(m_1, t_1; m_2, t_2)$ oraz $w_1(m, t)$

$$w_n(\{m_i\}, \{t_i\}) = \frac{w_2(m_1, t_1; m_2, t_2) w_2(m_2, t_2; m_3, t_3) \dots w_2(m_{n-1}, t_{n-1}; m_n, t_n)}{w_1(m_1, t_1) w_1(m_2, t_2) \dots w_1(m_{n-1}, t_{n-1})} \quad (33)$$

Funkcje rozkładu prawdopodobieństwa różniczkowe jedno- i dwuwymiarowe powiązane są ze sobą zależnościami

$$w(m_1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(m_1, t_1; m_2, t_2) dm_2 \quad (34)$$



$$W(m_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(m_1, t_1; m_2, t_2) dm_1 \quad (35)$$

Jeżeli wartości chwilowe procesu stochastycznego $\mu(t)$ dla momentów t_1 oraz t_2 są niezależne / może być rozszerzone na n momentów/, to

$$W(m_1, t_1; m_2, t_2) = W(m_1, t_1) W(m_2, t_2) \quad (36)$$

Natomiast, jeżeli para wartości chwilowych m_1 oraz m_2 jest statystycznie zależna, to wzór (36) ma postać

$$W(m_1, t_1; m_2, t_2) = W(m_1, t_1) W\left(\frac{m_2, t_2}{m_1, t_1}\right) = W(m_2, t_2) W\left(\frac{m_1, t_1}{m_2, t_2}\right) \quad (37)$$

gdzie: $W\left(\frac{m_2, t_2}{m_1, t_1}\right)$ - prawdopodobieństwo warunkowe dla momentu t_2 przy założeniu, że w momencie t_1 proces przyjmie wartość m_1 , war-

m_1, m_2 - wartości chwilowe procesu $\mu(t)$.

Dla procesu normalnego funkcje $w_1(m, t)$ oraz $w_2(m_1, t_1; m_2, t_2)$ mają następujące postacie analityczne

$$w(m, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\mu^2(t)}} \exp\left(-\frac{[m(t) - m_\mu(t)]^2}{2\sigma_\mu^2(t)}\right) \quad (38)$$

$$W(m_1, t_1; m_2, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_\mu(t_1)\sigma_\mu(t_2)\sqrt{1-\rho_\mu^2(t_1, t_2)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2[1-\rho_\mu^2(t_1, t_2)]} \cdot \left\{ \frac{[m(t_1) - m_\mu(t_1)]^2}{\sigma_\mu^2(t_1)} + \frac{[m(t_2) - m_\mu(t_2)]^2}{\sigma_\mu^2(t_2)} - \frac{2\rho_\mu(t_1, t_2)[m(t_1) - m_\mu(t_1)][m(t_2) - m_\mu(t_2)]}{\sigma_\mu(t_1)\sigma_\mu(t_2)} \right\} \right) \quad (39)$$

gdzie: $m_\mu(t)$ - nadzieja matematyczna,

$\sigma_\mu^2(t) = D_\mu(t)$ - dyspersja,

$\rho_\mu(t_1, t_2)$ - współczynnik korelacji.

Jak wynika ze wzoru (38) problem określenia gęstości prawdopodobieństwa nieustalonej jednowymiarowej dla procesu stochastycznego normalnego sprowadza się do pomiaru $m_\mu(t)$ oraz $\sigma_\mu^2(t)$. Jest to zagadnienie znacznie trudniejsze niż pomiar funkcji $w(m, t)$.

W obliczeniach praktycznych chętnie korzysta się z innych charakterystyk statystycznych, takich jak: momenty początkowe i centralne, funkcje charakterystyczne, strukturalne, korelacyjne oraz widmowe.

4.3.3. Elementy teorii korelacyjnej

Pomimo, że n -wymiarowa gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wyczerpująco opisuje procesy stochastyczne, praktycznie nie korzysta się z niej, lecz używa się charakterystyk całkowych. Są one łatwe do wyznaczenia, mają proste postacie analityczne oraz są charakterystykami czasowymi. Charakterystyki statystyczne całkowe zawierają więcej informacji przy niższym wskaźniku n , a w szacowaniach praktycznych mogą być zastępowane przez swoje estymatory. Do tych charakterystyk należą momenty i funkcje korelacyjne.

Momentami początkowymi procesu stochastycznego $\mu(t)$ są funkcje będące średnimi statystycznymi iloczynów

$$\alpha_i(t) = \int m^i w_1(m, t) dm \quad (40)$$

$$\alpha_{i_1 i_2}(t_1, t_2) = \iint m_1^{i_1} m_2^{i_2} w_2(m_1, t_1; m_2, t_2) dm_1 dm_2 \quad (41)$$

$$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int \dots \int m_1^{i_1} m_2^{i_2} \dots m_n^{i_n} w_n(m_1, t_1; m_2, t_2, \dots, m_n, t_n) dm_1 dm_2 \dots dm_n \quad (42)$$

Moment centralny rzędu $(i_1 + i_2 + \dots + i_n)$ określony jest zależnością

$$\beta_{i_1 i_2 \dots i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int \dots \int [m_1 - \mu(t_1)]^{i_1} [m_2 - \mu(t_2)]^{i_2} \dots [m_n - \mu(t_n)]^{i_n} w_n(m_1, t_1; m_2, t_2, \dots, m_n, t_n) dm_1 dm_2 \dots dm_n \quad (43)$$

Momenty początkowe oraz centralne można wyznaczyć z funkcji charakterystycznej określonej jako przekształcenie Fouriera gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

$$\Theta_n(\omega_1, \dots, \omega_n; t_1, \dots, t_n) = \int \dots \int w_n(m_1, \dots, m_n; t_1, \dots, t_n) e^{j(\omega_1 m_1 + \dots + \omega_n m_n)} dm_1 \dots dm_n \quad (44)$$

Jeżeli funkcję $\Theta_1(\omega, t)$ przedstawimy w postaci

$$\Theta_1(\omega, t) = \int e^{j\omega m} w_1(m, t) dm = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(j\omega)^i}{i!} \int m^i w_1(m, t) dm = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) \frac{(j\omega)^i}{i!} \quad (45)$$

i zlogarytmujemy otrzymane wyrażenie, a funkcję $\ln \Theta_1(\omega, t)$ rozłożymy w szereg MacLaurina

$$\ln \Theta(m, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i(t)}{i!} (j\omega)^i - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i(t)}{i!} (j\omega)^i \right]^2 + \frac{1}{3} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i(t)}{i!} (j\omega)^i \right]^3 + \dots \quad (46)$$

to otrzymamy

$$\Theta_1(m, t) = \exp \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i(t)}{i!} (j\omega)^i \right] \quad (47)$$

gdzie $\chi_i(t)$ jest wielomianem od współczynników $\alpha_i(t)$.

Ze wzorów (45) oraz (47) otrzymamy następujące zależności:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \alpha_1 = m\mu(t) \\ \chi_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = D\mu(t) \\ \chi_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = \beta_3(t) \\ \chi_4 &= \alpha_4 - 3\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1^4 = \beta_4(t) - 3\beta_2^2(t) \end{aligned} \quad (48)$$

Jeżeli użyjemy funkcji charakterystycznej wielowymiarowej oraz wykonamy podobne przekształcenia / w funkcji $\Theta_n(\omega_1, \dots, \omega_n, t_1, \dots, t_n)$ założymy, że $t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq \dots$ / , to otrzymamy wzory

$$\begin{aligned} R_m(t_1) &= \chi_1 = \alpha_1(t) \\ R_{mm}(t_1, t_2) &= \alpha_2(t_1, t_2) - \alpha_1(t_1)\alpha_2(t_2) = \beta_2(t_1, t_2) \\ R_{mmm}(t_1, t_2, t_3) &= \alpha_3(t_1, t_2, t_3) - \alpha_1(t_1)R_{mm}(t_2, t_3) - \\ &\quad - \alpha_1(t_2)R_{mm}(t_1, t_3) - \alpha_1(t_3)R_{mm}(t_1, t_2) - \alpha_1(t_1)\alpha_1(t_2)\alpha_1(t_3) = \beta_3(t_1, t_2, t_3) \end{aligned} \quad (49)$$

W oparciu o obliczone momenty α (48) oraz funkcje korelacyjne R można odtworzyć funkcję charakterystyczną, po zróżniczkowaniu której otrzymamy gęstość rozkładu prawdopodobieństwa.

W analizie korelacyjnej procesów stochastycznych niestabilnych używa się pierwsze dwa związki w układzie (48) oraz drugi związek w układzie wzorów (49).

4.3.3.1. Nadzieja matematyczna

Nadzieją matematyczną /wartością średnią/ procesu stochastycznego niestabilnego nazywamy nieprzypadkową funkcję czasu $m_\mu(t)$, której wartości w każdym momencie t równe są nadziei matematycznej przekroju procesu stochastycznego w tym momencie. Wyznaczenie zależności określającej zmiany nadziei matematycznej w czasie jest podstawowym zagadnieniem analizy procesu stochastycznego niestabilnego.

Zgodnie z definicją, nadzieję matematyczną określa się z relacji

$$m_{\mu} = M \{ \mu(t) \} \quad (50)$$

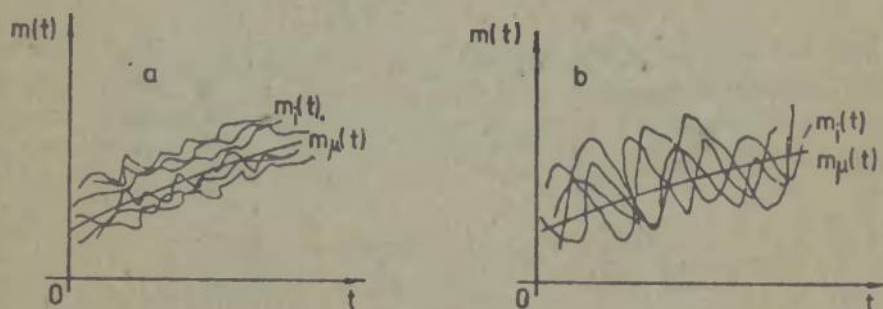
Jeżeli znamy gęstość rozkładu prawdopodobieństwa, to ze wzoru (50) można wyznaczyć nadzieję matematyczną nieustaloną bieżącą, lokalną oraz średnią

$$m_{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) w(m, t) dm \quad (51)$$

$$m_{\mu}(i) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) w(m, i) dm \quad (52)$$

$$m_{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) w(m) dm \quad (53)$$

Nadzieja matematyczna $m_{\mu}(t)$ stanowi jak gdyby oś symetrii realizacji procesu stochastycznego. Jednak nie charakteryzuje ona stopnia rozrzutu poszczególnych realizacji procesu względem tej osi. Realizacje o różnym stopniu rozrzutu mogą mieć takie same wartości $m(t)$. Pokazane to zostało na rysunku 2.



Rys. 2. Realizacje $m_i(t)$ procesu stochastycznego $\Xi(\mu, t)$ o dużym /a/ oraz małym /b/ rozrzucie wartości realizacji $m_i(t)$ względem wartości średniej $m_{\mu}(t)$

Stopień rozrzutu realizacji procesu stochastycznego względem wartości średniej charakteryzuje się dyspersją procesu stochastycznego.

4.3.3.2. Dyspersja

Dyspersją procesu stochastycznego nieustalonego nazywamy nieprzypadkową funkcję czasu, której wartości w każdym momencie t równe są dyspersji przekroju procesu stochastycznego w tym momencie.

Zgodnie z definicją otrzymamy zależności określające odpowiednio bieżącą, lokalną oraz średnią dyspersję procesu $\mu(t)$

$$D_{\mu}(t) = M\{[\mu(t) - m_{\mu}(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [m(t) - m_{\mu}(t)]^2 w_1(m, t) dm \quad (54)$$

$$D_{\mu}(i) = \int_{-\infty}^{\infty} [m(t) - m_{\mu}(i)]^2 w_1(m, i) dm \quad (55)$$

$$D_{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} [m(t) - m_{\mu}]^2 w_1(m) dm \quad (56)$$

W analizie praktycznej do opisu stopnia rozrzutu wartości chwilowych procesu stochastycznego nieustalonego względem nadziewi matematycznej często używa się odchylenia standardowego. Jest ono jednoznacznie powiązane z dyspersją następującą relacją

$$\sigma_{\mu} = [D\{\mu(t)\}]^{1/2} \quad (57)$$

Wykorzystując wzory (54-56) otrzymamy odpowiednio odchylenie standardowe średniokwadratowe bieżące, lokalne oraz średnie

$$\sigma_{\mu}(t) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [m(t) - m_{\mu}(t)]^2 w_1(m, t) dm \right\}^{1/2} \quad (58)$$

$$\sigma_{\mu}(i) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [m(t) - m_{\mu}(i)]^2 w_1(m, i) dm \right\}^{1/2} \quad (59)$$

$$\sigma_{\mu} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [m(t) - m_{\mu}]^2 w_1(m) dm \right\}^{1/2} \quad (60)$$

Dyspersja jest miarą błędu estymacji charakterystyk statystycznych. Przykładowo jako kryterium optymalizacji estymacji wartości średniej jest dyspersja

$$D[m_{\mu}^*(t)] = M\{[m_{\mu}^*(t) - m_{\mu}(t)]^2\} \quad (61)$$

W analizie statystycznej procesów stochastycznych nieustalonych używa się również, jako kryterium funkcji opisującej zmiany w czasie, średniej kwadratu wartości realizacji określonych dla każdego momentu t . Kryterium to powiązane jest z nadzieją matematyczną oraz dyspersją następującą zależnością

$$\bar{x}^2 = M \{ x_i^2(t) \} = m_\mu^2 + D\mu \quad (62)$$

Wyznaczenie charakterystyki $\bar{x}^2$ jest łatwiejsze niż wyznaczenie dyspersji. Wystarczy tylko we wzorach (51+53) zamiast $x_i(t)$ wprowadzić wielkość $x_i^2(t)$, a otrzymamy odpowiednio kwadrat średni bieżący $\bar{x}^2(t)$, lokalny $\bar{x}^2(i)$ oraz średni $\bar{x}^2$.

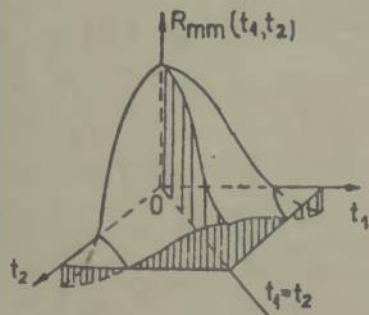
Ani nadzieja matematyczna, ani dyspersja nie charakteryzują stopnia zależności statystycznej pomiędzy przekrojami procesu stochastycznego w różnych momentach czasu. Procesy o jednakowej nadziei matematycznej $m_\mu(t)$ oraz jednakowej dyspersji $D_\mu(t)$ mogą mieć różną strukturę wewnętrzną, a więc więź statystyczna pomiędzy przekrojami może być różna.

Stopień zależności statystycznej pomiędzy dwoma dowolnie wybranymi przekrojami procesu stochastycznego charakteryzuje funkcja korelacyjna.

4.3.3.3. Funkcje korelacyjne

Funkcją korelacyjną procesu stochastycznego nieustalonego nazywamy nieprzypadkową funkcję dwóch argumentów, która dla każdej pary dowolnie wybranych momentów t_1 oraz t_2 równa jest momentowi korelacyjnemu odpowiednich przekrojów procesu. Funkcję taką określa się relacją

$$R_{mm}(t_1, t_2) = M \{ [\mu(t_1) - m_\mu(t_1)] [\mu(t_2) - m_\mu(t_2)] \} \quad (63)$$



Rys. 3. Obraz graficzny funkcji $R_{mm}(t_1, t_2)$

Obraz graficzny funkcji korelacji własnej procesu $\mu(t)$ pokazano na rysunku 3.

Funkcja określona wzorem (63) nazywana jest niekiedy w literaturze źródłowej funkcją kowariancyjną, a funkcja określona dla realizacji niescentrowanych nazywana jest funkcją korelacyjną.

W niniejszym skrypcie, za większością autorów, funkcję korelacyjną

określa się wzorem definicyjnym (63).

Statystyczna więź pomiędzy wartościami realizacji dwóch procesów stochastycznych $\mu(t)$ oraz $\eta(t)$ opisuje funkcja korelacji wzajemnej

$$R_{\mu\eta}(t_1, t_2) = M\{[\mu(t_1) - m_\mu(t_1)][\eta(t_2) - m_\eta(t_2)]\} \quad (64)$$

Wychodząc z relacji

$$M\{[\dot{\mu}(t) + \dot{\eta}(t)]^2\} \geq 0 \quad (65)$$

otrzymamy nierówność określającą górną granicę wartości funkcji korelacji wzajemnej nieustalonej

$$|R_{\mu\eta}(t_1, t_2)|^2 \leq R_{\mu\mu}(t_1, t_2) R_{\eta\eta}(t_1, t_2) \quad (66)$$

Funkcje korelacyjne spełniają następujące własności symetrii:

$$\begin{aligned} R_{\mu\mu}(t_2, t_1) &= R_{\mu\mu}(t_1, t_2) \\ R_{\eta\eta}(t_2, t_1) &= R_{\eta\eta}(t_1, t_2) \\ R_{\mu\eta}(t_2, t_1) &= R_{\eta\mu}(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (67)$$

W ten sposób strukturę procesów stochastycznych nieustalonych $\{\mu(t)\}$ oraz $\{\eta(t)\}$ opisuje się czterema funkcjami $R_{\mu\mu}(t_1, t_2)$, $R_{\eta\eta}(t_1, t_2)$, $R_{\mu\eta}(t_1, t_2)$ oraz $R_{\eta\mu}(t_1, t_2)$. Funkcje te wystarczy określić dla $t_1 \leq t_2$. Wyniki dla $t_1 > t_2$ otrzymuje się wykorzystując własności symetrii (67) tych funkcji.

Jeżeli znamy funkcję rozkładu prawdopodobieństwa różniczkową dwuwymiarową, to relację (63) można zapisać w postaci

$$R_{\mu\mu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mu(t_1) - m_\mu(t_1)][\mu(t_2) - m_\mu(t_2)] w_2(m_1, t_1; m_2, t_2) dm_1 dm_2 \quad (68)$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t_2 - t_1 \\ t &= \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \\ t_1 &= t - \frac{\tilde{t}}{2} \\ t_2 &= t + \frac{\tilde{t}}{2} \end{aligned} \quad (69)$$

to wzór (63) zapiszemy w postaci

$$R_{\mu\mu}(t, \tilde{t}) = M\{\dot{\mu}(t - \frac{\tilde{t}}{2}) \dot{\mu}(t + \frac{\tilde{t}}{2})\} \quad (70)$$

Funkcja korelacyjna $R_{mm}(t, \tau)$ określona jest na płaszczyźnie (t, τ) . Postać taka tej funkcji pozwala oddzielić część ustaloną procesu stochastycznego od części nieustalonej. Funkcja korelacyjna bieżąca nie jest funkcją parzystą, tj.

$$R_{mm}(t, t+\tau) = R_{mm}(t, t-\tau) \quad (71)$$

Według definicji (63) funkcje korelacyjne własne: /funkcje autokorelacyjne/ bieżąca, lokalna oraz średnia procesu stochastycznego nieustalonego wyznacza się odpowiednio z następujących zależności:

$$R_{mm}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [m_1 - m_\mu(t)] [m_2 - m_\mu(t_2)] W_2(m_1, t_1, m_2, t_2) dm_1 dm_2 \quad (72)$$

$$R_{mm}(i, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [m_1 - m_\mu(i)] [m_2 - m_\mu(i)] W_2(m_1, m_2, i, \tau) dm_1 dm_2 \quad (73)$$

$$R_{mm}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (m_1 - m_\mu) (m_2 - m_\mu) W(m_1, m_2, \tau) dm_1 dm_2 \quad (74)$$

Wykorzystując operatory L_N, L_T oraz L_{NT} otrzymamy odpowiedniki wzorów (72-74)

$$R_{mm}(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{m}_i(t) \dot{m}_i(t-\tau) \quad (75)$$

$$R_{mm}(i, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T^{T+\tau} \dot{m}_i(t) \dot{m}_i(t-\tau) dt \quad (76)$$

$$R_{mm}(\tau) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \int_T^{T+\tau} \sum_{i=1}^N \dot{m}_i(t) \dot{m}_i(t-\tau) dt \quad (77)$$

Funkcje korelacyjne: lokalna (76) oraz średnia (77), swoimi własnościami w zasadzie odpowiadają funkcjom korelacyjnym procesu ustalonego, natomiast funkcja korelacyjna bieżąca $R(t, \tau)$ (75) istotnie różni się od funkcji korelacyjnej $R(\tau)$ dla procesu ustalonego. Naturalnie wynika stąd wniosek, że funkcja $R(t, \tau)$ jest nośnikiem informacji o własnościach nieustalonych procesu stochastycznego.

Wobec zależności funkcji $R(t, \tau)$ od momentów odliczania wartości chwilowych procesu, funkcja ta może mieć wartość maksymalną przy $\tau \neq 0$

$$R_{mm}(t, \tau) > R_{mm}(t, 0) \quad (78)$$

Ponadto dla wszystkich rodzajów funkcji korelacyjnych przy spełnieniu warunku

$$M\{\mu^2(t)\} < \infty \quad (79)$$

słuszna jest relacja

$$\lim_{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} R_{mm}(t_1, t_2) = 0 \quad (80)$$

4.3.3.4. Przedział korelacji

W analizie korelacyjnej w celu scharakteryzowania prędkości zaniku korelowalności pomiędzy dwoma przekrojami procesu stochastycznego wprowadzono wielkość nazywaną przedziałem korelacji τ_{kor} . W obszarze $\tau > \tau_{kor}$ przekroje procesu stochastycznego są statystycznie niezależne.

Przedział korelacji jako parametr procesu stochastycznego wykorzystywany jest dla:

- wyboru kroku kwantowania po czasie w przypadku realizacji ciągłych,
- określenia efektywności oceny nadziei matematycznej oraz funkcji korelacyjnej $R_{mm}(t_1, t_2)$,
- określenia ilości informacji otrzymanej w wyniku obserwacji procesu na skończonym odcinku czasu,
- oceny jakości prognozowania procesów.

Przedział korelacji dla procesów stochastycznych nieustalonych zależy od czasu. Dla bieżącej oraz lokalnej funkcji korelacyjnej wzory określające przedział korelacji mają następujące postacie:

$$\Delta \tau_{kor}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_{mm}(t, \tau) d\tau}{2 R_{mm}(t, 0)} \quad (81)$$

$$\Delta \tau_{kor}(i) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_{mm}(t, \tau) d\tau}{2 R_{mm}(i, 0)} \quad (82)$$

Uśredniając $\Delta \tau_{kor}(t)$ po czasie lub $\Delta \tau_{kor}(i)$ po zbiorze, otrzymamy przedział korelacji średni

$$\Delta \tau_{kor} = \overline{\Delta \tau_{kor}(t)} = \langle \Delta \tau_{kor}(i) \rangle \quad (83)$$

4.3.3.5. Rozkład kanoniczny procesu stochastycznego

Rozkładem kanonicznym procesu stochastycznego nieustalonego nazywany sumę elementarnych procesów stochastycznych

$$\mu(t) = m_{\mu}(t) + \sum_i V_i f_i(t) \quad (84)$$

gdzie: $m_{\mu}(t)$ - nadzieja matematyczna procesu stochastycznego nieustalonego $\mu(t)$,

V_i - współczynnik rozkładu kanonicznego,

$f_i(t)$ - funkcja współrzędnych.

W elementach sumy (84) o przypadkowości decydują składniki V_i , które są wielkościami przypadkowymi niekorelowalnymi o $m_V=0$. Własności nieustalonego procesu zapewniają funkcje nieprzypadkowe $f_i(t)$.

Funkcja korelacyjna procesu stochastycznego o rozkładzie kanonicznym

$$\hat{\mu}(t_1) = \sum_i V_i f_i(t_1) \quad (85)$$

$$\hat{\mu}(t_2) = \sum_j V_j f_j(t_2) \quad (86)$$

ma postać

$$\begin{aligned} R_{mm}(t_1, t_2) &= M \left\{ \sum_i V_i f_i(t_1) \sum_j V_j f_j(t_2) \right\} = \\ &= M \left\{ \sum_i \sum_j V_i V_j f_i(t_1) f_j(t_2) \right\} = \sum_i \sum_j f_i(t_1) f_j(t_2) M \{ V_i V_j \} \end{aligned} \quad (87)$$

Ponieważ wielkości V_i oraz V_j nie są skorelowane, to

$$M \{ V_i V_j \} = 0 \quad ; \quad i \neq j \quad (88)$$

$$M \{ V_i V_j \} = M \{ |V_i|^2 \} = D_i \quad ; \quad i = j \quad (89)$$

gdzie D_i jest dyspersją wielkości przypadkowej V_i , której nadzieja matematyczna jest równa zeru.

Uwzględniając zależność (89) we wzorze (87), otrzymamy

$$R_{mm}(t_1, t_2) = \sum_i D_i |f_i(t)|^2 \quad (90)$$

Wzór (90) przedstawia rozkład kanoniczny funkcji korelacyjnej. Dyspersję w rozkładzie kanonicznym określa się z zależności

$$D_{\mu}(t) = R_{mm}(t, t) = \sum_i D_i |f_i(t)|^2 \quad (91)$$

4.3.4. Funkcja strukturalna

W analizie procesów stochastycznych nieustalonych o prostej strukturze używane są funkcje opisujące o innej postaci niż funkcje (72-74)

Dla procesów lokalnie ustalonych funkcja korelacyjna ma postać

$$R_{mm}(t, \tau) = R_{mm}(t - \frac{\tau}{2}, 0) \varphi_{mm}(\tau) \quad (92)$$

gdzie: $R_{mm}(t - \frac{\tau}{2}, 0)$ - wartość dyspersji procesu $\mu(t)$ w momencie $t - \frac{\tau}{2}$,
 $\varphi_{mm}(\tau)$ - funkcja korelacyjna unormowana procesu stochastycznego ustalonego.

W celu opisanego statystycznego procesu stochastycznego nieustalonego z przyrostami ustalonymi, spełniającego warunek

$$M \langle \Delta \mu_{\Delta t}(t) \rangle = M \langle \mu(t + \Delta t) \rangle - \langle \mu(t) \rangle = \text{const} \quad (93)$$

gdzie: $\langle \rangle$ - symbol oznaczający uśrednienie po zbiorze,

$\Delta \mu_{\Delta t} = \mu(t + \Delta t) - \mu(t)$ - przyrost procesu w czasie przesunięcia Δt ,
 używa się funkcji strukturalnej /Kolmogorow/

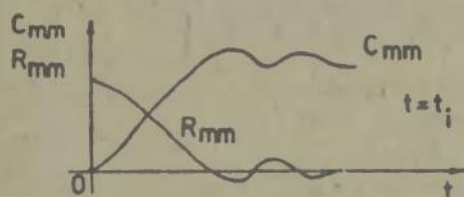
$$C_{mm}(t, t + \tau) = M \{ [\mu(t) - \mu(t - \tau)]^2 \} \quad (94)$$

Wykonując przekształcenia algebraiczne otrzymamy zależność pomiędzy funkcją strukturalną oraz funkcją korelacyjną

$$C_{mm}(t, t - \tau) = R_{mm}(t, t) + R_{mm}(t - \tau, t - \tau) - 2 R_{mm}(t, \tau) + \\ + [m_{\mu}(t)]^2 + [m_{\mu}(t - \tau)]^2 - 2 m_{\mu}(t) m_{\mu}(t - \tau) \quad (95)$$

$$R_{mm}(t, t - \tau) = \frac{1}{2} (-C_{mm}(t, \tau) - [m_{\mu}(t) - m_{\mu}(t - \tau)]^2 + \\ + M \{ [\mu(t) - m_{\mu}(t - \tau)]^2 \} + M \{ [\mu(t - \tau) - m_{\mu}(t)]^2 \}) \quad (96)$$

Przykład funkcji strukturalnej oraz odpowiadającej jej funkcji korelacyjnej pokazano na rysunku 4.



Rys. 4. Funkcja strukturalna oraz odpowiadające jej funkcja korelacyjna

Funkcja strukturalna (94) jest wynikiem analizy korelacyjnej bardziej uogólnionej, ponieważ składniki jej są funkcjami korelacyjnymi.

Analiza strukturalna daje bardziej stabilne charakterystyki w porównaniu z analizą korelacyjną. Parametry funkcji strukturalnej są inwariantne dla niektórych postaci procesów stochastycznych

nieustalonych /np. procesy quasi-ustalone/. Urządzenia analogowe, stosowane do obliczenia funkcji strukturalnej, są prostej budowy /kwadrator nieliniowy/ oraz są bardziej pewne w działaniu niż korelatory. Analiza przebiegu funkcji strukturalnej pozwala wykazać obecność oscylacji, co wykorzystuje się przy określeniu parametrów składowych okresowych procesu stochastycznego.

4.3.5. Analiza widmowa

4.3.5.1. Gęstość widmowa

Analiza widmowa procesów stochastycznych nieustalonych oparta jest na przekształceniu Fouriera. Analiza ta nie ma, w porównaniu z analizą korelacyjną, określonych uogólnień. Stosowanie analizy widmowej upraszcza wiele zagadnień związanych z przekształceniem liniowym.

Rozkład widmowy procesu stochastycznego $\{m_i(t)\}$ jest możliwy, jeżeli każda realizacja $m_i(t)$ ma obraz zespolony Fouriera

$$M_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} m_i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (97)$$

Obrazowi temu odpowiada oryginał będący realizacją $m_i(t)$

$$m_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_i(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (98)$$

Warunkiem dostatecznym spełnienia wzorów (97) oraz (98) jest ciągłość realizacji $m_i(t)$ i jej pochodnej $\dot{m}_i(t)$ w przedziale t_1, t_2 oraz zbieżność całki funkcji $m_i(t)$ w przedziale $(-\infty, \infty)$. Warunek ten jest spełniony praktycznie, ponieważ każdą realizację, trającą

nieskończoność długo można przedstawić w postaci zbioru realizacji o skończonym czasie trwania

$$M_{iT}(\omega) = \int_0^T m_i(t) e^{-j\omega t} dt = S_{iT}(\omega) \quad (99)$$

gdzie $S_{iT}(\omega)$ jest widmem bieżącą realizacją $m_i(t)$ procesu $\{m_i(t)\}$.

Jeżeli wprowadzimy współczynnik normujący $1/T$ do wzoru (99) oraz wykorzystamy zależność określającą widmo bieżące realizacji procesu stochastycznego ustalonego, to na zasadzie analogii otrzymamy dla procesu niestalonego quasi-bieżące widmo w postaci

$$S_T(\omega) = \frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |S_{iT}(\omega)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{T^2} \left\{ \left[\int_0^T m_i(t) \cos \omega t dt \right]^2 + \left[\int_0^T m_i(t) \sin \omega t dt \right]^2 \right\} \quad (100)$$

Widmo mocy procesu stochastycznego niestalonego średnie otrzymuje się z wyrażenia (100) przy przejściu granicznym $T \rightarrow \infty$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} S_T(\omega) \quad (101)$$

Charakterystyki (100) oraz (101) nie opisują ani struktury procesu stochastycznego ani zmian charakterystyk z biegiem czasu.

W celu opisanie zmian w czasie charakterystyk widmowych, wprowadzono nową charakterystykę, a mianowicie widmo mocy chwilowe $S(\omega, t)$ procesu stochastycznego niestalonego. Jest to uśrednione po zbiorze widmo grupy statystycznie identycznych sygnałów. Widmo bieżące określone jest zależnością

$$S_{mm}(\omega, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N S_i(t, \omega) \right\} \quad (102)$$

gdzie $S_i(t, \omega)$ jest energią i -tego składnika

$$S_i(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t m_i(t_1) m_i(t_2) e^{j\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 \quad (103)$$

Określenie widma $S(\omega, t)$ ze wzoru (102) ma tę wadę, że wykorzystuje się funkcję korelacyjną, a więc jest metodą pośrednią.

Wykorzystując wzór (99), otrzymamy odpowiednio: bieżące, lokalne oraz średnie widmo realizacji procesu stochastycznego niestalonego $\mu(t)$

$$S_{mm}(\omega, t) = \frac{\partial}{\partial t} |S_T(\omega)|^2 = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |S_{iT}(\omega)|^2 \right\} \quad (104)$$

$$S_{mm}(\omega, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_{iT}(\omega)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T m_i(t_1) m_i(t_2) e^{j\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 \quad (105)$$

$$S_{mm}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{mm}(\omega, i) \xrightarrow{P} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S_{mm}(\omega, t) dt \quad (106)$$

Jeżeli proces stochastyczny nieustalony ma transformaty Fouriera

$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) e^{-j\omega t} dt \quad (107)$$

$$m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (107a)$$

to gęstość widmowa uogólniona

$$S_{mm}(\omega_1, \omega_2) = M \{ \bar{M}(\omega_1) M(\omega_2) \} \quad (108)$$

jest dwuwymiarowym obrazem funkcji korelacyjnej $R_{mm}(t_1, t_2)$

$$S_{mm}(\omega_1, \omega_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} R_{mm}(t_1, t_2) e^{j(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2 \quad (109)$$

Charakterystykę $S_{mm}(\omega_1, \omega_2)$ nie można wyznaczyć bezpośrednio, ponieważ nie można pomierzyć wielkości $M(\omega)$. Stosuje się metodę pośrednią, w której z realizacji $m(t)$ wyznacza się funkcję korelacyjną, a następnie transformuje się ją do gęstości widmowej.

Obrazem funkcji korelacyjnej określonej wzorem (70) jest gęstość widmowa uogólniona w postaci

$$\begin{aligned} S_{mm}(\omega_1, \omega_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} R_{mm}(\tau, t) \exp \left\{ -j \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \tau + (\omega_2 - \omega_1) t \right] \right\} d\tau dt = \\ &= S_{mm} \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right), (\omega_2 - \omega_1) \right] \end{aligned} \quad (110)$$

Po wprowadzeniu zmiennych $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ oraz $\omega' = \omega_2 - \omega_1$ otrzymamy

$$S_{mm}(\omega, \omega') = M \left\{ \bar{M} \left(\omega - \frac{\omega'}{2} \right) M \left(\omega + \frac{\omega'}{2} \right) \right\} \quad (111)$$

Zapisując funkcję $M(\omega)$ w postaci uogólnionej

$$M(\omega) = M_1(\omega) + j M_2(\omega) \quad (112)$$

oraz podstawiając obrazy $M_1(\omega)$ i $M_2(\omega)$ do wzoru (109) otrzymamy

$$\begin{aligned} S_{mm}(\omega_1, \omega_2) &= M \left\{ [M_1(\omega_1) - j M_2(\omega_1)] [M_1(\omega_2) + j M_2(\omega_2)] \right\} = M \{ M_1(\omega_1) M_1(\omega_2) \} + M \{ M_2(\omega_1) M_2(\omega_2) \} + \\ &+ j [M \{ M_1(\omega_1) M_2(\omega_2) \} - M \{ M_2(\omega_1) M_1(\omega_2) \}] = S_{m_1 m_1}(\omega_1, \omega_2) + S_{m_2 m_2}(\omega_1, \omega_2) - j [S_{m_1 m_2}(\omega_1, \omega_2) - S_{m_2 m_1}(\omega_1, \omega_2)] \end{aligned} \quad (113)$$

Część rzeczywista widma $S_{mm}(\omega_1, \omega_2)$ równa jest sumie funkcji korelacji własnej procesów $M_1(\omega)$ oraz $M_2(\omega)$, a część urojona-różnicy funkcji korelacji wzajemnej procesów $M_1(\omega)$ oraz $M_2(\omega)$. Dla $\omega = \omega_1 = \omega_2$ $S_{mm}(\omega_1, \omega_2)$ jest funkcją rzeczywistą i określa wartość średnią kwadratu procesu $M(\omega)$ dla częstotliwości ω . Stąd wynika wniosek, że widmo dwuczęstotliwościowe $S_{mm}(\omega_1, \omega_2)$ jest miarą korelacji pomiędzy częstotliwościami ω_1 oraz ω_2 procesu stochastycznego nieustalonego.

Widmo dwuczęstotliwościowe wzajemne dwóch procesów stochastycznych o funkcji korelacji wzajemnej $R_{mu}(t_1, t_2)$ wyznacza się z zależności

$$S_{mu}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{mu}(t_1, t_2) e^{j(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2 \quad (114)$$

Łatwo można wykazać, że widmo procesu stochastycznego nieustalonego spełniając warunki

$$S_{mn}(\omega_1, \omega_2) = S_{mm}(\omega_2, \omega_1) = S_{mm}(-\omega_1, -\omega_2) \quad (115)$$

$$S_{mu}(\omega_1, \omega_2) = S_{um}(\omega_2, \omega_1) = S_{mu}(-\omega_1, -\omega_2) \quad (116)$$

Dla procesów stochastycznych o ograniczonej mocy oraz skończonym czasie trwania realizacji, charakterystyki energetyczne można przedstawić we współrzędnych (ω, t) w obszarze $\Delta\omega = \Delta\omega \Delta t$. Wielkość $\Delta V(\omega)$ określa się ze wzoru

$$\Delta V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{mm}(\omega, \omega')}{S_{sr}} \operatorname{sinc} \frac{\omega' T}{2} d\omega' \quad (117)$$

gdzie: $\Delta T = T_{kor}(t)$ - przedział korelacji /w przypadku ogólnym zależy od momentu t /,

S_{sr} - średnia moc procesu dla częstotliwości $\frac{\omega}{2}$ wydzielona w odcinku czasu $[0, T]$

$$S_{sr} = \frac{1}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} S_{mm}(\omega, 0) d\omega \quad (118)$$

Wielkości $\Delta V(\omega)$ oraz S_{sr} tworzą prostokąt o powierzchni równej powierzchni zawartej pod krzywą $S_{mm}(\omega, \omega')$ z funkcją wagową $\operatorname{sinc} \frac{\omega' T}{2}$.

Ze wzorów (117) oraz (118) wynika, że $\Delta V = \frac{1}{T}$ a $T \geq \frac{1}{\Delta\omega}$. Lokalizację widma chwilowego na osi częstotliwości określa się czasem trwania procesu, a na osi t efektywnym pasmem częstotliwości.

4.3.5.2. Pasmo efektywne widna mocy

Odpowiednikiem przedziału korelacji w dziedzinie częstotliwości jest pasmo efektywne widna mocy procesu stochastycznego nieustalonego. Za podstawę określenia tego pasma przyjęto wyrażenie dla widna średniego

$$\Delta\omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(\omega) d\omega}{S_{mm}(0)} \quad (119)$$

lub w postaci

$$\Delta\omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}^2(\omega) d\omega}{S_{mm}^2(0)} \quad (120)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} S_{mm}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{mm}(\tau) d\tau = \frac{R_{mm}(0)}{\pi} \tau_{kor} \quad (121) \\ \tau_{kor} &= \frac{\pi S_{mm}(0)}{R_{mm}(0)} \\ \Delta\omega &= \frac{R_{mm}(0)}{2 S_{mm}(0)} \end{aligned}$$

Wychodząc ze wzoru (119) można łatwo otrzymać pasma efektywne widna bieżącego oraz lokalnego

$$\Delta\omega(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(\omega, t) d\omega}{S_{mm}(0, t)} \quad (122)$$

$$\Delta\omega(i) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(\omega, i) d\omega}{S_{mm}(0, i)} \quad (123)$$

Stosując uśrednienie po czasie oraz uśrednienie po zbiorze, odpowiednio do wzoru (122) oraz (123), otrzymamy średnie pasmo efektywne widna bieżącego i lokalnego

$$\overline{\Delta\omega(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(\omega, t) d\omega}{S_{mm}(0, t)} dt \quad (124)$$

$$\langle \Delta\omega(i) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(\omega, i) d\omega}{S_{mm}(0, i)} \quad (125)$$

4.4. Zasada uogólniona Wienera-Chinchina

Zasada Wienera-Chinchina przekształceniem Fouriera wiąże ze sobą funkcję korelacyjną oraz widmo mocy. Zgodnie z tym twierdzeniem widma mocy oraz funkcje korelacyjne średnie, lokalne oraz bieżące wyznacza się z zależności

$$S(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \int_0^T R(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (126)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (127)$$

$$S(\omega, i) = \int_0^{\infty} R(\omega, i) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (128)$$

$$R(\omega, i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega, i) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (129)$$

$$S(\omega, \tau) = \int_0^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (130)$$

$$R(\omega, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega, t) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (131)$$

Zależności (130) oraz (131) można zapisać w postaciach całkowicie transformowanych

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} S(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (132)$$

$$S(\omega_1, \omega_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} R(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (133)$$

Zależności (132) oraz (133) stanowią treść zasady uogólnionej Wienera-Chinchina dla procesów stochastycznych niustalonych.

Wzory (132) oraz (133) można otrzymać w inny sposób. W tym celu proces stochastyczny należy przedstawić w postaci całki Riemanna-

-Stieltessa /rozkład widmowy Kolmogorowa-Lewyego/

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega) \quad (134)$$

gdzie $F(\omega)$ jest zespoloną funkcją przypadkową częstotliwości różniaskowalną w sensie średniokwadratowym.

Funkcja korelacyjna takiego procesu ma postać

$$R(t_1, t_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} \cdot M\{dF(\omega_1) dF(\omega_2)\} \quad (135)$$

Z warunku

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M \left\{ \left| \frac{F(\omega + \varepsilon) - F(\omega)}{\varepsilon} - F'(\omega) \right|^2 \right\} = 0 \quad (136)$$

wyznacza się funkcję $F(\omega)$ taką, że

$$M(\omega) \xrightarrow{p} F'(\omega) \quad (137)$$

z prawdopodobieństwem równym jedności, tj. dla całego zbioru realizacji. Stąd otrzymamy

$$S(\omega_1, \omega_2) = M \{ M(\omega_1) \overline{M(\omega_2)} \} \quad (138)$$

Wprowadzenie funkcji (138) do wzoru (135) daje zależność (132).

4.5. Ergodyczność procesów stochastycznych nieustalonych

Dla procesu ustalonego przy spełnieniu określonych warunków zasadę ergodyczności można zapisać w postaci relacji

$$\left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\left| m_{\mu}(t) - \frac{1}{2T} \int_{-T}^T m(t) dt \right|^2 \right] \right\rangle = 0 \quad (139)$$

gdzie: $\langle \rangle$ - uśrednienie po zbiorze,

$m_{\mu}(t)$ - nadzieja matematyczna,

$m(t)$ - realizacja procesu stochastycznego $\Xi(\mu, t)$.

Własność (139) jest bardzo ważna w przypadku konfrontacji teorii statystycznej z doświadczeniem. Założenie ergodyczności procesów ustalonych ułatwiło w znacznym stopniu obliczenie charakterystyk statystycznych. Zamiast uśrednienia po zbiorze stosuje się uśrednienie po czasie, wykorzystując jedną realizację procesu stochastycznego. Zależność od czasu charakterystyk statystycznych procesu stochastycznego nieustalonego w znacznym stopniu utrudnia formułowanie twierdzenia

ergodyczności. Wyróżniamy procesy stochastyczne niestalone o bieżącej oraz lokalnej ergodyczności.

Własności ergodyczne procesów stochastycznych niestalonych powiąsane są z asymptotycznym zachowaniem się charakterystyk statystycznych przy $T \rightarrow \infty$. Stosując przejście graniczne do lokalnej charakterystyki statystycznej otrzymamy zależność

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-T}^t q(m(t)) dt = \bar{p} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-T}^t Q\{\mu(t)\} dt \quad (140)$$

w której charakterystyka $Q\{\mu(t)\}$ opisana jest wzorem (3).

Zależność (140) oznacza zbliżność probabilistyczną charakterystyki statystycznej lokalnej do charakterystyki średniej

$$Q(i) = Q; (T \rightarrow \infty) \quad (141)$$

Spełnienie tej zależności jest uwarunkowane własnościami funkcji korelacyjnej.

Wychodząc ze wzoru definiującego funkcję korelacyjną $R_{mm}(t_1, t_2)$ procesu $\mu(t)$

$$R_{mm}(t_1, t_2) = M\{\dot{\mu}(t_1) \dot{\mu}(t_2)\} \quad (142)$$

oraz wykorzystując operator L_T i całkując otrzymane wyrażenie w obszarze kwadratowym TT otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} \iint_T W(t_1, \tilde{t}_1) \overline{W(t_2, \tilde{t}_2)} R_{mm}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \\ = M\left\{ \int_T W(t_1, \tilde{t}_1) \dot{m}(t_1) dt_1 \int_T W(t_2, \tilde{t}_2) \dot{m}(t_2) dt_2 \right\} \end{aligned} \quad (143)$$

Równanie to dla funkcji wagowej

$$W(t, \tilde{t}) = \frac{1}{T} \quad (144)$$

przyjmuje postać

$$M\left\{ \left| \frac{1}{T} \int_T \dot{m}(t) dt \right|^2 \right\} = \frac{1}{T^2} \iint_T R_{mm}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (145)$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby wyrażenie

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T \dot{m}(t) dt = 0 \quad (146)$$

przy $T \rightarrow \infty$ było równe zero jest spełnienie relacji

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \iint_0^T R_{mm}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0 \quad (147)$$

lub w innym zapisie

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D \{M_T \{ \mu(t) \} \} = 0 \quad (148)$$

gdzie wyrażenie wewnętrzne tej zależności oznacza nadzieję matematyczną

$$M_T \{ \mu(t) \} = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) dt \quad (149)$$

Dla procesów stochastycznych ustalonych warunków (147) na postać

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) R_{mm}(t) dt \quad (150)$$

W celu uwidocznienia jednorodności realizacji procesu stochastycznego w sensie statystycznym wprowadzono pojęcie bieżącej ergodyczności. Dla procesów posiadających tę własność pomiar bieżącej charakterystyki statystycznej dokonuje się przez uśrednienie po czasie.

Proces stochastyczny nieustalony $\mu(t)$ ma własność bieżącej ergodyczności jeżeli dla dowolnego k i dowolnie ustalonych wartości $\mu(t)$ oraz T spełniona jest nierówność

$$P \{ [Q_T(t) - Q_{NT}^*(t, i)] < \epsilon \} \gg 1 - \delta_\epsilon \quad (151)$$

gdzie:

$$Q_{NT}^*(t, i) = \frac{1}{(N+1)T} \sum_{k=i-\frac{N}{2}}^{i+\frac{N}{2}} \int_{t-T}^T q(m_i(t)) dt \quad (152)$$

$$Q_T(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_{NT}^*(t, i) \quad (153)$$

ϵ - pewna dowolnie wybrana mała wielkość,

$N_\epsilon, \delta_\epsilon$ - charakterystyki objętości wyboru.

Oznaką, że proces $\mu(t)$ spełnia własność ergodyczności bieżącej jest normalny charakter rozkładu błędu pomiaru

$$\Delta Q_{NT}^*(t, i) = Q_T(t) - Q_{NT}^*(t, i) \quad (154)$$

W analizie procesów stochastycznych nieustalonych można założyć, że badany proces mało odbiega od ergodycznego i stosować operator L_T .

Jeżeli proces $\mu(t)$ nie spełnia warunku ergodyczności, to

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P \{ |Q_T^*(t) - Q(t)| < \epsilon \} = 0 \quad (155)$$

gdzie: $Q_T^*(t)$ - charakterystyka statystyczna obliczona po czasie,
 $Q(t)$ - charakterystyka statystyczna obliczona po zbiorze.

Zależność (155) oznacza, że prawdopodobieństwo przy $T \rightarrow \infty$ nie ma granicy.

Ergodyczność procesów stochastycznych niustalonych trudno jest stwierdzić w praktyce i dlatego własność tę przyjęto jako hipotezę.

4.6. Operatory stosowane w analizie procesów stochastycznych niustalonych

Do określenia charakterystyk statystycznych procesów stochastycznych niustalonych używa się poza operatorem L_N (3), również operatora L_T określonego wzorem

$$Q\{\mu(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(m(t)) dt \quad (156)$$

Z analizy własności charakterystyk statystycznych wyznaczonych za pomocą operatorów L_N oraz L_T wynika, że dla procesów stochastycznych niustalonych ergodycznych charakterystykę $Q(t)$ wyznacza się przy użyciu operatora L_N , a charakterystyki $Q(i)$ oraz Q wyznacza się stosując operator L_T . Dla procesów stochastycznych niustalonych nieergodycznych operatora L_N używa się do wyznaczenia charakterystyk $Q(t)$, a charakterystykę $Q(i)$ określa się stosując operator L_T .

Procedura wyznaczenia charakterystyk zawiera następujące etapy:

- przekształcenie analogowe realizacji procesu,
- działanie na proces operatorem,
- uśrednienie,
- porównanie z miarą /przed działaniem operatora miarą jest proces $\mu_0(t)$; po działaniu operatorem - proces otrzymany na wyjściu z filtra $g(\xi(t))_0$; po uśrednieniu miarą jest charakterystyka $Q\{\mu(t)\}$ /.

Proces $\mu_0(t)$ jest procesem stochastycznym wzorcowym, którego charakterystyki probabilistyczne są znane z dużą dokładnością.

Operator, w oparciu o który można zbudować urządzenie do analizy procesów stochastycznych niustalonych, powinien być optymalny. Realizacja takiego operatora oparta jest na teorii filtracji Kolmogorowa-Wienera, teorii gier oraz metod programowania matematycznego.

Praktycznie realizuje się operatory quasi-optymalne. Do nich można zaliczyć:

- operator średniej bieżącej,
- operator uśrednienia wykładniczego,
- operator Bernstejna.

Operator średniej bieżącej

$$L_{\lambda}\{\mu(t)\} = \frac{\lambda}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} m(t) dt \quad (157)$$

gdzie: λ - wartość własna operatora /niezależna od czasu/.

T - przedział uśrednienia lub długość pamięci operatora.

stosowany jest do analizy korelacyjnej procesów stochastycznych nieustalonych z liniową i nieliniową zależnością nadziewi matematycznej $M\{\mu(t)\}$ od czasu /funkcja wykładnicza, trygonometryczna, hiperboliczna/.

Błąd uśrednienia w sensie najmniejszych kwadratów określony jest wyrażeniem

$$\varepsilon = \sqrt{M\{M\{\mu(t)\} - L_{\lambda}\{\mu(t)\}\}^2} \quad (158)$$

lub wyrażeniem

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{T} \sqrt{\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} R_{mm}(t_1, t_2) dt_1 dt_2} \quad (159)$$

Dla procesów o małym przedziale korelowalności realizacji całka wyrażenia podpierwiastkowego (159) jest równa $2\sigma^2\tau_0/T$. Stąd wzór (159) przyjmie postać

$$\varepsilon \approx \lambda \sigma \sqrt{\frac{2\tau_0}{T}} \quad (160)$$

gdzie: τ_0 - przedział korelacji procesu $\mu(t)$.

λ - parametr określony charakterem $M\{\mu(t)\}$,

$\lambda=1$ - funkcja liniowa,

$\lambda = \frac{\beta T}{2} \sin \frac{\beta T}{2}$ - funkcja trygonometryczna,

$\lambda = \frac{\alpha T}{2} \sinh \frac{\alpha T}{2}$ - funkcja hiperboliczna i wykładnicza

α, β - wielkości stałe dowolne.

Operator bieżącej średniej / operator najprostszy $\lambda=1$ / może występować pod dwiema postaciami

$$\begin{aligned} L_T^{(1)}\{\mu(t)\} &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t m(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^{t-T} m(t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^t m(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^{t-T} m(t) dt \end{aligned} \quad (161)$$

$$L_T^{(2)}\{\mu(t)\} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} m(t) dt \quad (162)$$

Operatory (161) oraz (162) powiązane są ze sobą zależnością

$$L_T^{(1)}\left(t+\frac{T}{2}\right) = L_T^{(2)}(t) \quad (163)$$

Operatory te są liniowe

$$L\{\alpha\mu_1(t) + \beta\mu_2(t)\} = \alpha L\{\mu_1(t)\} + \beta L\{\mu_2(t)\} \quad (164)$$

gdzie α oraz β są wielkościami stałymi.

Operator (161) dla funkcji wagowej nissymetrycznej jest wygodniejszy od operatora (162), ponieważ w realizacji aparaturowej nie wymaga stosowania urządzenia wyprzedzenia. Dokładniejsze wyniki uzyskuje się przy zastosowaniu operatora (162).

Operator uśrednienia wykładniczego w postaci

$$E_T \{\mu(t)\} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\frac{t-\tau}{T}} m(\tau) d\tau \quad (165)$$

może być zrealizowany filtrem o funkcji przejścia w postaci

$$W(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (166)$$

Uśrednienie operatorem (165) realizuje się efektywnie wówczas, gdy proces stochastyczny niestabilny daje się sprowadzić do procesu quasi-ustalonego. Dla procesów wolno zmieniających się w czasie stosowanie filtru o funkcji przejścia (166) oraz filtru o funkcji przejścia /operator (161) /

$$W(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{sT} \quad (167)$$

daje wyniki praktycznie jednakowe.

Operator Bernstejna jest w pewnym stopniu uogólnieniem operatorów L_T oraz E_T . Funkcja wagowa tego operatora ma postać

$$w(t, \tau) = \sqrt{\frac{n}{2\pi t(1-t)}} \exp\left[-\frac{n(\tau-t)^2}{2t(1-t)}\right] \quad (168)$$

Operator Bernstejna w postaci całkowej

$$B\{\mu(t)\} = \int_0^1 w(t, \tau) m(\tau) d\tau \quad (169)$$

jest operatorem konstrukcji bardziej złożonej niż operatory L_T i E_T . Modyfikacją ustaloną tego operatora jest wyrażenie

$$B_\mu\{\mu(t)\} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma \Phi\left(\frac{t}{2\sigma}\right)} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} m(\tau) \exp\left[-\frac{(t-\tau)^2}{\sigma^2}\right] d\tau \quad (170)$$

gdzie: σ - stała,

$\Phi\left(\frac{t}{2\sigma}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{t/2\sigma} e^{-t^2} dt$ - funkcja Laplace'a.

Operator Bernstejna jest stosowany do uśrednienia procesów stochastycznych niestabilnych z nadzieją matematyczną o przebiegu li-

niowa.

$$M\{\mu(t)\} = at + b \quad (171)$$

4.7. Dokładność wyznaczenia charakterystyk statystycznych

Procedura wyznaczenia charakterystyk statystycznych procesów stochastycznych niestabilnych obciążona jest błędem $\Delta Q^* \{\mu(t)\}$. Główne czynniki warunkujące występowanie błędów są następujące:

- skończona objętość realizacji,
- brak zbieżności statystycznej estymatora,
- obciążalność estymatora,
- aproksymacja pośrednich realizacji procesu /odtworzenie zbioru realizacji/,
- dokładność klasyfikacji procesu,
- sposób realizacji aparaturowej pomiaru procesu.

Błąd $\Delta Q^* \{\mu(t)\}$ oraz jego forma kwadratowa określone są następującymi wyrażeniami:

$$\langle \Delta Q^* \{\mu(t)\} \rangle = \langle [Q\{\mu(t)\} - Q^* \{\mu(t)\}] \rangle \quad (172)$$

$$\langle \Delta^2 Q^* \{\mu(t)\} \rangle = \langle [Q\{\mu(t)\} - Q^* \{\mu(t)\}]^2 \rangle \quad (173)$$

gdzie:

$$\langle Q^* \{\mu(t)\} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i^* \{\mu(t)\}$$

$$\langle \Delta^2 Q^* \{\mu(t)\} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta^2 Q_i^* \{\mu(t)\} \quad (174)$$

$\langle \rangle$ - uśrednienie po zbiorze,

i - i -ta realizacja.

Błąd ogólny określony jest sumą błędów

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2 Q^* \{\mu(t)\} \rangle = & \langle \Delta_{ob_1}^2 Q^* \{\mu(t)\} \rangle + \langle \Delta_m^2 Q^* \{\mu(t)\} \rangle + \\ & + \langle \Delta_L^2 Q^* \{\mu(t)\} \rangle + \langle \Delta_{kl}^2 Q^* \{\mu(t)\} \rangle \end{aligned} \quad (175)$$

gdzie: $\Delta_{ob_1}^2 Q^* \{\mu(t)\} = Q\{\mu(t)\} - Q^* \{\mu(t)\}$ - błąd wynikający z ograniczonej objętości realizacji,

$$\Delta_m Q^* \{ \mu(t) \} = Q \{ \mu(t) \} - \langle Q^* \{ \mu(t) \} \rangle$$

- błąd wynikający z rozbieżności pomiędzy wartościami nadziej matematycznej, wyznaczonej i rzeczywistej,

$$\Delta_L Q^* \{ \mu(t) \} = \langle Q^* \{ \mu(t) \} \rangle - Q \{ \mu(t) \}$$

- błąd wynikający z zastosowania operatora I_T lub I_M ,

$$\Delta_{kl} Q^* \{ \mu(t) \} = \Delta Q^* \{ \mu(t) \} - \Delta Q_{opt}^* \{ \mu(t) \}$$

- błąd wynikający z nieprawidłowego zakwalifikowania procesu.

4.8. Typy procesów stochastycznych niestabilnych

Procesy stochastyczne niestabilne mogą być klasyfikowane ze względu na:

- rząd procesu stochastycznego, od którego pojawiają się własności niestabilne /analiza ciągu funkcji korelacyjnych/,
- możliwość sprowadzenia do procesu ustalonego / istnieje operator realizujący więc pomiędzy procesem stochastycznym ustalonym i niestabilnym /,
- prędkość zmian charakterystyk statystycznych /różnica pomiędzy procesem z szybką i wolną zmianą własności niestabilnej określonej prędkością zmian chwilowych wartości procesu oraz prędkością zmian charakterystyk względem wielkości bieżących/,
- ergodyczność uogólnioną lub bieżącą.

Wyróżniamy następujące typy procesów stochastycznych niestabilnych:

- elementarne,
- dające się sprowadzić do procesów stochastycznych ustalonych,
- quasi-ustalone,
- addytywne,
- multiplikacyjne,
- separacyjne,
- okresowe lub prawie okresowe.

Elementarny proces stochastyczny niestabilny w zapisie uogólnionym ma postać

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) \quad (176)$$

gdzie: c_i - wielkość przypadkowa,

$\varphi_i(t)$ - funkcja nieprzypadkowa /wielomian potęgowy, wielomian trygonometryczny lub inna funkcja nierówna tożsamości-

wo funkcji wykładniczej.

Funkcje korelacyjne procesu (176) dla $M\{c_i\} = 0$ oraz przypadku korelowalności lub niekorelowalności współczynników c_i wyrażają się z poniższych zależności

$$R_{mm}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M\{c_i c_k\} \varphi_i(t_1) \varphi_k(t_2) \quad (177)$$

$$R_{mm}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n M\{c_i c_i\} \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) \quad (178)$$

Procesy stochastyczne określone wzorem (176), dla których słuszne jest prognozowanie wartości chwilowych oraz określenie zachowania procesu w przyszłości na podstawie dowolnie małego odcinka realizacji, nazywane są procesami singularnymi. Do tej grupy procesów należą procesy stochastyczne nieustalone analityczne

$$\mu(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \quad (179)$$

$$\mu(t) = \sum_{i=0}^n (c_i' \cos \omega_i t + c_i'' \sin \omega_i t) \quad (180)$$

Wiele procesów przypadkowych, które można obserwować w urządzeniach przemysłowych, dających realizacje o skończonym czasie trwania można łatwo przybliżyć procesem stochastycznym analitycznym typu (179). Przybliżenie takie w znacznym stopniu upraszcza analizę matematyczną procesu.

Do klasy procesów stochastycznych nieustalonych, dających się sprowadzić do ustalonych zaliczane są procesy, których realizacje mają postać

$$\mu(t) = \gamma(t) \varphi(t) + \psi(t) \quad (181)$$

gdzie: $\gamma(t)$ - proces stochastyczny ustalony,
 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ - nieprzypadkowe funkcje czasu.

Charakterystyki statystyczne tego procesu określone są zależnościami

$$\begin{aligned} m_\mu(t) &= \varphi(t) m_\gamma + \psi(t) \\ D_\mu(t) &= R_{mm}(t, t) = \varphi^2(t) R_{mm}(0) \\ R_{mm}(t_1, t_2) &= \varphi(t_1) \varphi(t_2) R_{mm}(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (182)$$

Procesy stochastyczne quasi-ustalone /prawie ustalone/ określone są warunkami

$$M\{\mu(t)\} = \begin{cases} m\mu, & \tau_k \leq t \leq T - \tau_k \\ 0, & \tau_k > t > T - \tau_k \end{cases} \quad (183)$$

$$R_{mm}(t_1, t_2) = \begin{cases} R_{mm}(\tau), & \tau_k \leq t \leq T - \tau_k \\ 0, & t > T - \tau_k \end{cases} \quad (184)$$

gdzie: T - długość realizacji /w jednostkach oszac./

τ_k - przedział korelacji

Z warunków (183) oraz (184) wynika wniosek, że procesy stochastyczne nieustalone /procesy ze zjawiskami burzliwości/ dające się przedstawić w postaci odcinków procesów ustalonych można podczas analizy traktować jako procesy quasi-ustalone.

Proces stochastyczny quasi-ustalony można zapisać w postaci

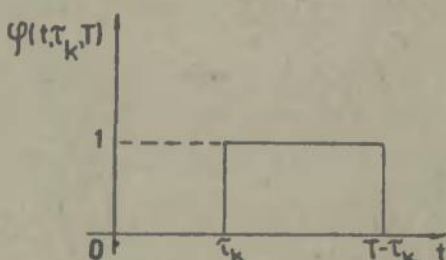
$$\mu(t) = \mu_s(t) \varphi(t, \tau_k, T) \quad (185)$$

gdzie: $\mu_s(t)$ - proces stochastyczny ustalony,

$\varphi(t, \tau_k, T)$ - charakterystyka czasowa filtru matematycznego.

Funkcja $\varphi(t, \tau_k, T)$ określona jest zależnością /rysunek 5/

$$\varphi(t, \tau_k, T) = 1(t - \tau_k) - 1[t - (T - \tau_k)] \quad (186)$$



Rys. 5. Obraz graficzny funkcji $\varphi(t, \tau_k, T)$

Funkcja korelacyjna procesu (185) ma postać

$$\begin{aligned} R_{mm}(t_1, t_2) &= R_{mm}(t, t - \tau) = \\ &= M\{\dot{\mu}(t_1) \dot{\mu}(t_2)\} = \{1(t - \tau_k) - \\ &\quad - 1[t - (T - \tau_k)]\} \cdot \{1(t + T - \tau_k) - \\ &\quad - 1[t - (T - \tau_k) + \tau]\} R_{mm}(\tau) \end{aligned} \quad (187)$$

Z zależności (187) wynika, że funkcja korelacyjna w otoczeniu punktu τ_k zależy tylko od argumentu t , a więc proces stochastyczny (185)

jest procesem ustalonym tylko na odcinku $\tau_k \leq t \leq T - \tau_k$.

Addytywne procesy stochastyczne nieustalone opisane są zależnością

$$\mu(t) = \eta(t) + \psi(t) \quad (188)$$

gdzie: $\eta(t)$ - proces stochastyczny ustalony,

$\psi(t)$ - funkcja nieprzypadkowa

$$\psi(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \quad (189)$$

Funkcja korelacyjna procesu (188) ma postać

$$R_{\mu\mu}(t_1, t_2) = M\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} = R_{\eta\eta}(\tau) \quad (190)$$

Do procesów addytywnych należą procesy z przyrostami ustalonymi /procesy Poissona i Wienera-Levy'ego/ zapisane w postaci

$$\eta(t) = \mu(t+\tau) - \mu(t) \quad (191)$$

Procesy te spełniają warunek

$$M\langle \Delta\mu_{\Delta t}(t) \rangle = M\langle \mu(t+\Delta t) \rangle - \langle \mu(t) \rangle = \text{const} \quad (192)$$

gdzie: $\langle \rangle$ - uśrednienie po zbiorze,

$\Delta\mu_{\Delta t} = \mu(t+\Delta t) - \mu(t)$ - przyrost procesu za czas przesunięcia t i mają funkcję korelacyjną w postaci

$$R_{\eta\eta}(t, \tau) = \frac{1}{2} \{ R_{\mu\mu}(t, 0) + R_{\mu\mu}(t - \tau, 0) - R_{\Delta\mu}(\tau, 0) \} \quad (193)$$

gdzie $R_{\Delta\mu}(\tau)$ jest funkcją korelacyjną procesu $\Delta\mu_{\Delta t}$.

Stąd wynika wniosek, że procesy stochastyczne ustalone są szczególnym przypadkiem procesu z przyrostami ustalonymi.

Zastosowanie teorii procesów z przyrostami ustalonymi jest wówczas celowe, gdy proces rzeczywisty charakteryzuje się wolnymi liniowymi zmianami wartości średniej. Ze względu na trudność centrowania procesów z przyrostami ustalonymi, do ich analizy używa się funkcji strukturalnej (94).

Procesy stochastyczne nieustalone multiplikacyjne opisane są zależnościami

$$\mu(t) = \mu'(t) \varphi(t) \quad (194)$$

$$\mu(t) = \mu'(t) \gamma(t) \quad (195)$$

gdzie: $\varphi(t)$ - funkcja nieprzypadkowa,

$\mu'(t)$ - proces stochastyczny ustalony lub nieustalony,

$\gamma(t)$ - proces stochastyczny.

Funkcja korelacyjny procesu (194) ma postać

$$R_{mm}(t_1, t_2) = M \{ \mu'(t_1) \mu'(t_2) \} = \varphi(t_1) \varphi(t_2) R_{\mu\mu}(t_1, t_2) \quad (196)$$

Jeżeli procesy $\mu'(t)$ oraz $\gamma(t)$ są statystycznie zależne, to proces $\mu(t)$ jest procesem stochastycznym nieustalonym okresowym. Gdy procesy $\mu(t)$ oraz $\gamma(t)$ są statystycznie niezależne, to proces $\mu(t)$ jest procesem stochastycznym z modulowaną amplitudą.

Proces stochastyczny nieustalony separacyjny opisany jest zależnością

$$\mu(t) = \sum_k \mu_k(t) \quad (197)$$

Funkcja korelacyjna takiego procesu o składowych nieskorelowanych zachowuje separatywność sumy

$$R_{mm}(t_1, t_2) = \sum_k A_k(t_1) B_k(t_2) \quad (198)$$

oraz separatywność iloczynu

$$R_{mm}(t_1, t_2) = [A(t_1)A(t_2)][B(t_1)B(t_2)] \quad (199)$$

Procesy stochastyczne okresowe spełniają następujące zależności:

$$W(m_1, t_1, \dots, m_n, t_n) = W(m_1, t_1 + T, \dots, m_n, t_n + T) \quad (200)$$

$$M \{ \mu(t) \} = M \{ \mu(t + T) \} \quad (201)$$

$$D\mu(t) = D\mu(t + T) \quad (202)$$

$$R_{mm}(t, t+T) = R_{mm}(t+T, t+T+T) \quad (203)$$

Charakterystyki statystyczne procesu okresowego oblicza się w oparciu o jedną realizację. Przykładem procesu okresowego jest ruch brownowski ze zmianą okresową parametrów cieczy.

Jeżeli proces okresowy ma postać

$$\mu(t) = \eta(t) \cos \omega t \quad (204)$$

gdzie $\eta(t)$ jest procesem stochastycznym ustalonym o zerowej nadziei

matematycznej, to funkcja korelacyjna ma postać

$$R_{mm}(t_1, t_2) = M\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 = \frac{1}{2} R_{\eta\eta}(t_2 - t_1) [\cos \omega(t_2 - t_1) + \cos \omega(t_1 + t_2)] \quad (205)$$

Wprowadzając nowe zmienne

$$\begin{aligned} \tau &= t_2 - t_1 \\ t &= \frac{t_1 + t_2}{2} \end{aligned}$$

do wyrażenia (205) otrzymamy

$$R_{mm}(t, \tau) = \frac{1}{2} R_{\eta\eta}(\tau) [\cos \omega \tau + \cos 2\omega t] \quad (206)$$

Prawa część zależności (206) jest sumą charakterystyk statystycznych dwóch procesów separacyjnych.

Jeżeli okres T jest prawie okresem T_ε , to proces stochastyczny nieustalony spełnia następujące warunki

$$|W(m_1, t_1; \dots; m_n, t_n) - W(m_1, t + T_\varepsilon; \dots; m_n, t_n + T_\varepsilon)| < \varepsilon \quad (207)$$

$$|M\{\mu(t)\} - M\{\mu(t + T_\varepsilon)\}| < \varepsilon_1 \quad (208)$$

$$|R_{mm}(t, t + \tau) - R_{mm}(t + T_\varepsilon, t + \tau + T_\varepsilon)| < \varepsilon_2 \quad (209)$$

gdzie ε , ε_1 oraz ε_2 są wielkościami stałymi dodatnimi dowolnie małymi. Proces spełniający warunki (207-209) nazywany jest procesem stochastycznym nieustalonym prawie okresowym.

4.9. Estymacja charakterystyk statystycznych procesów stochastycznych nieustalonych

Analiza korelacyjna jest najefektywniejszą metodą badania procesów stochastycznych. W celu wyznaczenia funkcji autokorelacyjnej oraz funkcji korelacji wzajemnej wykorzystywane są korelatory. Prawie wszystkie korelatory zbudowane są w oparciu o operatory wykorzystujące pojedynczą realizację procesu stochastycznego. Większość procesów fizycznych jest procesami przypadkowymi nieustalonymi/ lub badacza interesuje charakter harmonicznej, nisko częstotliwościowej/, dla których obliczenia charakterystyk przeprowadza się dla zbioru reali-

sacji. Obliczenia charakterystyk statystycznych są bardzo pracochłonne i równocześnie są to obliczenia elementarne. Dlatego należy je realizować przy użyciu elektronicznej techniki obliczeniowej. Uniwersalne maszyny cyfrowe mają tę przewagę nad korelatorami, że realizacje można opracowywać dowolnymi metodami. Konieczne jest w tym przypadku urządzić wyciągające realizacje.

4.9.1. Estymacja charakterystyk probabilistycznych

Wyznaczenie funkcji rozkładu prawdopodobieństwa całkowitej (F) oraz różniczkowej (w) wiąże się z określeniem częstotliwości trafienia i względnego czasu przebywania chwilowych wartości badanego procesu. Częstotliwość trafienia określa ocenę charakterystyk probabilistycznych bieżących oraz średnich. Względny czas przebywania wartości chwilowych procesu w pewnym ustalonym obszarze określa charakterystyki lokalne oraz średnie /warunek ergodyczności/. W ten sposób całkowite funkcje rozkładu prawdopodobieństwa, odpowiednio: bieżącą, lokalną oraz średnią, określa się przy użyciu następujących estymatorów operatora L_N^M :

$$F_N^*(m, t) = \frac{n_{\Delta m}(t)}{N} \quad (210)$$

gdzie: F^* - estymator charakterystyki F ,
 $n_{\Delta m}(t)$ - liczba trafień wartości chwilowych procesu w obszar $m < m(t) \leq m + \Delta m$,
 N - liczba wartości chwilowych procesu $\mu(t)$ w momencie t ,

$$F_N^*(m, i) = \frac{n}{N} \quad (211)$$

$$F_N^*(m) = \left(\frac{n}{N} \right) \quad (212)$$

Symbol () we wzorze (212) oznacza, że obliczenia przeprowadza się dla momentów przypadkowych przy równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa w przedziale $[0, T]$. Zależność (211) słuszna jest dla procesów ergodycznych. Liczbę trafień n określa się w momentach przypadkowych oraz zakłada się, że rozkład prawdopodobieństwa ich pojawienia się w przedziale $[0, T]$ jest równomierny.

Jeżeli proces stochastyczny nieustalony ma własność ergodyczności bieżącej, to do oceny funkcji F można użyć operatora L_N^M . Stąd odpowiednio funkcje całkowite rozkładu prawdopodobieństwa: bieżąca, lokalna

oraz średnia określa się estymatorami / estymatory te mogą dać duży błąd/

$$F_T^*(m, t); F_T^*(m, i); F_T^*(m) = \frac{\sum_{i=1}^{n_T} \Delta t_i}{T} \quad (213)$$

gdzie: $[0, T]$ - przedział czasu, w którym analizuje się proces,

Δt_i - i-ty przedział czasu, odpowiadający wartościom realizacji $m(t)$ rozmieszczonym w przedziale wartości $[m < m(t) \leq m + \Delta m]$ /rysunek 6/,

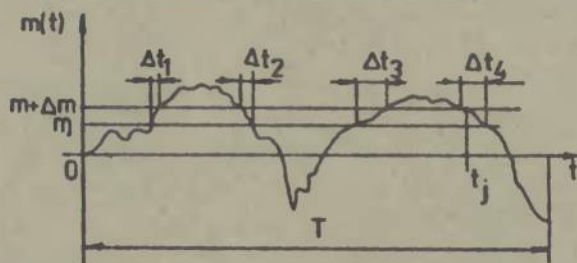
n_T - ogólna liczba przekrojów realizacji $m(t)$ dla poziomu Δm .

Obliczenie funkcji

F_T^m estymatorem (213) jest dopuszczalne wówczas, gdy błąd wynikły z rozbieżności statystycznej oraz obciążalności estymatora nie przewyższa określonego poziomu.

Stosowanie estymatora (213) do obliczenia F_T^m wymaga spełnienia przez proces stochastyczny nieustalony uogólnionej ergodyczności.

Estymator (213) jest zbieżny statystycznie tylko dla charakterystyki lokalnej oraz średniej



Rys. 6. Określenie funkcji rozkładu prawdopodobieństwa F_T^m

$$F(m, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N^*(m, t) \neq \lim_{T \rightarrow \infty} F_T^*(m, t) \quad (214)$$

$$F(m, i) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_T^*(m, i) \quad (215)$$

$$F(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N^*(m) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_T^*(m) \quad (216)$$

Dla małych wartości Δm różniczkową funkcję rozkładu prawdopodobieństwa określa się z zależności /dla procesu ustalonego/

$$F[m < m(t) < m + \Delta m] \approx W(m) dm \quad (217)$$

Wykorzystując tę zależność otrzymamy

$$w_w^*(m, t) = \frac{1}{\Delta m} \frac{n(t)}{N} \quad (218)$$

$$w_T^*(m, t) = \frac{1}{\Delta m} \frac{\sum_{i=1}^{n_T} \Delta t_i}{T} \quad (219)$$

$$w_T^*(m, i) = \frac{1}{\Delta m} \frac{\sum_{i=1}^{n_T} \Delta t_i}{T} \quad (220)$$

$$w_N^*(m) = \frac{1}{\Delta m} \frac{n}{N} \quad (221)$$

$$w_T^*(m) = \frac{1}{\Delta m} \frac{\sum_{i=1}^{n_T} \Delta t_i}{T} \quad (222)$$

Przy przejściu granicznym $\Delta m \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ oraz $T \rightarrow 0$ spełnione są zależności

$$W(m, t) = \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta m} w_N^*(m, t) \quad (223)$$

$$W(m) = \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta m} w_N^*(m) \quad (224)$$

$$W(m, i) = \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta m} w_T^*(m, i) \quad (225)$$

$$W(m) = \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta m} w_T^*(m) \quad (226)$$

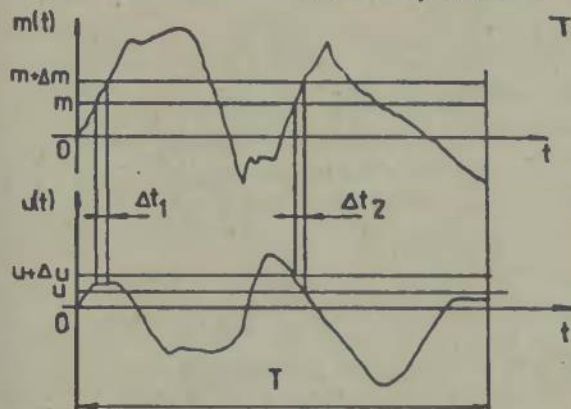
$$W(m, i) \neq \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta m} w_N^*(m, i) \quad (227)$$

$$W(m, t) \neq \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta m} w_T^*(m, t) \quad (228)$$

*Wzajemną całkową funkcję rozkładu prawdopodobieństwa oraz różnic-

kową procesów $\mu(t)$ oraz $\eta(t)$ wyznacza się w oparciu o estymatory otrzymane na bazie wzoru (27) /zakłada się, że estymator F_T^m dla lokalnej i średniej charakterystyki statystycznej jest nieobciążony oraz zbieżny statystycznie/. Dla całkowitej charakterystyki probabilistycznej ma postać

$$F(m, u, i); F(m, u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n_T} \Delta t_i \quad (229)$$



Rys. 7. Określenie wzajemnej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa

Dla małych zmian Δm oraz u funkcję $w(m_1, t_1; u_2, t_2; i)$ określa się z zależności /schemat obliczenia pokazano na rysunku 7/

$$w(m_1, t_1; u_2, t_2, i); w(m, u) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta m \rightarrow 0 \\ \Delta u \rightarrow 0}} \frac{1}{T} \frac{\sum_{i=1}^{n_T} \Delta t_i}{\Delta m \Delta u} \quad (230)$$

4.9.2. Estymacja nadziei matematycznej

Podstawowym zagadnieniem analizy procesów stochastycznych jest wyznaczenie nadziei matematycznej. Funkcję tę można wyznaczyć "na oko". W tym celu należy zbiór realizacji m i t nanieść na wspólny wykres, dobierając podziałkę tak, aby realizacje tworzyły wyraźne pasmo, a następnie linią m i t prowadzić uśrednienie. Postępowanie takie jest dopuszczalne, jeżeli realizacje mają nieskomplikowany przebieg. Uśrednienie "na oko" ma charakter subiektywny.

Uśrednienie technicznie realizuje się za pomocą urządzeń zbudowanych w oparciu o operatory L_N lub L_T . Ocenę nadziei matematycznej wyznacza się przy użyciu estymatorów tych operatorów

$$m_{\mu}^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_T^{(2)} \{ \mu(t) \}_i \quad (231)$$

gdzie

$$L_T^{(2)} \{ \mu(t) \}_i = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} m_i(t) dt \quad (232)$$

lub

$$L_T \{ \mu(t) \}_i = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} m_i(t) dt \quad (233)$$

We wzorze (231) przedział całkowania należy wybrać tak, aby $m(t)$ była liniową funkcją czasu w zakresie tego przedziału. Praktycznie całkę $L_T^2 \{ \mu(t) \}_i$ wyznacza się ze wzoru sumacyjnego

$$m_{\mu}^*(t) = \frac{1}{N(k+1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=k}^K m_i(t + \frac{jT}{K}) \quad (234)$$

w którym przedział całkowania rozbito na k równych części. Obliczenie sumy jest tym łatwiejsze im niższa jest wartość k . Należy wybrać przedział T/k pomiędzy dwoma wartościami argumentu t tak, aby miara estymacji wartości $m_{\mu}^*(t)$ była jak najmniejjsza. Miara tą jest dyspersja

$$D \{ m_{\mu}^*(t) \} = M \{ [m_{\mu}^*(t) - m_{\mu}(t)]^2 \} \quad (235)$$

Literatura źródłowa wskazuje, że wartość przedziału $\delta = T/k$ powinna być dobrana tak, aby unormowana funkcja korelacyjna

$$S_{mm}(t_1, t_2) = \frac{R_{mm}(t_1, t_2)}{\sqrt{R_{mm}(t_1, t_1) R_{mm}(t_2, t_2)}} \quad (236)$$

była równa wartości 0,25 i nie przewyższała tej wartości przy zwiększeniu różnicy argumentu t . Aby uzyskać pełną informację przeniesioną przez realizację, do wyznaczenia charakterystyki $m_{\mu}(t)$ należy użyć estymatora

$$m_{\mu}^*(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^T w_i(t, \tau) m(\tau) d\tau \quad (237)$$

a funkcję wagową $w_i(t, \tau)$ określić z warunku maksymalnego wykorzystania informacji o $m_{\mu}(t)$, tj. z warunku np. (235). Określenie optymalnej funkcji $w_i(t, \tau)$ możliwe jest wówczas, gdy znany funkcję korelacyjną, którą można wyznaczyć dopiero po opracowaniu procesu stochastycznego.

Praktycznie, estymator $m_{\mu}^*(t)$ realizuje się w oparciu o operator L_N . Wyznacza się ciąg wartości $m_{\mu}^*(t_k)$ dla poszczególnych przekrojów procesu w momentach t_k

$$m_{\mu}^*(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(t_k) \quad (238)$$

w oparciu o który buduje się funkcję $m_{\mu}(t)$.

4.9.3. Estymacja dyspersji

Dyspersję procesu stochastycznego niustalonego

$$D_{\mu}(t) = M \{ [m(t) - m_{\mu}(t)]^2 \} = \overline{m^2(t)} - m_{\mu}^2(t) \quad (239)$$

wyznacza się przy użyciu operatora $L_T^{(2)}$. Estymator dyspersji zbudowany w oparciu o ten operator ma postać

$$D_{\mu}^*(t) = L_T^{(2)} \{ m(t) - L_{\lambda} \{ \mu(t) \} \}^2 \quad (240)$$

Wykorzystując całki (157) oraz (162) otrzymamy wzór zapisany dla realizacji $m(t)$

$$D_{\mu}^*(t) = \frac{1}{T^2} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} [m(\tau_2) - \frac{\lambda}{T_1} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} m(\tau_1) d\tau_1]^2 d\tau_2 \quad (241)$$

Dla procesu stochastycznego niustalonego nieergodycznego używa się estymatora zbudowanego w oparciu o operator L_N . Daje on wartości dyspersji procesu w momentach dyskretnych t_k

$$D_{\mu}^*(t_k) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [m_i(t_k) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(t_k)]^2 \quad (242)$$

Praktycznie używa się często innej postaci wzoru (242)

$$D_{\mu}^*(t_k) = \frac{N}{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [m_i(t_k)]^2 - [m_{\mu}^*(t_k)]^2 \right\} \quad (243)$$

Funkcję $D_{\mu}^*(t)$ określa się w oparciu o ciąg wartości $D_{\mu}^*(t_1)$, $D_{\mu}^*(t_2)$, ..., $D_{\mu}^*(t_r)$.

4.9.4. Estymacja funkcji korelacji własnej

Ponieważ funkcję korelacyjną $R_{mm}(t_1, t_2)$ wyznacza się stosując uśrednienie, dlatego estymatory jej zbudowane są w oparciu o operatory L_N, L_T oraz E_T

$$L_N \{ \mu(t) \} = \int_{i=1}^{\infty} \tilde{m}_i(t) \tilde{m}_i(t-\tau) W(i, k) \quad (244)$$

$$L_T \{ \mu(t) \} = \int_0^{\infty} \tilde{m}_i(t_1) \tilde{m}_i(t_1-\tau) W(t_1, t_2) dt_1 \quad (245)$$

Dla przedziału całkowania skończonego operatory (244) oraz (245)

przyjmą postać

$$L_N \{ \mu(t) \} = \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} \hat{m}_i(t) \hat{m}_i(t-\tau) w(i, k) \quad (246)$$

$$L_T \{ \mu(t) \} = \int_{t-T}^t \hat{m}_i(t_1) \hat{m}_i(t_1-\tau) w(t_1, t) dt_1 \quad (247)$$

gdzie $w(t, t-\tau)$ oraz $w(i, k)$ są funkcjami wagowymi określonymi w przedziale $t-T \leq t_2 \leq t_1$ oraz $k-N_1 \leq i \leq k+N_2$.

Estymatorami funkcji korelacji własnej bieżącej, zbudowanymi w oparciu o operatory (246) oraz (247), są wyrażenia

$$R_{mm}^*(t, \tau) = \frac{1}{N_1+N_2+1} \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} \hat{m}_i(t) \hat{m}_i(t-\tau) \quad (248)$$

$$R_{mm}^*(t, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \hat{m}_i(t) \hat{m}_i(t-\tau) \quad (248a)$$

$$R_{mm}^*(t, \tau) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \hat{m}_i(t) \hat{m}_i(t-\tau) dt \quad (249)$$

Jeżeli na podstawie jednej, i-tej, realizacji nie otrzymamy miarodajnej informacji o procesie, to zamiast wzoru (249) stosujemy inny estymator

$$R_{mm}^*(t, \tau) = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \hat{m}_i(t) \hat{m}_i(t-\tau) dt \quad (250)$$

który w postaci praktycznej po rozbiciu przedziału T na k równych odcinków przyjmie postać

$$R_{mm}^*(t, \tau) = \frac{1}{N(k+1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=-k}^k \hat{m}_i(t_1 + j\frac{T}{k}) \hat{m}_i(t_2 + j\frac{T}{k}) \quad (251)$$

Dokładność estymatora (249) określona jest błędem

$$\Delta_m R \{ \mu(t) \} = M \{ R_{mm}^*(t, \tau) - R_{mm}(t, \tau) \} \quad (252)$$

gdzie: $\Delta_m R \{ \mu(t) \}$ - błąd estymacji określony w sensie interpolacji geometrycznej,

$$M \{ R_{mm}^*(t, \tau) \} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} R_{mm}(t, \tau) dt \quad (253)$$

lub dyspersją funkcji korelacyjnej

$$D\{R_{mm}^*(t, \tau)\} = M\{R_{mm}^*(t, \tau)\}^2 - [M\{R_{mm}^*(t, \tau)\}]^2 \quad (254)$$

gdzie

$$M\{R_{mm}^*(t, \tau)\}^2 = \frac{1}{T^2} \int_{t-T}^{t+T} \int_{t-T}^{t+T} M\{\dot{\mu}(t_1) \dot{\mu}(t_2) \dot{\mu}(t_1 + \tau) \dot{\mu}(t_2 + \tau)\} dt_1 dt_2 \quad (255)$$

Dla procesu Gaussa wzór (254) ma postać

$$D\{R_{mm}^*(t, \tau)\} = \frac{1}{4T^2} \int_{t-T}^{t+T} \int_{t-T}^{t+T} [R_{mm}(t_1, t_2) R_{mm}(t_1 + \tau, t_2 + \tau) R_{mm}(t_1, t_2 + \tau) R_{mm}(t_2, t_1 + \tau)] dt_1 dt_2 \quad (256)$$

Estymatorami lokalnej funkcji korelacji własnej są wyrażenia

$$R_{mm}^*(\tau, i) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \dot{m}_i(t) \dot{m}_i(t - \tau) dt \quad (257)$$

$$R_{mm}^*(\tau, i) = \sum_{k=i-N_1}^{i+N_2} w(k, i) \int_{t-T}^t \dot{m}_k(t) \dot{m}_k(t - \tau) dt \quad (258)$$

Obliczenie funkcji $R_{mm}^*(\tau, i)$ wzorem (258) realizuje się w dwóch etapach:

- i-tą realizację całkuje się w przedziale $[t-T, t]$,
- wynik sumuje się używając funkcji wagowej $w(k, i)$.

Średnią funkcję korelacji własnej wyznacza się przy użyciu estymatora

$$R_{mm}^*(\tau) = \frac{1}{(N_1 + N_2 + 1)T} \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} \int_{t-T}^t \dot{m}_i(t) \dot{m}_i(t - \tau) dt \quad (259)$$

Jeżeli proces stochastyczny nieustalony jest ergodyczny, to wzór (259) przyjmie postać

$$R_{mm}^*(\tau) = \int_{t-T}^t \dot{m}_i(t) \dot{m}_i(t - \tau) dt \quad (260)$$

W praktyce stosowane są różne metody pośrednie obliczenia funkcji korelacyjnych. Przykładowo, estymator może być formułowany w oparciu o wyrażenie

$$[m(t) + m(t - \tau)]^2 = m^2(t) + 2m(t)m(t - \tau) + m^2(t - \tau) \quad (261)$$

Stosując uśrednienie statystyczne otrzymamy estymatory bieżącej wzajemnej funkcji korelacyjnej w postaci

$$R_{mm}^*(t, \tau) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^t [m(t) + m(t - \tau)]^2 dt - \frac{1}{T} \int_{t-T}^t m^2(t) dt \quad (262)$$

$$R_{mm}^*(t, \tau) = \frac{1}{2(N_1 + N_2 + 1)} \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} [m_i(t) + m_i(t-\tau)]^2 - \frac{R_{mm}^*(t, 0)}{2} - \frac{R_{mm}^*(t-\tau, 0)}{2} \quad (263)$$

$$R_{mm}^*(t, 0) = \frac{1}{N_1 + N_2 + 1} \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} m_i^2(t) \quad (264)$$

$$R_{mm}^*(t-\tau, 0) = \frac{1}{N_1 + N_2 + 1} \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} m_i^2(t-\tau) \quad (265)$$

Jeżeli $\tau \leq \Delta \tau_k$, to

$$R_{mm}^*(t, 0) \approx R_{mm}^*(t-\tau, 0) \quad (266)$$

Wobec warunku (266) estymator (263) przyjmie postać

$$R_{mm}^*(t, \tau) = \frac{1}{2(N_1 + N_2 + 1)} \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} [m_i(t) + m_i(t-\tau)]^2 - R_{mm}^*(t, 0) \quad (267)$$

4.9.5. Estymacja funkcji korelacji wzajemnej

Funkcja korelacyjna $R_{mu}(t_1, t_2)$ charakteryzuje zależność wzajemną dwóch procesów stochastycznych nieustalonych $\mu(t)$ oraz $\eta(t)$. Estymator takiej funkcji zbudowany jest w oparciu o operator L_N i ma postać

$$R_{mu}^*(t_1, t_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{m}_i(t_1) \hat{u}_i(t_2) \quad (268)$$

Stosując uśrednienie po czasie i po zbiorze otrzymamy inną postać estymatora funkcji korelacji wzajemnej

$$R_{mu}^*(t_1, t_2) = \frac{1}{TN} \sum_{i=1}^N \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \hat{m}_i(t_1) \hat{u}_i(t_2) dt_1 \quad (269)$$

Po rozbiciu przedziału T na k równych części wzór (269) przyjmie postać

$$R_{mm}^*(t_1, t_2) = \frac{1}{N(k+1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=-k}^k \hat{m}_i(t_1 + j\frac{T}{k}) \hat{u}_i(t_2 - j\frac{T}{k}) \quad (270)$$

Estymatorami funkcji korelacji wzajemnej bieżącej, lokalnej oraz średniej, zbudowanymi w oparciu o operatory L_N , L_T oraz L_{NT}

$$R_{mu}(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{m}_i(t) \dot{u}_i(t-\tau) \quad (271)$$

$$R_{mu}(\tau, i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T+\tau} \dot{m}_i(t) \dot{u}_i(t-\tau) dt \quad (272)$$

$$R_{mu}(\tau) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \int_{\tau}^{T+\tau} \sum_{i=1}^N \dot{m}_i(t) \dot{u}_i(t-\tau) dt \quad (273)$$

są wyrażenia

$$R_{mu}^*(t, \tau) = \frac{1}{N_1 + N_2 + 1} \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} \dot{m}_i(t) \dot{u}_i(t-\tau) \quad (274)$$

$$R_{mu}^*(\tau, i) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \dot{m}_i(t) \dot{u}_i(t-\tau) dt \quad (275)$$

$$R_{mu}^*(\tau) = \frac{1}{(N_1 + N_2 + 1)T} \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} \int_{t-T}^t \dot{m}_i(t) \dot{u}_i(t-\tau) dt \quad (276)$$

Wykorzystując zależność (261) otrzymamy, dla dwóch procesów stochastycznych nieustalonych, statystycznie zależnych, estymatory funkcji $R_{mu}(t, \tau)$

$$R_{mu}^*(t, \tau) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^t [m(t+u) + u(t-\tau)]^2 dt - \frac{R_{mm}^*(t, 0)}{2} - \frac{R_{uu}^*(t-\tau, 0)}{2} \quad (277)$$

gdzie:

$$R_{mm}^*(t, 0) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t m^2(t) dt \quad (278)$$

$$R_{uu}^*(t, 0) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u^2(t) dt \quad (279)$$

oraz

$$R_{mu}^*(t, \tau) = \frac{1}{2(N_1 + N_2 + 1)} \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} [m_i(t+u_i) + u_i(t-\tau)]^2 - \frac{R_{mm}^*(t, 0)}{2} - \frac{R_{uu}^*(t-\tau, 0)}{2} \quad (280)$$

gdzie:

$$R_{mm}^*(t, 0) = \frac{1}{N_1 + N_2 + 1} \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} m_i^2(t) \quad (281)$$

$$R_{uu}^*(t-\tau, 0) = \frac{1}{N_1 + N_2 + 1} \sum_{i=k-N_1}^{k+N_2} u_i^2(t-\tau) \quad (282)$$

4.9.6. Estymacja gęstości widmowej

Estymatorami gęstości widmowej /widma mocy/ procesu stochastycznego nieustalonego są wyrażenia zbudowane w oparciu o widmo bieżącej i-tejrealizacji procesu.

Estymatory bieżącej, lokalnej oraz średniej gęstości widmowej mają następujące postacie

$$S_{mm}^*(\omega, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t} \{ |S_{it}^*(\omega)|^2 \} \quad (283)$$

$$S_{mm}^*(\omega, i) = \frac{1}{T} \{ |S_{it}^*(\omega)|^2 \} \quad (284)$$

$$S_{mm}^*(\omega) = \frac{1}{TN} \sum_{i=1}^N \{ |S_{it}^*(\omega)|^2 \} \quad (285)$$

gdzie

$$S_{it}^*(\omega) = \int_0^t m_i(t) \cos \omega t dt - j \int_0^t m_i(t) \sin \omega t dt \quad (286)$$

jest widmem bieżącymi i-tejrealizacji procesu stochastycznego $\mu(t)$.

Widmo energetyczne procesu stochastycznego nieustalonego określa się przy użyciu urządzeń technicznych. Składają się one z elementów logicznych, realizujących operacje mnożenia i sumowania, generatora sygnałów standardowych, elementów porównania oraz sterowania. Schemat blokowy urządzenia do wyznaczenia widma bieżącego i-tejrealizacji procesu stochastycznego pokazano na rysunku 8.

Metody wyznaczenia gęstości widmowej oparte na realizacji aparaturowej estymatorów (283+285) nazywane są metodami filtracji aktywnej.

W metodzie pasywnej przeznaczonej do wyznaczenia gęstości widmowej średniej używa się filtru o funkcji przejścia /filtr prostokątny/

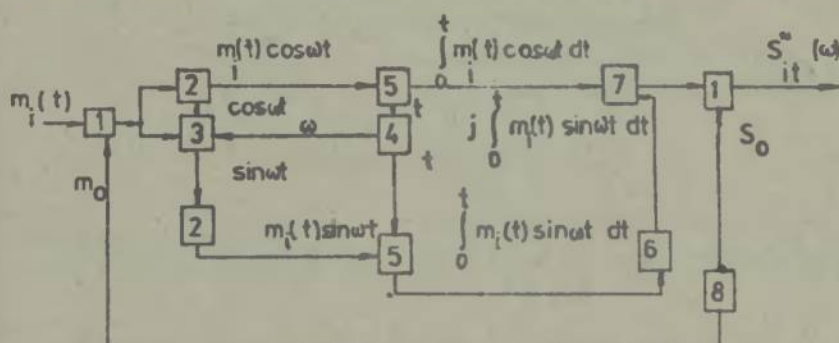
$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < |\omega| < \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & \text{dla pozostałych wartości} \end{cases} \quad (287)$$

gdzie: ω_0 - częstotliwość środkowa,

$\Delta\omega$ - pasmo przepuszczania filtru,

której odpowiada funkcja wagowa

$$h(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\psi} d\omega = 2 \operatorname{sinc}(\pi \Delta\omega \psi) \frac{\cos 2\pi \omega_0 \psi}{\Delta\omega} \quad (288)$$



Rys. 8. Schemat strukturalny urządzenia do wyznaczenia widma bieżącego (286)

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| 1-kompensator, | 5-integrator, |
| 2-człon mnożenia, | 6-inwertor fazy, |
| 3-generator funkcji, | 7-sumator, |
| 4-urządzenie sterujące, | 8-człon odniesienia. |

Dla procesu na wyjściu z filtru

$$m_i(t, \omega_0, \Delta\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\psi) m_i(t - \psi) d\psi \quad (289)$$

otrzymamy widmo bieżące w postaci

$$S_{mm}(t, \omega_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta\omega N} \sum_{i=1}^N m_i^2(t, \omega_0, \Delta\omega) \quad (290)$$

Widmo bieżące (290) określa informację o procesie dla pasma $\Delta\omega$. Z jednej strony pasmo to powinno być wąskie, aby funkcja $S_{mm}(t, \omega_0)$ dawała prawidłową informację o energii widma w wąskich granicach częstotliwości, a z drugiej strony pasmo $\Delta\omega$ powinno być wystarczająco szerokie tak, aby miało ono trend nieustalony. Czas wzrostu funkcji h powinien być mniejszy od czasu trendu/dla filtru idealnego czas ten jest równy $T = \Delta\omega^{-1}$.

Dla skończonego przedziału $\Delta\omega$ otrzymamy estymator

$$S_{mm}^*(t, \omega_0) = \frac{1}{\Delta\omega N} \sum_{i=1}^N m_i^2(t, \omega_0, \Delta\omega) \quad (291)$$

Aby wyznaczyć estymator (291) należy dysponować dużym zbiorem realizacji oraz przeprowadzić obliczenia dla każdej wartości częstotliwości ω .

Stosując operator L_T do funkcji $S_{mm}(t, \omega_0)$ otrzymamy średnią kr-

stość widmową dla panna

$$S_{mm}(\omega, \Delta\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S_{mm}(t, \omega) dt \quad (292)$$

Estymatorem tego wyrażenia jest całka

$$S_{mm}^*(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega T} \int_0^T m^2(t) dt \quad (293)$$

Wykorzystując wzory (104) oraz (106) otrzymamy estymatory gęstości widmowej bieżącej oraz średniej procesu stochastycznego niestabilnego.

$$S_{mm}^*(t, \omega, \Delta\omega) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\Delta\omega N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{T} \int_0^t m_i^2(t) dt \right] \quad (294)$$

$$S_{mm}^*(\omega, \Delta\omega) = \frac{1}{\Delta\omega N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{T} \int_0^t m_i^2(t) dt \quad (295)$$

Gęstość widmową, podobnie jak funkcję korelacyjną procesu stochastycznego niestabilnego, wyznacza się również przy użyciu wzorów (126+131).

4.10. Aproksymacja charakterystyk statystycznych

W obliczeniach praktycznych często stosuje się przybliżenia funkcji przypadkowej $\mu(t)$ lub charakterystyki statystycznej w postaci liniowej kombinacji funkcji oraz współczynników.

Realizację procesu stochastycznego niestabilnego można aproksymować szeregiem

$$m^{**}(t) \approx \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(t) \quad (296)$$

gdzie: A_i - współczynnik przypadkowy,

$\varphi_i(t)$ - funkcja nieprzypadkowa regularna.

Warunkiem, aby szereg (296) był zbieżny w sensie średniokwadratowym, tj. spełniona była zależność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left\{ \left| \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(t) - m^{**}(t) \right|^2 \right\} = 0 \quad (297)$$

jest zbieżność funkcji korelacyjnej $R_{mm}^{xx}(t_1, t_2)$ określonej rozkładem

$$R_{mm}^{**}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) \quad (298)$$

do wielkości $R_{\mu\mu}(t_1, t_2)$ w każdym punkcie przekroju procesu stochastycznego /słuszne jest to dla procesów o skończonej dyspersji/.

W oparciu o wzór (296) otrzymamy rozkład kanoniczny przybliżony funkcji przypadkowej $\mu(t)$

$$m(t) \approx m_{\mu}^{sv}(t) + \sum_{i=1}^n V_i \psi_i(t) \quad (299)$$

gdzie:

$$\psi_i(t) = \varphi_i(t) + \sum_{k=i+1}^n O_{ik} \varphi_k(t) \quad (300)$$

$$m_{\mu}^{sv}(t) = \sum_{i=1}^n m_i \varphi_i(t) \quad (301)$$

Do obliczeń praktycznych sałecane są rozkłady oparte na funkcjach ortogonalnych, spełniających sałeczność /filtry ortogonalne/

$$\int_T \varphi_i(t) \varphi_k(t) w(t) dt = \delta_{ik} \quad (302)$$

Rozkładając funkcję przypadkową w szereg staramy się ograniczyć liczbę wyrazów. Udać się to osiągnąć dla obiektów inżynierii chemicznej, gdzie procesy dynamiczne wykazują dużą bezwładność. W rozkładzie uwzględnia się tylko te wyrazy, które objęte są pasmem przepuszczania informacji dynamicznych.

Jeżeli proces stochastyczny nieustalony jest ergodyczny, to aproksymację nadziei matematycznej określonej na basie jednej realizacji opisuje się wzorem

$$m_{\mu}^{sv(T)}(t) = \sum_{i=1}^{n_T} m_i^{(T)} \varphi_i(t) \quad (303)$$

przy czym warunek zbieżności (297) ma postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} M \{ |m_{\mu}^{(T)}(t) - m_{\mu}^{sv}(t)|^2 \} = 0 \quad (304)$$

gdzie:

$$m_i^{(T)} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_i(t) m(t) dt \quad (305)$$

$A_i^{(T)}(t)$ - funkcje wybierane w przestrzeni funkcji ortogonalnych $\{\varphi_i^{(T)}(t)\}$.

Dokładność estymatora (305) współczynników $m_i^{(T)}$ (303) określona jest dyspersją

$$D \{ m_{\mu}^{(T)} \} = A_i^2 \frac{1}{T^2} \iint_0^T |R_{mm}(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 \quad (306)$$

gdzie

$$A_i = \sup A_i^{(n)}(t) \quad (307)$$

W układzie zmiennych (t, τ) wzór (306) przyjmuje postać

$$D\{m_\mu^{(n)}\} = A_i^2 \int_0^T \int_0^{T-t} |R_{mm}(t, \tau)| dt d\tau \quad (308)$$

Jeżeli uśrednienie prowadzimy na odcinku $[0, t], [t-T, t]$ lub $[t-T(t), t]$, to do aproksymacji można użyć układ funkcji ortogonalnych nieustalonych $\{\varphi_i(t, \tau)\}$ spełniających warunek ortogonalności

$$\int_0^t \varphi_i(t, \tau) \varphi_k(t, \tau) w(t, \tau) d\tau = \delta_{ik} \quad (309)$$

Przykładowo, funkcja $\varphi(t, \tau)$ może mieć następujące postacie

$$\varphi(t, \tau) \sim \left\{ \sqrt{\frac{2\tau+1}{t}} \sum_{k=0}^{\infty} l_{rk} \tau^k \right\} \quad (310)$$

$$\varphi(t, \tau) \sim \left\{ \sqrt{\frac{1}{t}} \tau \right\} \quad (311)$$

$$\varphi(t, \tau) \sim \left\{ \sqrt{\frac{2}{t}} \cos \frac{\pi}{t} \tau \right\} \quad (312)$$

Przy użyciu funkcji $\varphi(t, \tau)$ aproksymacje nadziei matematycznej oraz funkcji korelacji własnej mają postacie

$$m_\mu^{**}(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t \varphi_i(t, \tau) m(\tau) w(t, \tau) d\tau \quad (313)$$

$$R_{mm}^{**}(t, \tau) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} R_{mm}(t_i, \tau_k) \varphi_{ik}(t, \tau) \quad (314)$$

Wyniki obliczeń funkcji korelacyjnej na podstawie wybranego estymatora nie zawsze układają się wzdłuż krzywych wystarczająco gładkich dla dobrej aproksymacji. Wówczas krzywą taką wygładza się odpowiednio dobranym wzorem aproksymacyjnym.

Funkcję korelacyjną $R_{mm}(t_1, t_2) = R_{mm}(t, t+\tau)$ aproksymuje się sumą

$$R_{mm}^{**}(t, t+\tau) = \sum_{k=1}^N c_k e^{-d_k(\tau)} \cos \beta_k(\tau) \quad (315)$$

gdzie c_k , d_k oraz β_k są parametrami zależnymi od czasu i podlegają określeniu.

Danymi wyjściowymi do wykonania obliczeń tych współczynników są wartości estymatora funkcji korelacyjnej

$$R_{ij}^* = R_{mm}^*(t_i, t_i + \tau_{ij}), i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2} \quad (316)$$

Zagadnienie wyznaczenia współczynników c_k , d_k oraz β_k , zrealizowane w sensie metody najmniejszych kwadratów, sprowadza się do rozwiązania zależności

$$\sum_{j=1}^{n_2} (R_{ij} - \sum_{k=1}^N c_k^{(i)} e^{-d_k^{(i)} |\tau_{ij}|} \cos \beta_k^{(i)} \tau_{ij})^2 = \min \quad (317)$$

Minimalizując wyrażenie (317), tj. różniczkując prawą stronę wyrażenia (317) względem nieznanych współczynników oraz przyrównując pochodne do zera, otrzymamy zespół równań, z których wyznacza się nieznanne współczynniki

$$\sum_{j=1}^{n_2} \{ f_N(\tau_{ij}) e^{-d_k^{(i)} |\tau_{ij}|^r} \cos \beta_k^{(i)} \tau_{ij} = 0 \quad (318)$$

$$\sum_{j=1}^{n_2} \{ f_N(\tau_{ij}) |\tau_{ij}|^r e^{-d_k^{(i)} |\tau_{ij}|^r} \cos \beta_k^{(i)} \tau_{ij} = 0 \quad (319)$$

$$\sum_{j=1}^{n_2} \{ f_N(\tau_{ij}) |\tau_{ij}|^r e^{-d_k^{(i)} |\tau_{ij}|^r} \sin \beta_k^{(i)} \tau_{ij} = 0 \quad (320)$$

gdzie: $k=1, 2, \dots, N$,

$$f_N(\tau_{ij}) = R_{ij} - \sum_{k=1}^N c_k^{(i)} e^{-d_k^{(i)} |\tau_{ij}|^r} \cos \beta_k^{(i)} \tau_{ij} \quad (321)$$

Realizacja aparaturowa obliczeń funkcji korelacyjnej aproksymowanej wielomianem może wymagać dużej liczby bloków analogowych na skutek skomplikowanej postaci wyrażenia analitycznego.

W celu uproszczenia obliczeń, wielomiany aproksymacyjne zamienia się funkcją odcinkami prostą

$$|R^{**}(t, \tau) - R^{***}(t, \tau)| \leq \varepsilon \quad (322)$$

gdzie: $R^{**}(t, \tau)$ - wielomian aproksymacyjny,

$R^{***}(t, \tau)$ - funkcja odcinkami prosta.

W granicach każdego odcinka prostego funkcja $R^{xxx}(t, \tau)$ jest równa jednej funkcji tworzącej $q_1^{xxx}(t, \tau)$. Stąd $R^{xxx}(t, \tau)$ jest wielokwędziową funkcją łamaną przestrzeni (R^{xxx}, t, τ) , przy czym dla każdego odcinka

$$|q^{***}(t, \tau) - q^{***}_1(t, \tau)| \leq \varepsilon \quad (323)$$

$$R^{***}(t, \tau) = L \{ q^{***}_1(t, \tau), q^{***}_2(t, \tau), \dots, q^{***}_n(t, \tau) \} \quad (324)$$

gdzie L oznacza zespół skończony operacji logicznych wykonanych na funkcji $q^{***}(t, \tau)$.

Funkcję $R^{***}(t, \tau)$ można również aproksymować sumą

$$R^{***}(t, \tau) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n R^{***}(t, \tau_{ij}) \Phi_{ij}(t, \tau) \quad (325)$$

która w przypadku rozdzielenia zmiennych przyjmie postać

$$R^{***}(t, \tau) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n R^{***}(t, \tau_{ij}) \Phi_i(t) \Phi_j(\tau) \quad (326)$$

4.11. Wymuszenie stochastyczne

Wymuszenie przypadkowe może być ciągłe, schodkowe lub impulsowe. Wymuszeniem ciągłym będzie sygnał w postaci wielomianu potęgowego, trygonometrycznego, wykładniczego lub kombinacji tych wielomianów

$$m(t) = \sum_{i=0}^n t^i e^{d_i t} \cos \omega_i t \quad (327)$$

Wymuszenia przypadkowe podzielone są na klasy w zależności od warunku spełnianego przez realizację /Michajłow/

$$\int_{-\infty}^{\infty} |m(t)| dt < \infty \quad (328)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |m(t)|^2 dt < \infty \quad (329)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |m(t)| dt < \infty \quad (330)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |m(t)|^2 dt < \infty \quad (331)$$

Wymuszenia przypadkowe należące do wymienionych klas /wzory (328+ + 331) mogą być bezinercyjne /nie zawierać impulsów chwilowych/ oraz impulsowe, zwane ciągiem stochastycznym impulsów chwilowych / krótko-

trwałe impulsy pojawiające się w przypadkowych lub zdeterminowanych momentach/.

Wymuszeniem impulsowym może być strumień impulsów jednostkowych

$$\mu(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_i) \quad (332)$$

lub strumień impulsów modulowanych /funkcja przypadkowo kwantowana/

$$\mu(t) = c(t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_i) \quad (333)$$

$$\mu(t) = \gamma(t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t-t_i) \quad (334)$$

$$\mu(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c(i) \delta(t-t_i) \quad (335)$$

$$\mu(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma(i) \delta(t-t_i) \quad (336)$$

gdzie: t_i - moment pojawienia się impulsu/wielkość znana lub z niepełną informacją/.

$c(t_i)$ - funkcja nieprzypadkowa,

$c(i)$ - elementy zbioru skończonego liczb rzeczywistych,

$\gamma(t)$ - funkcja przypadkowa,

$\gamma(i)$ - elementy zbioru wielkości przypadkowych.

Postacią najogólniejszą strumienia stochastycznego impulsów jest strumień z modulacją przypadkową / współczynniki modulacji pojawienia się impulsów w różnych momentach czasu są wielkościami przypadkowymi, statystycznie zależnymi lub statystycznie niezależnymi/.

Strumień impulsów pierwszego rodzaju /zdeterminowane momenty t_i , współczynniki przypadkowe/ opisany jest zależnością

$$\mu(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_i \delta(t-t_i) \quad (337)$$

Zmienna przypadkowa γ_i przyjmuje wartości $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ i spełnia następującą zależność /dla skończonego k /

$$P\{\gamma_i = a_{ik} | \gamma_{i-1} = a_{(i-1)k}, \dots, \gamma_1 = a_{1k}\} = P\{\gamma_i = a_{ik} | \gamma_{i-1} = a_{(i-1)k}\} \quad (338)$$

Strumień impulsów (337), którego współczynniki spełniają zależność (338), nazywany łańcuchem Markowsa.

Przykładem drugiego rodzaju strumienia impulsów, którego współczynniki γ_i są wielkościami przypadkowymi, niezależnymi w sensie statystycznym, jest proces

$$\mu(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_i \delta(t-t_i) \quad (339)$$

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa zbioru takich współczynników nie zależy od czasu.

Jeżeli dyspersja współczynników γ_i jest wielkością skończoną, to proces $\mu(t)$ nazywamy szumem impulsowym. Z matematycznego punktu widzenia szum impulsowy nie zależy od momentu odliczania czasu/ustalenia tej wielkości daje możliwość numerowania impulsów/. Zmiana momentu t_i zmienia rozkład funkcji przy ustalonym indeksie i .

Ostatecznie, wymuszeniem przypadkowym będzie funkcja przypadkowa impulsowa lub kwantowana. Jeżeli $\gamma(t)$ jest funkcją przypadkową ustaloną, to wymuszenie stochastyczne jest ustalone. Przykładem szumu impulsowego ustalonego jest poissonowski ciąg impulsów.

4.12. Przejście procesu stochastycznego przez obiekt dynamiczny liniowy nieustalony

4.12.1. Zależność pomiędzy procesami $\mu(t)$ oraz $\eta(t)$

Jeżeli na wejściu obiektu dynamicznego liniowego o parametrach zmieniających się w czasie podamy proces stochastyczny $\mu(t)$, to na wyjściu otrzymamy proces stochastyczny nieustalony $\eta(t)$.

Jeżeli znamy operator modelu obiektu, to procesy stochastyczne powiązane są ze sobą zależnościami

$$\eta(t) = \hat{A}(t, \tau) * \mu(t) \quad (340)$$

którą można zapisać w postaci całki spłotu

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \quad (341)$$

Używając realizacji procesów, otrzymamy inną postać całki (341)

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \tau) m(\tau) d\tau \quad (342)$$

gdzie: $w(t, \tau)$ - charakterystyka impulsowa obiektu dynamicznego,
 $u(t)$, $m(t)$ - realizacje procesów stochastycznych $\eta(t)$ i $\mu(t)$

Dla skończonego przedziału całkowania $[t_0, t]$, po rozbiciu którego na części $t_1, \dots, t_r, \dots, t_m$ wzór (341) można zapisać w postaci

$$\eta(t) = \sum_{r=1}^m \int_{t_r} W(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \quad (343)$$

Jeżeli $t_r \gg |t_2 - t_1|$, za którym funkcje przypadkowe $\mu(t_1)$ oraz $\mu(t_2)$ są praktycznie statystycznie niezależne, to wzór (343) stanowi sumę słabo zależnych składników, a przy $r \rightarrow \infty$ rozkład prawdopodobieństwa procesu zbliżony jest do rozkładu normalnego.

Zależność (342) jest wersją prostszą postaci uogólnionej

$$u(t, \eta) = \int_{-\infty}^{\eta} W(t, \xi) m(\xi, \eta) d\xi \quad (344)$$

Jeżeli charakterystyka impulsowa obiektu oraz wymuszenie określone są w przedziale $(-\infty, t]$, to wzór (342) przyjął postać

$$u(t) = \int_{-\infty}^t W(t, \tau) m(\tau) d\tau \quad (345)$$

$$u(t) = \int_0^{\infty} W(t, \vartheta) m(t - \vartheta) d\vartheta \quad (346)$$

Dla obiektu znajdującego się w spoczynku do momentu t_0 otrzymamy wzory

$$u(t) = \int_{t_0}^t W(t, \tau) m(\tau) d\tau \quad (347)$$

$$u(t) = \int_0^{t-t_0} W(t, \vartheta) m(t - \vartheta) d\vartheta \quad (348)$$

Jeżeli do tych wzorów wprowadzimy wielkość T , która określa największy możliwy czas trwania charakterystyki impulsowej

$$W(t, \tau) = 0 \quad ; \quad \tau < t - T \quad (349)$$

to otrzymamy inne postacie wzorów (347) oraz (348)

$$u(t) = \int_{t-T}^t W(t, \tau) m(\tau) d\tau \quad (350)$$

$$u(t) = \int_0^T m(t, \vartheta) m(t - \vartheta) d\vartheta \quad (351)$$

Jeżeli wymuszeniem jest ciąg impulsów jednostkowych (332), szumem

impulsowym (339) lub ciągiem impulsów modulowanych /ciąg impulsów regularny, okresowy z okresem T , ze współczynnikami modulacji/, to otrzymamy następujące całki spłotu

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t w(t, \tau) \delta(\tau - \tau_i) d\tau = \sum_{i=1}^n w(t, \tau_i) \quad (352)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^t z(\tau) w(t, \tau) \delta(\tau - \tau_i) d\tau = \sum_{i=1}^n z(\tau_i) w(t, \tau_i) \quad (353)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^n z_i w(t - iT) \quad (354)$$

gdzie: $z(t)$ - realizacja procesu stochastycznego $\gamma(t)$,
 τ_i - element ciągu momentów przypadkowych $\{\tau_i\}$ pojawienia się impulsów.

4.12.2. Nadzieja matematyczna procesu wyjściowego

Jeżeli procesy $\mu(t)$ oraz $\eta(t)$ powiązane są zależnością (340), to w wyniku działania obustronnego operatorem uśrednienia statystycznego otrzymamy wzór do wyznaczenia nadziei matematycznej procesu wyjściowego

$$m_\eta(t) = \tilde{A}(t, \tau) * m_\mu(t) \quad (355)$$

Wzór ten zapisany w postaci całki spłotu ma postać

$$m_\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \tau) m_\mu(\tau) d\tau \quad (356)$$

Gdy na wejściu obiektu dynamicznego działają dwa statystycznie niezależne procesy $\mu(t)$ oraz $\nu(t)$, to nadzieja matematyczna procesu wyjściowego z obiektu jest sumą dwóch całek spłotu niesustalczonego

$$m_\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \tau) m_\mu(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \tau) m_\nu(\tau) d\tau \quad (357)$$

gdzie $m_\nu(t)$ oznacza nadzieję matematyczną procesu stochastycznego $\nu(t)$, który można traktować jako szum nakładający się na sygnał pożyteczny $\mu(t)$.

Stosując operator nadziei matematycznej $M\{\}$ do zależności (332) lub (334) otrzymamy, dla skróconego przedziału całkowania, całki spłotu

tu nieustalonego w postaci

$$m_{\eta}^*(t) = \sum_{i=0}^n M\{w(t, \tau_i)\} \quad (358)$$

$$m_{\eta}^* = m_{\gamma}^* \sum_{i=1}^n w(t - iT) \quad (358a)$$

gdzie m_{γ} jest nadzieją matematyczną ustaloną łańcucha Markowa

$$m_{\gamma}^* = \sum_{j=1}^m a_j P\{\gamma_i = a_{ij}\} \quad (359)$$

4.12.3. Funkcja korelacyjna procesu wyjściowego

Funkcję korelacyjną $R_{uu}(t_1, t_2)$ procesu wyjściowego, przy nieprzypadkowej funkcji wagowej $w(t, \tau)$ /charakterystyka impulsowa obiektu nieustalonego/ można wyznaczyć z zależności /jeżeli proces $\eta(t)$ ma funkcję korelacyjną i otrzymane całki są zbieżne/

$$\begin{aligned} R_{uu}(t_1, t_2) &= M\{\tilde{u}(t_1)\tilde{u}(t_2)\} = M\{\tilde{A}_{t_1}^{-1}\tilde{m}(t_1)\tilde{A}_{t_2}^{-1}\tilde{m}(t_2)\} = \\ &= M\{\tilde{A}_{t_1}^{-1}\tilde{A}_{t_2}^{-1}\tilde{m}(t_1)\tilde{m}(t_2)\} = \tilde{A}_{t_1}^{-1}\tilde{A}_{t_2}^{-1}M\{\tilde{m}(t_1)\tilde{m}(t_2)\} = \\ &= \tilde{A}_{t_1}^{-1}\tilde{A}_{t_2}^{-1}R_{mm}(t_1, t_2) = \tilde{A}_{t_2}^{-1}\tilde{A}_{t_1}^{-1}R_{mm}(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (360)$$

która zapisana w postaci całki splotu przyjmie postać /zerowe warunki początkowe/

$$\begin{aligned} R_{uu}(t_1, t_2) &= M\left\{\int_0^{t_1} w(t_1, \psi)[m(\psi) - m_{\mu}(\psi)] \int_0^{t_2} w(t_2, \tau)[m(\tau) - m_{\mu}(\tau)] d\psi d\tau - \right. \\ &= M\left\{\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} w(t_1, \psi)\tilde{m}(\psi)w(t_2, \tau)\tilde{m}(\tau) d\psi d\tau\right\} = \\ &= \int_0^{t_1} w(t_1, \psi) d\psi \int_0^{t_2} w(t_2, \tau) R_{mm}(t_1 - \tau, t_2 - \psi) d\tau \end{aligned} \quad (361)$$

Ze wzoru (360) wynika, że w celu wyznaczenia funkcji $R_{uu}(t_1, t_2)$ należy funkcję $R_{mm}(t_1, t_2)$ poddać działaniu podwójnemu operatora $\tilde{A}_t^{-1}$. Najpierw przekształca się funkcję $R_{mm}(t_1, t_2)$ względem t_1 przy ustalonym t_2 , a następnie otrzymaną funkcję poddaje się działaniu operatora względem zmiennej t_2 .

Jeżeli operator $\tilde{A}_t^{-1}$ jest liniowy rzeczywisty, to

$$R_{uu}(t_1, t_2) = A_{t_1}^{-1} A_{t_2}^{-1} R_{mm}(t_1, t_2) = A_{t_2}^{-1} A_{t_1}^{-1} R_{mm}(t_1, t_2) \quad (362)$$

Dla warunków początkowych niezerowych wzór (362.) przyjmie postać

$$R_{uu}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{c_i c_j} w^{(i-1)}(t_1, \tau_1) w^{(j-1)}(t_2, \tau_2) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} w(t_1, \tau_1) w(t_2, \tau_2) R_{mm}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \sum_{i=1}^n w^{(i-1)}(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_2} w(t_2, \tau_2) R_{c_i m}(t_0, \tau_0) d\tau_2 + \\ + \sum_{j=1}^n w^{(j-1)}(t_2, t_0) \int_{t_0}^{t_1} w(t_1, \tau_1) R_{m c_j}(\tau_1, t_0) d\tau_1 \quad (363)$$

Jeżeli proces stochastyczny określający warunki początkowe $\{c_i\}_{i=1}^n$ oraz proces wejściowy $\mu(t)$ są statystycznie niezależne, to we wzorze (363) znikają dwa ostatnie wyrazy. W przypadku warunków początkowych zerowych znika we wzorze (363) wyraz pierwszy. Otrzymamy w ten sposób zależność (361).

Funkcję korelacji wzajemnej $R_{mu}(t_1, t_2)$ dwóch procesów stochastycznych $\mu(t)$ oraz $\eta(t)$ określa się z zależności /jeżeli procesy nie są skorelowane, to $R_{mu}(t_1, t_2) = 0$ /

$$R_{mu}(t_1, t_2) = M\{\dot{m}(t_1) \dot{u}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{m}(t_1) \dot{u}(t_2) w_2(m, t_1, u, t_2) dm du \quad (364)$$

gdzie:

$$w_2(m, t_1, u, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(m, t_1, u, t_2)}{\partial m \partial u}$$

$$F_2(m, t_1, u, t_2) = P\{m(t_1) < m; u(t_2) < u\}$$

Zależność (364) można przedstawić w innej postaci. W tym celu całkę (362) mnożymy obustronnie przez $m(t_1)$ /zakłada się, że procesy $\mu(t)$ oraz $\eta(t)$ są scentrowane lub mają zerowe nadzieje matematyczne/, całkujemy względem zmiennej τ przy zamianie $t_2 \rightarrow \tau$ oraz stosujemy operację nadziei matematycznej $M\{\}$. Zależność otrzymana w ten sposób ma postać

$$R_{mu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau, t_2) R_{mm}(t_1 - \tau, t_2 - \tau) d\tau \quad (365)$$

Wzór (365) upraszcza się, gdy sygnałem wymuszającym jest proces ustalony

$$R_{mu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau, t_2) R_{mm}(\tau + \psi - t_2 + t_1) d\tau \quad (366)$$

Wzory (361) oraz (365) upraszczają się jeszcze bardziej, jeżeli wymuszaniem jest szum biały.

Szum biały niestabilny o intensywności $S_0(\varphi)$ oraz funkcji korelacji

cyjnej

$$R_{mm}(\tau-\psi) = S_0(\psi)\delta(\tau-\psi) \quad (367)$$

wprowadzony do obiektu dynamicznego o charakterystyce impulsowej $w(t, \tau)$ daje na wyjściu proces stochastyczny o funkcji korelacyjnej

$$R_{uu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\tau_1} S_0(\psi) w(t, \psi) d\psi \int_{-\infty}^{\tau_2} w(t_2, \tau) \delta(\tau-\psi) d\tau \quad (368)$$

Przy $S_0(\psi) = 1$ i zamianie zmiennych otrzymamy wzory

$$R_{uu}(t, \tau) = \begin{cases} \int_{-\infty}^t w(t, \lambda) w(\tau, \lambda) d\lambda, & t < \tau \\ \int_{-\infty}^{\tau} w(t, \lambda) w(\tau, \lambda) d\lambda, & t > \tau \end{cases} \quad (369a)$$

$$(369b)$$

Badanie dynamiki procesów niustalonych inżynierii chemicznej realizuje się najczęściej przy użyciu sygnału wejściowego w postaci procesu stochastycznego ustalonego o znanej funkcji korelacyjnej $R_{mm}(\tau)$ oraz gęstości widmowej $S_{mm}(\omega)$. Wówczas funkcję korelacji własnej procesu stochastycznego niustalonego wyjściowego $\eta(t)$ wyznacza się z zależności

$$R_{uu}(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_1} w(t_1, \psi) d\psi \int_0^{t_2} w(t_2, \tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(\omega) e^{j\omega(\tau-\psi)} d\omega \right] d\tau \quad (370)$$

którą można zapisać w postaci

$$R_{uu}(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(\omega) \bar{W}(j\omega, t_1) W(j\omega, t_2) e^{j\omega(t_2-t_1)} d\omega \quad (371)$$

gdzie:

$$\bar{W}(j\omega, t) = \int_0^{\infty} w(t, \lambda) e^{-j\omega(t-\lambda)} d\lambda \quad (372)$$

$\bar{W}(j\omega, t_1)$ - parametryczna funkcja przejścia, sprzężona z funkcją $W(j\omega, t_1)$.

4.12.4. Dyspersja procesu wyjściowego

Wyznaczenie dyspersji procesu stochastycznego wyjściowego $\eta(t)$ nie może być zrealizowane w oparciu o znaną dyspersję $D\mu(t)$. Należy dysponować funkcją korelacji własnej procesu $\mu(t)$.

Dyspersję procesu wyjściowego wyznacza się z równości

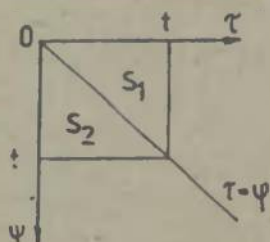
$$D\eta(t) = R_{uu}(t, t) \quad (373)$$

Jeżeli w zależnościach (361) oraz (368) wprowadzimy zmianę t_1 oraz t_2 na t , to zgodnie z równością (373) otrzymamy wzory na dyspersję procesu wyjściowego $\eta(t)$

$$D_{\eta}(t) = \int_0^t W(t, \psi) d\psi \int_0^t W(t, \tau) R_{mm}(\tau, \psi) d\tau \quad (374)$$

$$D_{\eta}(t) = \int_0^t W(t, \psi) d\psi \int_0^t W(t, \tau) S_0(\psi) \delta(\tau - \psi) d\tau \quad (375)$$

Z warunku $t \rightarrow \infty$ wyznaczamy dyspersję w stanie ustalonym. Ze względu na to, że funkcja autokorelacyjna $R_{mm}(\tau, \psi) = R_{mm}(\psi, \tau)$, zadaje się ją zwykle dla $\tau > \psi$, a obszar całkowania /rysunek 9/ określony jest nierównościami



$$\text{obszar } S_1, 0 \leq \psi \leq \tau \leq t \quad (376)$$

$$\text{obszar } S_2, 0 \leq \tau \leq \psi \leq t$$

Rys. 9. Obszar całkowania całek (374) i (375) Całki we wzorach (374) można zapisać symbolicznie w postaci

$$\iint_{S_1 + S_2} = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 2 \iint_{S_1} \quad (377)$$

Wobec zależności (377) wzory (374) oraz (375) przyjmą postać

$$D_{\eta}(t) = 2 \int_0^t W(t, \psi) d\psi \int_{\psi}^t W(t, \tau) R_{mm}(\tau, \psi) d\tau \quad (378)$$

$$D_{\eta}(t) = 2 \int_0^t W(t, \psi) d\psi \int_{\psi}^t W(t, \tau) S_0(\psi) \delta(\tau - \psi) d\tau \quad (379)$$

Stosując wybiórczą własność δ -funkcji do całki wewnętrznej wzoru (379)

$$\int_{\psi}^t W(t, \tau) S_0(\psi) \delta(\tau - \psi) d\tau = \frac{1}{2} S_0(\psi) W(t, \psi) \quad (380)$$

otrzymamy nową postać tego wzoru

$$D_{\eta}(t) = \int_0^t S_0(\psi) W^2(t, \psi) d\psi \quad (381)$$

Dyspersję $D_{\eta}(t)$ procesu wyjściowego można również wyznaczyć ze

wzoru (371) . Wprowadzając oznaczenie $t_1=t_2=t$ otrzymamy

$$D_{\eta}(t) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} S_{mm}(\omega) |W(j\omega, t)|^2 d\omega \quad (382)$$

Dla przypadku, gdy $S_{mm}(\omega) = S_0$ / sygnałem wejściowym jest szum biały/ wzór (382) uprości się do postaci

$$D_{\eta}(t) = \frac{S_0}{T} \int_0^{\infty} |W(j\omega, t)|^2 d\omega \quad (383)$$

Jeżeli sygnałem wejściowym jest proces w postaci

$$\mu(t) = \mu \psi(t) \quad (384)$$

gdzie: μ - wielkość przypadkowa,

$\psi(t)$ - funkcja czasu nieprzypadkowa,

z funkcją korelacyjną

$$R_{mm}(t_1, t_2) = D_{\mu} \psi(t_1) \psi(t_2) \quad (385)$$

to dyspersję procesu wyjściowego wyznacza się z zależności

$$D_{\eta}(t) = D_{\mu} \left[\int_0^t W(t, \psi) \psi(\psi) d\psi \right]^2 \quad (386)$$

Dyspersję procesu wyjściowego można również wyznaczyć z zależności (132), która wobec równości (373) przyjmie postać

$$D_{\eta}(t) = R_{uu}(t, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(\omega_1, \omega_2) e^{jt(\omega_1 - \omega_2)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (387)$$

4.12.5. Gęstość widmowa procesu wyjściowego

Jeżeli zależność (361) pomnożymy przez $\exp(-st_1 - pt_2)$ oraz zcałkujemy względem t_1 oraz t_2 od 0 do ∞

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{uu}(t_1, t_2) e^{-st_1 - pt_2} dt_1 dt_2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st_1 - pt_2} \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W(t_1, \psi) W(t_2, \eta) R_{mm}(\psi, \eta) d\psi d\eta \right] dt_1 dt_2 \quad (388)$$

to otrzymamy obraz laplasowski funkcji korelacji własnej procesu $\eta(t)$

$$S_{uu}(s, p) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W(s, \psi) W(p, \eta) R_{mm}(\psi, \eta) d\psi d\eta \quad (389)$$

gdzie $W(s, \psi)$ jest przekształceniem niepełnym funkcji wagowej, ponieważ

dolna granica całkowania nie jest równa zero |

$$W(s, \psi) = \int_{\psi}^{\infty} W(t, \psi) e^{-st} dt \quad (390)$$

Funkcja wagowa /charakterystyka impulsowa obiektu nieustalonego/ dla fizycznie realizowalnego obiektu dynamicznego spełnia warunek

$$W(t, \psi) = 0 ; t < \psi \quad (391)$$

Wprowadzając we wzorze (389) zamiast $s = j\omega$ oraz $p = j\omega$ otrzymamy obraz fourierowski tej zależności

$$S_{uu}(\omega_3, \omega_4) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W(\omega_3, \psi) W(\omega_4, \tau) R_{mm}(\psi, \tau) d\psi d\tau \quad (392)$$

Zgodnie ze wzorem (132) funkcję autokorelacyjną procesu wejściowego $\mu(t)$ określa się z zależności

$$R_{mm}(\psi, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1\psi - \omega_2\tau)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (393)$$

Zastępując funkcję $R_{mm}(\psi, \tau)$ we wzorze (392) wyrażeniem (393) oraz stosując przekształcenie Fouriera do charakterystyki impulsowej

$$\bar{W}(\omega_1, \omega_3) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega_1, \psi) e^{j\omega_1\psi} d\psi \quad (394)$$

$$W(\omega_2, \omega_4) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega_2, \tau) e^{-j\omega_2\tau} d\tau \quad (394a)$$

otrzymamy wzór

$$S_{uu}(\omega_3, \omega_4) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(\omega_1, \omega_2) \bar{W}(\omega_1, \omega_3) W(\omega_2, \omega_4) d\omega_1 d\omega_2 \quad (395)$$

z którego wyznacza się dwuczęstotliwościową gęstość widmową procesu wyjściowego.

Stosując powyższe postępowanie do zależności (365), otrzymamy wzór określający wzajemną gęstość widmową dwóch procesów $\mu(t)$ oraz $\eta(t)$

$$S_{mu}(\omega_3, \omega_4) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(\omega_3, \omega_2) W(\omega_2, \omega_4) d\omega_2 \quad (396)$$

Przy znanych gęstościach widmowych, ze wzorów (395) oraz (396) wyznacza się funkcję przejścia obiektu dynamicznego nieustalonego, a stosując odwrotne przekształcenie Fouriera otrzymuje się charakterystykę impulsową

$$W(t, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega_1, \omega_2) e^{-j(\omega_1 t - \omega_2 \tau)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (397)$$

Wsory (395) i (396) dla procesów stochastycznych ustalonych oraz obiektu dynamicznego ustalonego znacznie upraszczają się i mają postacie

$$S_{uu}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_{mm}(\omega) \quad (398)$$

$$S_{mu}(\omega) = W(j\omega) S_{mm}(\omega) \quad (399)$$

4.13. Równanie dynamiki obiektu dynamicznego nieustalonego

Równanie opisujące dynamikę obiektu nieustalonego

$$M(D,t)\eta(t) = L(D,t)\mu(t) \quad (400)$$

gdzie: $D = \frac{d}{dt}$

$$M(D,t) = \sum_{i=0}^n a_i(t) D^i \quad (401)$$

$$L(D,t) = \sum_{j=0}^m b_j(t) D^j \quad (402)$$

$\mu(t)$ - proces stochastyczny wejściowy,

$\eta(t)$ - proces stochastyczny wyjściowy nieustalony,

zapisane dla realizacji $u(t)$ oraz $m(t)$ ma postać

$$M(D,t)u(t) = L(D,t)m(t) \quad (403)$$

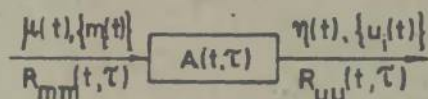
Jeżeli wymuszeniem jest funkcja impulsowa, to otrzymane równanie operatorowe niejednorodne określające charakterystykę impulsową obiektu nieustalonego

$$M(D,t)W(t,\tau) = L(D,t)\delta(t-\tau) \quad (404)$$

Ponieważ funkcje $u(t)$ oraz $m(t)$ są funkcjami przypadkowymi, równanie (404) nie ma znaczenia praktycznego. W celu praktycznego wykorzystania równania (404) należy przypadkowe realizacje zastąpić funkcjami nieprzypadkowymi. Takimi funkcjami nieprzypadkowymi są funkcje korelacyjne. Mając postacie analityczne zdeterminowane, funkcje $R_{mm}(t,\tau)$ oraz $R_{uu}(t,\tau)$ reprezentują sygnał wejściowy oraz

wyjściowy. Funkcje autokorelacyjne powiązane są ze sobą operatorem modelu /rysunek 10/

$$R_{uu}(t, \tau) = \tilde{A}^T(t, \tau) R_{ww}(t, \tau) \quad (405)$$



Rys. 10. Model obiektu dynamicznego z wymuszeniem stochastycznym

Zależność (405) reprezentowana jest w obszarze oryginalów przez równanie (361). Przy znanych funkcjach autokorelacyjnych sygnałów $\mu(t)$ oraz $\eta(t)$, z równania (361) wyznacza się charakterystykę impulsową $w(t, \tau)$. W obszarze obrazów zależność (405) reprezentowana

jest wzorem (395), z którego wyznacza się funkcję przejścia $W(\omega_1, \omega_2)$. Używając wzoru (397) otrzymamy funkcję $w(t, \tau)$. Proste przekształcenie Fouriera pozwala wyznaczyć obraz charakterystyki impulsowej

$$W(\omega_1, \omega_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} w(t, \tau) e^{j(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt d\tau \quad (406)$$

gdzie: $t_1 = t$,
 $t_2 - t_1 = \tau$.

Działając operatorem $M(D, t)$ na zależność (369b)

$$M(D, t) R_{uu}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} W(\tau, \lambda) M(D, \lambda) w(t, \lambda) d\lambda \quad (407)$$

oraz uwzględniając równanie (404) otrzymamy

$$M(D, t) R_{uu}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} W(\tau, \lambda) L(D, \lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda \quad (408)$$

Z definicji funkcji $\delta(t - \tau)$ wynika, że dla $t > \tau$ całka równania (407) jest równa zero. Otrzymamy równanie różniczkowe jednorodne

$$M(D, t) R_{uu}(t, \tau) = 0 ; t > \tau \quad (409)$$

Jeżeli do analizy użyjemy równania (369a), to otrzymamy równanie różniczkowe niejednorodne

$$M(D, t) R_{uu}(t, \tau) = L(D, t) w(\tau, t) ; t < \tau \quad (410)$$

Równanie (410) wskazuje, że odpowiedzią obiektu dynamicznego nieustalnego o charakterystyce impulsowej $w(t, \tau)$ na wymuszenie $w(\tau, t)$

jest funkcja korelacyjna $R_{uu}(t, \tau)$.

Wykorzystując równanie sprężone

$$M(0, \tau) \eta(\tau) = L(0, \tau) \mu(\tau); D = \frac{d}{d\tau} \quad (411)$$

otrzymamy nowe dwa równania operatorowe podobne do równań (409) oraz (410)

$$M(0, \tau) R_{uu}(t, \tau) = 0; \tau > t \quad (412)$$

$$M(0, \tau) R_{uu}(t, \tau) = L(0, \tau) W(t, \tau); t > \tau \quad (413)$$

Układ równań (409), (410), (412) i (413) opisuje zachowanie się funkcji korelacji własnej procesu wyjściowego $R_{uu}(t, \tau)$ w całym obszarze zmienności argumentów t oraz τ .

W celu wyznaczenia funkcji $R_{uu}(t, \tau)$, z równania (409) należy określić warunki początkowe dla $t = \tau^+$, t.j. podać wartość dyspersji wraz z $n-1$ pochodnymi funkcji korelacyjnej.

Rozwiązaniem równań jest funkcja korelacji własnej procesu $\eta(t)$

$$R_{uu}(t, \tau) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \psi_i(\tau); t \geq \tau & (414) \\ \sum_{i=1}^n \varphi_i(\tau) \psi_i(t); t < \tau & (415) \end{cases}$$

gdzie: $\varphi_i(t)$ - funkcja należąca do układu fundamentalnego rozwiązań równania (409),

$\psi_i(\tau)$ - rozwiązanie szczególne równania (410); funkcje określone są warunkami początkowymi nałożonymi na $R_{uu}(t, \tau)$,

n - rząd operatora $M(D, t)$.

4.14. Równania całkowe dynamiki obiektu dynamicznego niustalonego

Jeżeli równanie różniczkowe

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \frac{d^i u(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j(t) \frac{d^j m(t)}{dt^j} \quad (416)$$

z warunkami początkowymi

$$u_0^{(i)} = \left. \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right|_{t=t_0}; m_0^{(j)} = \left. \frac{d^j m(t)}{dt^j} \right|_{t=t_0}; i = \overline{0, n-1}; j = \overline{0, m-1} \quad (417)$$

scałkujemy n razy, to otrzymamy równanie całkowe Volterra drugiego rodzaju

$$u(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau) u(\tau) d\tau = d_n(t) m(t) + \int_{t_0}^t L(t, \tau) m(\tau) d\tau + F(t) \quad (418)$$

gdzie:

$$K(t, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-\tau)^i}{i!} c_{n-i-1}(\tau) \quad (419)$$

$$L(t, \tau) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(t-\tau)^i}{i!} d_{m-i-1}(\tau) \quad (420)$$

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t_0) \frac{(t-t_0)^i}{i!} \quad (421)$$

$$c_i(\tau) = \sum_{k=0}^{n-i-1} (-1)^k C_{k+i}^k a_{k+i}^{(k)}(\tau) \quad (422)$$

$$d_i(\tau) = \sum_{k=0}^{m-i-1} (-1)^k C_{k+i}^k b_{k+i}^{(k)}(\tau) \quad (423)$$

$$f_i(t_0) = \sum_{k=0}^i \sum_{r=0}^k (-1)^{r-1} C_{n+r-i-1}^r [b_{n+r+k-i}^{(r)}(t_0) m_0^{(k)} - a_{n+r+k-i}^{(r)}(t_0) u_0^{(k)}] \quad (424)$$

$$a_i(\tau) = c_i(\tau) - \sum_{k=1}^{n-i-1} (-1)^k C_{k+i}^k a_{k+i}^{(k)}(\tau) \quad (425)$$

$$b_i(\tau) = d_i(\tau) - \sum_{k=1}^{m-i-1} (-1)^k C_{k+i}^k b_{k+i}^{(k)}(\tau) \quad (426)$$

$u(t)$, $m(t)$ -realizacje procesów stochastycznych $\eta(t)$ oraz $\mu(t)$,

$$C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}$$

We wzorach (419), (420) oraz (421) składniki sumy są równe zero dla przypadku, gdy przedział górny sumowania jest mniejszy od przedziału dolnego. Dla zerowych warunków początkowych znika wyraz swobodny $F(t) = 0$.

Równanie całkowe (418) pozwala wyznaczyć momenty procesu wyjście-

wego. W tym celu wszystkie wyrazy tego równania należy poddać działaniu operatora $M\{\}$. Po wykonaniu operacji uśrednienia statystycznego otrzymamy równanie

$$m_\eta(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau) m_\eta(\tau) d\tau = d_n(t) m_\mu(t) + \int_{t_0}^t L(t, \tau) m_\mu(\tau) d\tau + M\{F(t)\} \quad (427)$$

w którym $m_\eta(t)$ oraz $m_\mu(t)$ oznaczają nadzieje matematyczne procesów $\eta(t)$ oraz $\mu(t)$.

Jeżeli realizacje w równaniu (418) scentrujemy, pomnożymy otrzymaną zależność przez $\hat{R}(t)$ oraz wykonamy operację $M\{\}$, to otrzymamy równanie

$$R_{\mu\eta}(t, \theta) + \int_{t_0}^t K(t, \tau) R_{\mu\eta}(\tau, \theta) d\tau = d_n(t) R_{\mu\mu}(t, \theta) + \int_{t_0}^t L(t, \tau) R_{\mu\mu}(\tau, \theta) d\tau + M\{F(t) \hat{u}(\theta)\} \quad (428)$$

w którym zamiast sygnału wyjściowego występuje funkcja korelacji wzajemnej.

Jeżeli natomiast pomnożymy zależność otrzymaną z równania (418) po scentrowaniu realizacji przez $\hat{R}(t)$ oraz wykonamy operację nadziei matematycznej $M\{\}$, to otrzymamy równanie

$$R_{\mu\mu}(t, \theta) + \int_{t_0}^t K(t, \tau) R_{\mu\mu}(\tau, \theta) d\tau = d_n(t) R_{\mu\mu}(t, \theta) + \int_{t_0}^t L(t, \tau) R_{\mu\mu}(\tau, \theta) d\tau + M\{F(t) \hat{u}(\theta)\} \quad (429)$$

w którym zamiast sygnału wyjściowego występuje funkcja autokorelacyjna.

Równania (428) oraz (429) przy $\theta = \theta_0$ są równaniami Volterra drugiego rodzaju, do rozwiązywania których używane są metody modelowania.

4.15. Stosowanie metody filtrów kształtujących w analizie dynamiki obiektów nieustalonych

4.15.1. Metoda filtru kształtującego

Pod pojęciem filtru kształtującego rozumiemy liniowy układ dynamiczny, wymuszony szumem białym dającym na wyjściu proces stochastyczny o funkcji korelacyjnej zgodnej zadaną.

Jeżeli na wejściu filtru kształtującego o dobranej funkcji przejścia podamy szum biały, to na wyjściu otrzymamy proces stochastyczny $\mu(t)$ o realizacji $m(t)$

$$m(t) = E^{-1}(D, t) K(D, t) s(t) \quad (430)$$

gdzie: $s(t)$ - szum biały,

$E(D,t)$, $K(D,t)$ - operatory równania filtru kształtującego,

$E^{-1}(D,t)$ - operator odwrotny do operatora $E(D,t)$.

Analogicznie do wzorów (409) oraz (410) otrzymamy równania dla filtru kształtującego

$$E(D,t) R_{mm}(t,\tau) = 0 \quad ; t > \tau \quad (431)$$

$$E(D,t) R_{mm}(t,\tau) = K(D,t) W_F(\tau,t) \quad ; t < \tau \quad (432)$$

gdzie $W_F(t,\tau)$ jest charakterystyką impulsową filtru.

Z równania (432) otrzymamy

$$W_F(\tau,t) = \bar{K}(D,t) g_F(\tau,t) \quad (433)$$

gdzie: $\bar{K}(D,t)$ - operator sprzężony względem operatora $K(D,t)$,

$g_F(t,\tau)$ - charakterystyka impulsowa filtru dla $K(D,t) = 1$.

Rozwiązanie równania (432) jest znacznie łatwiejsze, jeżeli funkcję korelacyjną $R_{mm}(t,\tau)$ opiszemy zależnością (414).

Znając układ fundamentalny rozwiązań równania (431), operator $E(D,t)$ można wyznaczyć przez wyliczenie wyznacznika rzędu $n+1$

$$E(D,t)m(t) = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_n m \\ \psi_1' & \psi_2' & \dots & \psi_n' m' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1^{(n)} & \psi_2^{(n)} & \dots & \psi_n^{(n)} m^{(n)} \end{vmatrix} \quad (434)$$

gdzie n jest rzędem operatora różniczkowego $E(D,t)$.

Wychodząc z układu rozwiązań $\psi_i(t)$, funkcję $g_F(t,\tau)$ wyznaczamy ze wzoru

$$g_F(t,\tau) = \frac{(-1)^{n-1}}{e_n(\tau) \Delta(\tau)} \begin{vmatrix} \psi_1(\tau) & \psi_2(\tau) & \dots & \psi_n(\tau) \\ \psi_1'(\tau) & \psi_2'(\tau) & \dots & \psi_n'(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-2)}(\tau) & \psi_2^{(n-2)}(\tau) & \dots & \psi_n^{(n-2)}(\tau) \end{vmatrix} \quad (435)$$

gdzie: $e_n(t)$ - współczynnik przy najwyższej pochodnej w operatorze $E(D,t)$,

$\Delta(\tau)$ - wyznacznik Wronskiego odpowiadający równaniu (431),

$$\Delta(\tau) = \begin{vmatrix} \psi_1(\tau) & \psi_2(\tau) & \dots & \psi_n(\tau) \\ \psi_1'(\tau) & \psi_2'(\tau) & \dots & \psi_n'(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(\tau) & \psi_2^{(n-1)}(\tau) & \dots & \psi_n^{(n-1)}(\tau) \end{vmatrix} \quad (436)$$

Znając operator $E(D, t)$ oraz funkcje $R_{mm}(t, \tau)$ i $G_T(t, \tau)$, z iloczynem $K(D, t)K(D, \tau)$ wyznaczamy operator $K(D, t)$.

Analogicznie do wzorów (369a) oraz (369b) funkcję korelacji własnej procesu stochastycznego na wyjściu z filtra wyznacza się z zależności

$$R_{mm}(t, \tau) = \begin{cases} \int_{-\infty}^t W_F(t, \lambda) W_F(\tau, \lambda) d\lambda, & t < \tau \\ \int_{-\infty}^{\tau} W_F(t, \lambda) W_F(\tau, \lambda) d\lambda, & t > \tau \end{cases} \quad (437a, b)$$

W obliczeniach praktycznych, proces określenia parametrów wielomianu $E(D, t)$ /przy zadanym n / sprowadza się do minimalizacji pewnego kryterium Φ , charakteryzującego zgodność funkcji korelacyjnej $R_{mm}(t, \tau)$ zadanej i otrzymanej na wyjściu z filtra o równaniu

$$E(D, t) R'_{mm}(t, \tau) = 0 \quad (438)$$

oraz warunkach początkowych

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p R'_{mm}(t, \tau)}{\partial t^p \partial \tau^s} \Big|_{t=\tau} &= R_{mm}^{(r+s)} \\ R'_{mm}(t, \tau) \Big|_{t=\tau} &= D \mu(p = l, n-1; p = r+s) \end{aligned} \quad (439)$$

Liczba warunków początkowych (439) określa rząd n filtra. Miarą jakości odtwarzania przekrojów funkcji $R_{mm}(t, \tau)$ oraz $R'_{mm}(t, \tau)$ jest kryterium kwadratowe

$$\Phi = \int_0^T \int_0^t [R_{mm}(t, \tau) - R'_{mm}(t, \tau)]^2 d\tau dt \quad (440)$$

gdzie $[0, T]$ jest przedziałem, w którym analizuje się proces.

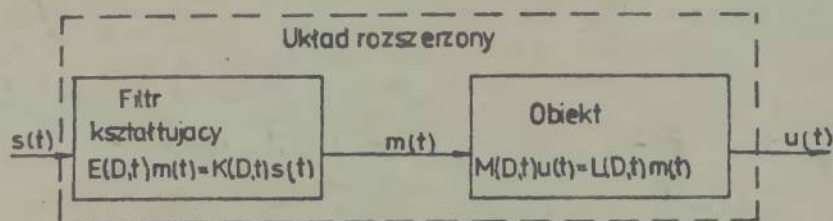
4.15.2. Metoda układu sprzężonego

Układem rozszerzonym nazywamy szeregowo połączenie filtra kształtującego oraz obiektu dynamicznego /rysunek 11/.

Stosowanie metody układu sprzężonego do wyznaczenia charakterystyk statystycznych wyjściowego procesu stochastycznego niestacjonarnego sprowadza się do wykonania prostych obliczeń (368, 369), a więc do wykonania operacji:

- określenia filtra kształtującego /formującego/, służącego do wyznaczenia z szumu białego $z(t)$ procesu $\mu(t)$ o znanej funkcji korelacyjnej $R_{mm}(t, \tau)$.

- zapisania równania różniczkowego lub całkowego dla układu rozszerzonego oraz rozwiązywania równania przy założeniu, że na wejściu układu podano szum biały (367) .



Rys. 11. Schemat blokowy układu rozszerzonego

Zgodnie z zamieszczonym schematem /rysunek 11/ równanie różniczkowe modelu układu rozszerzonego ma postać

$$M(D,t)u(t) = L_1(D,t)s(t) \quad (441)$$

Operator $L_1(D,t)$ układu rozszerzonego wiąże ze sobą operatory filtru kształtującego oraz obiektu dynamicznego

$$L_1(D,t) = L(D,t)E^{-1}(D,t)K(D,t) \quad (442)$$

gdzie $E^{-1}(D,t)$ jest operatorem odwrotnym do operatora $E(D,t)$.

Charakterystyka impulsowa układu o równaniu (441) określona jest zależnością

$$w_1(t,\tau) = \int_0^t w(t,\tau) w_F(\lambda,\tau) d\lambda ; t > \tau \quad (442a)$$

gdzie: $w_1(t,\tau)$ - charakterystyka impulsowa układu rozszerzonego,

$w(t,\tau)$ - charakterystyka impulsowa obiektu,

$w_F(t,\tau)$ - charakterystyka impulsowa filtru.

4.16 Określenie charakterystyki impulsowej optymalnej

Decyzja doboru optymalnego układu dynamicznego może być oparta albo na analizie różnych wariantów układu, albo na analizie charakterystyk pracy jednego układu w różnych warunkach. Wobec możliwości traktowania charakterystyk pracy układu jako procesów stochastycznych, drugi wariant realizacji układu optymalnego jest bardziej racjonalny.

Praktycznie zagadnienie sprowadza się do badania procesów wyjściowych przy zadanych procesach wejściowych.

Zagadnienie określenia układu optymalnego można rozwiązać teoretycznie dwoma sposobami. Zadaje się strukturę układu i poszukuje się parametrów, dających układ najlepszej jakości ze względu na wybrane kryterium, albo poszukuje się ekstremum wielu zmiennych /określa się operator optymalny dla układu dynamicznego ze względu na obrane kryterium optymalności/. Idealnym rozwiązaniem jest określenie struktury układu optymalnego i wartości wszystkich jego parametrów.

Teoria układów optymalnych, oparta na odpowiednich kryteriach optymalnej jakości daje możliwość określenia przydatności układu do pracy w konkretnych warunkach /optymalna przydatność graniczna/.

Porównanie układu projektowanego teoretycznie z układem pracującym daje konstruktorowi możliwość określenia na ile układ zaprojektowany jest zbliżony do układu optymalnego. W wielu przypadkach, dla zapewnienia prostoty i niezawodności pracy, układ realizowany nie będzie układem optymalnym.

Na bazie układów optymalnych opracowana jest teoria identyfikacji i odtwarzania sygnałów w obecności zakłóceń. Jeżeli układ zaopatrzony jest w automatyczną korektę sygnału, to jest układem samonastawiającym się. Układy takie o strukturze bardziej skomplikowanej nazywane są układami samoorganizującymi się. Teoria układów optymalnych daje ponadto algorytmy estymacji sygnałów, w oparciu o które budowane są układy samouczące się, t.j. układy, które z każdym nowym cyklem pracy stają się coraz bliższe układowi optymalnemu.

Układ optymalny stanowi kolejność operacji matematycznych, które należy wykonać na procesie wejściowym, aby, zapewniając najlepszą dokładność przekształcenia, otrzymać żądany proces wyjściowy. Innymi słowy, układ optymalny określa takie charakterystyki dynamiczne, które konstruktor nie powinien zmieniać, pamiętając również o tym, że główne elementy układu określone są przeznaczeniem pracy obiektu dynamicznego.

W celu przybliżenia charakterystyk do optymalnych, konstruktor może włączyć urządzenia korygujące, dobierając odpowiednią strukturę i parametry, t.j. dokonać syntezy układu. Dotychczas nie opracowano ogólnych metod syntezy tego typu układów.

Zagadnienie podstawowe teorii układów optymalnych matematycznie przedstawia się relacją

$$\eta'(t) = \hat{A}^{-1} \mu(t) \quad (443)$$

gdzie: $\mu(t)$ - proces wejściowy rzeczywisty,

$\eta'(t)$ - proces wyjściowy otrzymany z obiektu,

$\hat{A}^{-1}$ - operator opisujący dynamikę / $\hat{A} = A^{-1}_{opt}$ jeżeli $\eta(t) = \eta'(t)$./

tj. proces wyjściowy jest procesem śladanym/.
Jeżeli ΔA_{opt}^{-1} , to występuje błąd układu

$$\varepsilon(t) = \eta'(t) - \eta(t) \quad (444)$$

Błąd ten jest wielkością przypadkową i nie może bezpośrednio być miarą jakości układu. Operuje się charakterystykami statystycznymi błędów, które są funkcjami nieprzypadkowymi.

Jako kryterium przyjmuje się funkcję

$$f\{M\{\varepsilon(t)\}; D_{\varepsilon}(t)\} = \text{ekstremum} \quad (445)$$

gdzie: $M\{\varepsilon(t)\}$ - nadzieja matematyczna błędów,
 D_{ε} - dyspersja błędów.

Najczęściej używa jako kryterium dyspersji błędów

$$D_{\varepsilon}(t) = M\{\varepsilon^2(t)\} = \text{minimum} \quad (446)$$

Jeżeli struktura układu jest znana, to w celu określenia parametrów należy wyznaczyć zależność dyspersji od tych parametrów.

Dla przypadków prostych zależność tę udaje się otrzymać w postaci analitycznej. Wówczas wartości optymalne parametrów określa się z układu równań otrzymanych przez przyrównanie do zera pochodnych cząstkowych kryterium (446).

Projektowane układy mają za zadanie realizację określonych operacji nad sygnałem $m(t)$. Żądana odpowiedź $u(t)$ określona jest zależnością

$$u(t) = \int_0^t w(t, \tau) m(\tau) d\tau \quad (447)$$

Ze względu na to, że na proces sterujący nakładają się zakłócenia i szumy, wzór (447) przyjmie postać

$$u'(t) = \int_0^t w_{opt}(t, \tau) r(\tau) d\tau \quad (448)$$

gdzie

$$r(t) = m(t) + z(t) \quad (449)$$

Dyspersja błędów układu optymalnego jest równa

$$D_{\varepsilon_{min}}(t) = M\{\varepsilon^2(t)\} = M\{[u'(t) - u(t)]^2\} = R_{uu}(t, t) - 2 \int_0^t R_{ru}(t, \tau) w_{opt}(t, \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^t R_{rr}(\tau, \sigma) w_{opt}(t, \tau) w_{opt}(t, \sigma) d\tau d\sigma \quad (450)$$

Charakterystyki impulsowe układu rzeczywistego i optymalnego powiązane są ze sobą zależnością

$$W(t, \tau) = W_{opt}(t, \tau) + k h(t, \tau) \quad (451)$$

Uwzględniając powyższą zależność w równaniu (450) oraz wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymamy wzór na obliczenie dyspersji błędu

$$\begin{aligned} D_E(t) = & D_{\eta}(t) - 2 \int_0^t R_{ru}(t, \tau) W_{opt}(t, \tau) d\tau + \iint_{00}^{tt} R_{rr}(\tau, \vartheta) W_{opt}(t, \tau) W_{opt}(t, \vartheta) d\tau d\vartheta - \\ & - 2k \int_0^t R_{ru}(\tau, t) h(t, \tau) d\tau + 2k \iint_{00}^{tt} R_{rr}(\tau, \vartheta) W_{opt}(t, \vartheta) h(t, \tau) d\tau d\vartheta + \\ & + k^2 \iint_{00}^{tt} R_{rr}(\tau, \vartheta) h(t, \tau) h(t, \vartheta) d\tau d\vartheta \end{aligned} \quad (452)$$

Aby wielkość $D_E(t)$ była minimalna, tj.

$$D_E(t) = D_{Emin}(t) \quad (453)$$

Powinien być spełniony warunek

$$\int_0^t h(t, \tau) R_{ru}(\tau, t) d\tau - \iint_{00}^{tt} R_{rr}(\tau, \vartheta) W_{opt}(t, \vartheta) h(t, \tau) d\tau d\vartheta = 0 \quad (454)$$

Równanie (454) można zapisać w innej postaci

$$\int_0^t h(t, \tau) \left[R_{ru}(\tau, t) - \int_0^t R_{rr}(\tau, \vartheta) W_{opt}(t, \vartheta) d\vartheta \right] d\tau = 0 \quad (455)$$

w której zmienna τ zawarta jest w przedziale

$$0 \leq \tau \leq t \quad (456)$$

Z równania (455) wynika zależność

$$\int_0^t R_{rr}(\tau, \vartheta) W_{opt}(t, \vartheta) d\vartheta - R_{ru}(\tau, t) = 0 \quad (457)$$

z której, dla zadanych funkcji korelacyjnych $R_{rr}(t, \tau)$ oraz $R_{ru}(t, \tau)$, wyznacza się charakterystykę impulsową układu optymalnego.

Dla obiektu ze skończoną pamięcią wzór (457) przyjmie postać

$$\int_{t-T}^t R_{rr}(\tau, \vartheta) W_{opt}(t, \vartheta) d\vartheta - R_{ru}(\tau, t) = 0 \quad (458)$$

Gdy istnieje tylko problem filtracji, tj. odtwarzania procesu $\eta(t)$

na wyjściu z obiektu, to równanie (458) będzie zawierało tylko funkcję autokorelacyjną

$$\int_0^t R_{rr}(\tau, 0) W_{opt}(\tau, 0) d\tau - R_{mm}(\tau, t) = 0 \quad (459)$$

Równania (457, 458, 459) rozwiązywane są przez zastosowanie metod przybliżonych /sprowadzenie równania całkowego do układu równań różniczkowych/.

W procesie projektowania układów regulacji powinny być uwzględnione następujące zagadnienia:

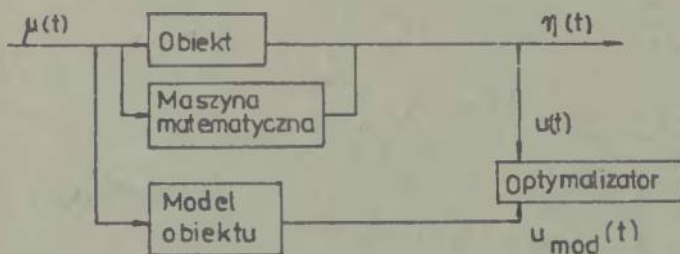
- stabilność pracy układu,
- trwałość układu,
- koszty.

Wymagania te należy uwzględniać w fazie obliczeń charakterystyk dynamicznych. Teoria obliczeń powinna być przystosowana do szybkich obliczeń komputerowych. Czasami równania dynamiki /model/ nie mogą być zrealizowane praktycznie i dlatego do zagadnienia należy podejść racjonalnie, t.j. dokonać aproksymacji układem quasi-optymalnym. Również należy uwzględnić zależność rozwiązania zagadnienia optymalizacji od błędu analizy aparaturowej.

4.17. Zastosowanie metod analizy statystycznej do badania dynamiki obiektów dynamicznych niestabilnych w czasie normalnej eksploatacji

W celu syntezy układu regulacji należy wyznaczyć charakterystyki dynamiczne, a więc dokonać identyfikacji statystycznej obiektu w czasie jego normalnej eksploatacji /rysunek 12/.

Proces obliczenia charakterystyk dynamicznych składa się z następujących etapów:



- wyznaczenie charakterystyk liczbowych / średnie momenty dysypacyjne, średnie wartości funkcji argumentów przypadkowych, charakterystyki realizacji/.

Rys. 12. Schemat funkcjonalny identyfikacji statystycznej

- wyznaczenie charakterystyk funkcyjnych /funkcje rozkładu prawdopodobieństwa, funkcje korelacyjne, gęstość widmowa/,
- analiza struktury procesu stochastycznego/filtracja obserwacji, wykrycie utajonych składowych harmonicznych, badanie trendu/,
- modelowanie,
- badanie stopnia wpływu wielkości wejściowych na proces wyjściowy /zależności ilościowe/.

Wybór metody badań dynamicznych zależy od charakteru obiektu. Najlepsze wyniki uzyskuje się, jeżeli przeprowadzamy doświadczenie planowe. Nie wyklucza się również użycia informacji uzyskanych a priori, które zmniejszają objętość obliczeń koniecznych do identyfikacji obiektu. Wykorzystanie charakterystyk statystycznych wyznaczonych doświadczalnie podnosi jakość teoretycznych obliczeń dynamicznych. Nastawy parametrów układu pracującego oparte są tylko na danych doświadczalnych.

Metody wyznaczenia charakterystyki impulsowej obiektu z pomiarów doświadczalnych wykonanych przy użyciu instalacji przemyślnej wykorzystują wzór (347), zapisany w postaci skończonej sumy

$$u_n = \Delta t \sum_{l=0}^{n_T} w_l(n) m_{n-l} \quad (460)$$

gdzie: $w_l(n)$ - odcięta charakterystyki impulsowej sprzężonej,
 n - moment,

$$n_T = \frac{t_n}{\Delta t},$$

t_n - czas trwania charakterystyki impulsowej.

Wielkość $w_l(n)$ można aproksymować liniową kombinacją zadanych funkcji czasu

$$w_l(n) = w_l^{(0)} \varphi_l^{(0)}(n) + w_l^{(1)} \varphi_l^{(1)}(n) + \dots + w_l^{(L_l)} \varphi_l^{(L_l)}(n) \quad (461)$$

lub w zapisie zwartym

$$w_l(n) = \sum_{l=0}^{L_l} w_l^{(l)} \varphi_l^{(l)}(n) \quad (462)$$

gdzie $\{\varphi_l^{(l)}(n)\}$ jest zbiorem funkcji liniowo niezależnych.

Uwzględniając zależność (462) we wzorze (460) otrzymamy układ równań liniowych algebraicznych

$$\sum_{i=0}^{n_T} m_{n-i} \sum_{l=0}^{L_l} w_l^{(l)} \varphi_l^{(l)}(n) = \frac{1}{\Delta t} u_n \quad (463)$$

Wyznaczając z układu równań (463) współczynniki w_l oraz uwzględniając je w równaniu (462) otrzymamy macierz charakterystyki $w(n)$.

Użyta metoda pozwala ekstrapolować obliczenia poza granice obserwacji przy założeniu, że zmiana charakterystyki impulsowej w otoczeniu granic przedziału pozostaje taka sama jak wewnątrz przedziału.

Jeżeli przesuniemy momenty odczytu wielkości u_n oraz m_i o $\Delta t/2$, to ciąg $w_i(n)$

$$w_0(k), w_1(k), w_2(k), \dots, w_{n_T}(k); n=k=\text{const} \quad (464)$$

jest ciągiem odciętych charakterystyki impulsowej sprzężonej w momentach $t_k = k \Delta t$.

Ciąg wartości $w_i(k)$

$$w_0(k), w_1(k+1), w_2(k+2), \dots, w_{n_T}(k+n_T); n=k=\text{const} \quad (465)$$

jest charakterystyką impulsową normalną dla momentu $(k-1/2)\Delta t$ wprowadzenia wymuszenia impulsowego. Odcięte $w_i(k)$ oraz $w_i(k+i)$ są odciętymi charakterystykami impulsowej sprzężonej $w(t_k)$ oraz normalnej $w(t_k + \tilde{\tau} - \Delta t/2, \tilde{\tau})$ dla wartości argumentu $\tilde{\tau} = (i+1/2)\Delta t$ przy $i=1, 2, \dots, n_T$.

Stosując aproksymację wielomianową współczynników

$$\varphi_i^{(l)}(n) = \left(\beta_{l,i} + \frac{n}{\alpha_{l,i}} \right) \quad (466)$$

otrzymamy zależność

$$w_i(n) = \sum_{l=0}^{L_i} w_i^{(l)} \left(\beta_{l,i} + \frac{n}{\alpha_{l,i}} \right)^l \quad (467)$$

w której stałe $\alpha_{l,i}$ oraz $\beta_{l,i}$ są dobierane tak, aby elementy macierzy (463) nie miały dużych wartości, co może doprowadzić do dużego błędu w rozwiązaniu układu równań.

Dla przypadku, gdy $w(t, \tilde{\tau})$ zmienia się okresowo, do aproksymacji wielkości φ_i używa się funkcji trygonometrycznych

$$\varphi_i^{(0)}(n) = 1, \varphi_i^{(2l-1)}(n) = \cos(\bar{\omega}n), \varphi_i^{(2l)}(n) = \sin(\bar{\omega}n) \quad (468)$$

gdzie

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi \Delta t}{T} \quad (469)$$

Dla obiektów nieustalonych o współczynnikach równań różniczkowych mało zmieniających się w czasie, zakłada się $L_0 = L_1 = \dots = 1$ i odrzuca wpływ wielkości mających duży indeks $i/L_{n_T} = L_{n_T-1} = \dots = 0$.

Wybór wartości t_{n_T} oraz t znacząco komplikuje procedurę obliczeniową. Stosując metodę zamrożenia parametrów obiektu nieustalonego, wielkości te określa się z relacji granicznych $\text{sup.}, \text{inf.}/$.

5. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE NIEUSTALONE JEDNOWYMIAROWE O PARAMETRACH ZMIENIAJĄCYCH SIĘ PRZYPADKOWO. WYMUSZENIA STOCHASTYCZNE

5.1. Charakterystyka obiektów stochastycznych

Parametry obiektów stochastycznych zmieniają się przypadkowo. Zmiany są dwójakiego rodzaju: albo parametry obiektu, wobec pewnej tolerancji wykonania technicznego, mają przypadkowe odchylenia od dopuszczalnych wartości nominalnych, albo parametry zmieniają się przypadkowo na skutek przypadkowych zmian w przebiegu procesu technologicznego. W pierwszym przypadku parametr obiektu opisuje się funkcją zdeterminowaną ze składową przypadkową, a w drugim przypadku - procesem stochastycznym. Ponadto stochastycznymi są obiekty, których charakterystyki zmieniają się wraz ze zmianą chwilowych wartości sygnałów wejściowych.

Pod pojęciem parametr przypadkowy należy rozumieć parametr opisany funkcją przypadkową jako realizacją procesu stochastycznego, dla którego można wyznaczyć charakterystyki statystyczne.

Przeprowadza się szereg doświadczeń, na podstawie których ocenia się zmiany parametru a uzyskaną informację ekstrapoluje się na nieskończony zbiór hipotetycznych doświadczeń. Charakterystyki statystyczne mogą nie odzwierciedlać przypadkowych zmian parametru poza obszarem doświadczeń i dlatego należy je traktować jako charakterystyki proponowane.

Obiekty o parametrach stochastycznych nazywane są obiektami stochastycznymi. Analiza statystyczna takich obiektów jest trudna, ponieważ mnożenie sygnałów jest operacją nieliniową a rozkład prawdopodobieństwa zmienia się po przejściu sygnału przez obiekt dynamiczny. Przy analizie obiektów stochastycznych, w celu uogólnienia rozważań, charakterystyki zdeterminowane traktowane są jako przypadkowe, zgodne ze zdeterminowanymi, z prawdopodobieństwem równym jedności.

Analiza obiektów o parametrach stochastycznych ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ w tym przypadku zmienia się nie tylko sygnał wejściowy lecz i parametry samego obiektu.

5.2. Równanie różniczkowe modelu obiektu

Równanie różniczkowe modelu obiektu nieustalonego o parametrach zmieniających się przypadkowo można zapisać w następującej postaci

$$M(D, t, \alpha) \eta(t) = L(D, t, \beta) \mu(t) \quad (1)$$

gdzie:

$$M(D, t, \alpha) = \alpha_n(t) \frac{d^{(n)}}{dt^n} + \alpha_{n-1}(t) \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_0(t)$$

$$L(D, t, \beta) = \beta_m(t) \frac{d^{(m)}}{dt^m} + \beta_{m-1}(t) \frac{d^{(m-1)}}{dt^{m-1}} + \dots + \beta_0(t)$$

$M(D, t, \alpha); L(D, t, \beta)$ - operatory przypadkowe.

Jeżeli funkcje przypadkowe $\alpha(t)$ oraz $\beta(t)$, określające operatory przypadkowe $M(D, t, \alpha)$ oraz $L(D, t, \beta)$ mogą być scentrowane, to równanie (1) przyjmie postać

$$[M(D, t, \tilde{\alpha}) + M(D, t, m_\alpha)] \eta(t) = [L(D, t, \tilde{\beta}) + L(D, t, m_\beta)] \mu(t) \quad (2)$$

gdzie: $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) - m_\alpha(t)$
 $\tilde{\beta}(t) = \beta(t) - m_\beta(t)$

$M(D, t, \tilde{\alpha}), L(D, t, \tilde{\beta})$ - operatory przypadkowe funkcji przypadkowych scentrowanych $\tilde{\alpha}(t)$ i $\tilde{\beta}(t)$,

$M(D, t, m_\alpha); L(D, t, m_\beta)$ - operatory nieprzypadkowe funkcji $m_\alpha(t)$ i $m_\beta(t)$ stanowiących nadzieje matematyczne funkcji przypadkowych $\alpha(t)$ oraz $\beta(t)$.

Wielkości $\tilde{\alpha}(t)$ oraz $\tilde{\beta}(t)$ mogą być traktowane jako odchylenia parametrów $\alpha(t)$ oraz $\beta(t)$ od poziomu dopuszczalnego tolerancją procesu technologicznego.

Dla $L(D, t, \beta) = 1$ równanie (1) przyjmie postać

$$M(D, t, \alpha) \eta(t) = \mu(t) \quad (3)$$

Jeżeli tolerancja technologiczna parametru $\alpha(t)$ jest równa zeru $\tilde{\alpha}(t) = 0$, to otrzymamy równanie

$$M(D, t, m_\alpha) \eta_0(t) = \mu(t) \quad (4)$$

Równanie to opisuje pewien nominalny proces $\eta_0(t)$ obciążony odchyleniami.

W obliczeniach technicznych można założyć, że $\tilde{\alpha}(t)$ niewiele wpływa na proces wyjściowy i przy rozpisywaniu funkcji odchylenia ograniczamy się tylko przyrostem liniowym

$$\eta(t) = \eta_0(t) + \Delta \eta(t) \quad (5)$$

Gdzie $\Delta\eta(t)$ jest składową procesu wyjściowego, wynikającą z istnienia odchylenia przypadkowego $\Delta d_i(t)$ parametru $d_i(t)$

$$d_i(t) = d_{i0}(t) + \Delta d_i(t), \quad i = \overline{0, n} \quad (6)$$

Wprowadzając zależność (5) oraz (6) do równania (3) otrzymamy

$$\sum_{i=0}^n [d_{i0}(t) + \Delta d_i(t)] \frac{d^i [\eta_0(t) + \Delta\eta(t)]}{dt^i} = \mu(t) \quad (7)$$

Jeżeli $i=k$, równanie (7) przyjme postać

$$\sum_{i=0, i \neq k}^n a_i(t) \frac{d^i \eta_0(t)}{dt^i} + \sum_{i=0, i \neq k}^n a_i(t) \frac{d^i \Delta\eta(t)}{dt^i} + [d_{k0}(t) + \Delta d_k(t)] \frac{d^k \eta_0(t)}{dt^k} + [d_{k0}(t) + \Delta d_k(t)] \frac{d^k \Delta\eta(t)}{dt^k} = \mu(t) \quad (8)$$

które wobec zależności

$$\sum_{i=0, i \neq k}^n a_i(t) \frac{d^i \eta_0(t)}{dt^i} + d_{k0}(t) \frac{d^k \eta_0(t)}{dt^k} = \mu(t) \quad (9)$$

można zapisać w postaci

$$\sum_{i=0, i \neq k}^n a_i(t) \frac{d^i \Delta\eta(t)}{dt^i} + d_{k0}(t) \frac{d^k \Delta\eta(t)}{dt^k} = -\Delta d_k(t) \frac{d^k [\eta_0(t) + \Delta\eta(t)]}{dt^k} \quad (10)$$

Gdzie: $a_i(t)$ - współczynniki zdeterminowane,

$d_i(t)$ - współczynniki ze składową przypadkową.

Wprowadzając nową funkcję, charakteryzującą wpływ Δd_k na sygnał wyjściowy

$$\Delta_k(t) = \frac{\Delta\eta(t)}{\Delta d_k(t)} \quad (11)$$

do równania (10) oraz zakładając, że $\eta(t) \approx \eta_0(t)$ otrzymamy równanie

$$\sum_{i=0, i \neq k}^n a_i(t) \frac{d^i \Delta_k(t)}{dt^i} + d_{k0}(t) \frac{d^k \Delta_k(t)}{dt^k} = -\frac{d^k \eta_0(t)}{dt^k} \quad (12)$$

z którego wyznacza się funkcję $\Delta_k(t)$.

Dysponując funkcjami $\eta_0(t)$ oraz $\Delta_k(t)$, proces wyjściowy z obiektu dynamicznego niestabilnego o parametrach ze składową przypadkową można zapisać następująco

$$\eta(t) = \eta_0(t) + \Delta_k(t) \Delta d_k(t) \quad (13)$$

Jeżeli model obiektu ma N współczynników stochastycznych, to proces wyjściowy z takiego obiektu dynamicznego (13) ma postać

$$\eta(t) = \eta_0(t) + \sum_{i=1}^N \Delta_i(t) \Delta \alpha_i(t) \quad (14)$$

Jeżeli współczynniki wielomianu są opisane procesami stochastycznymi, to można je przedstawić w postaci rozkładu kanonicznego. Tak dla współczynnika $\alpha_i(t)$ wielomianu $M(D, t, d)$ otrzymamy

$$\alpha_i(t) = m_{\alpha_i}(t) + \sum_{j=1}^{N_i} \tilde{\alpha}_{ij} \varphi_{ij}(t) \quad (15)$$

gdzie: N_i - dowolna liczba całkowita,

$\tilde{\alpha}_{ij}$ - wielkości przypadkowe nieskorelowane o nadziei matematycznej równej zero $M\{\tilde{\alpha}_{ij}\} = 0$,

$\varphi_{ij}(t)$ - funkcje zdeterminowane /funkcje współrzędnych/.

Uwzględniając zależność (15) w równaniu (3), otrzymamy

$$\left[m_{\alpha n}(t) + \sum_{j=1}^{N_i} \tilde{\alpha}_{ij} \varphi_{ij}(t) \right] \frac{d^n \eta(t)}{dt^n} + \left[m_{\alpha}(t) + \sum_{j=1}^{N_n} \tilde{\alpha}_{nj} \varphi_{nj}(t) \right] \eta(t) = \mu(t) \quad (16)$$

z którego otrzymamy rozwiązanie w postaci procesu $\eta(t)$

$$\eta(t) = \eta_0(t) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{N_i} \tilde{\alpha}_{ij} V_{ij}(t) \quad (17)$$

gdzie $V_{ij}(t)$ są funkcjami przypadkowymi opisującymi wpływ parametru $\tilde{\alpha}_{ij}$ ($\tilde{\alpha} = \{\delta_{ij}\}$)

$$V_{ij} = \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} \Big|_{\delta_{ij}=0} \quad (18)$$

W obliczeniach praktycznych liczba wyrazów szeregu (15) powinna być jak naj mniejsza.

5.3. Charakterystyki statystyczne

Funkcje korelacyjne procesu wyjściowego, opisanego zależnościami (13) oraz (14) mają następujące postacie

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = D_{\alpha_k}^2 \Delta_k(t_1) \Delta_k(t_2) \quad (19)$$

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^N D_{\alpha_i}^2 \Delta_i(t_1) \Delta_i(t_2) \quad (20)$$

gdzie D_{α} jest dyspersją parametru α mającego składową przypadkową.

Jeżeli wielkości $\eta_0(t)$ oraz $\Delta_k(t)$ nie są skorelowane z wielkością Δ_{α_k} , to zależność (20) przyjmie postać

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = R_{\eta_0\eta_0}(t_1, t_2) + D_{\Delta\Delta}^T R_{\Delta\Delta}(t_1, t_2) \quad (21)$$

gdzie: $R_{\eta_0\eta_0}(t_1, t_2)$ - funkcja korelacji własnej sygnału $\eta_0(t)$,
 $R_{\Delta\Delta}(t_1, t_2)$ - funkcja korelacji własnej funkcji przypadkowej $\Delta_{\Delta}(t)$.

Funkcję korelacji własnej procesu $\eta(t)$ dla modelu obiektu dynamicznego ze współczynnikami operatora w postaci (15) wyznacza się z zależności

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = R_{\eta_0\eta_0}(t_1, t_2) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^N D_{\Delta ij} R_{V_{ij}V_{ij}}(t_1, t_2) \quad (22)$$

Jeżeli wielkości $\dot{\Delta}_{ij}$ oraz $\dot{\Delta}_{kl}$ są skorelowane przy $i=k$, to wsółr (22) przyjme postać

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = R_{\eta_0\eta_0}(t_1, t_2) + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{l=1}^{N_k} R_{V_{ij}V_{kl}}(t_1, t_2) M\{\dot{\Delta}_{ij}\dot{\Delta}_{kl}\} \quad (23)$$

5.4. Opisanie obiektu stochastycznego operatorem całkowym

Inną metodą analizy korelacyjnej obiektów stochastycznych jest metoda oparta na równaniu

$$\eta(t) = \int_0^t w(t, \tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau \quad (24)$$

gdzie $w(t, \tau, \alpha)$ jest charakterystyką impulsową, będącą funkcją przypadkową.

Stosując operację nadsieji matematycznej do obu części równania (24) otrzymamy zależność

$$m_{\eta}(t) = \int_0^t M\{w(t, \tau, \alpha) \mu(\tau)\} d\tau \quad (25)$$

Jeżeli sygnał wejściowy $\mu(t)$ oraz charakterystyka impulsowa $w(t, \tau, \alpha)$ są statystycznie niezależne, to równanie (25) przyjme postać

$$m_{\eta}(t) = \int_0^t m_w(t, \tau) m_{\mu}(\tau) d\tau \quad (26)$$

gdzie $m_w(t, \tau)$ jest nadsieją matematyczną charakterystyki impulsowej.

Odejmując z lewej i prawej części równania (24) wyrażenie (25) otrzymamy wsółr, z którego można wyznaczyć scentrowaną wielkość stochastycznego procesu wyjściowego

$$\dot{\eta}(t) = \int_0^t [W(t, \tau, d) \mu(\tau) - m_W(t, \tau) m_\mu(\tau)] d\tau \quad (27)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$W(t, \tau, d) = m_W(t, \tau) + \dot{w}(t, \tau, d) \quad (28)$$

$$\mu(\tau) = m_\mu(\tau) + \dot{\mu}(\tau) \quad (29)$$

do wzoru (27) oraz wykonując odpowiednie operacje matematyczne, otrzymamy wzór do określenia $\dot{\eta}(t)$

$$\dot{\eta}(t) = \int_0^t [m_W(t, \tau) \dot{\mu}(\tau) + \dot{w}(t, \tau, d) m_\mu(\tau) + \dot{w}(t, \tau, d) \dot{\mu}(\tau)] d\tau \quad (30)$$

Wprowadzając wielkości $\dot{\eta}(t_1)$ oraz $\dot{\eta}(t_2)$ wyznaczono ze wzoru (30) do zależności określającej funkcję korelacyjną

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = M \{ \dot{\eta}(t_1) \dot{\eta}(t_2) \} \quad (31)$$

otrzymany wzór

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} [m_W(t_1, \tau_1) m_W(t_2, \tau_2) \dot{\mu}(\tau_1) \dot{\mu}(\tau_2) + \dot{w}(t_1, \tau_1) \dot{w}(t_2, \tau_2) m_\mu(\tau_1) m_\mu(\tau_2) + \dot{w}(t_1, \tau_1) \dot{w}(t_2, \tau_2) \dot{\mu}(\tau_1) \dot{\mu}(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \quad (32)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$R_{\mu\mu}(\tau_1, \tau_2) = M \{ \dot{\mu}(\tau_1) \dot{\mu}(\tau_2) \} \quad (33)$$

do wzoru (32), otrzymamy zależność wiążącą funkcje korelacyjne sygnału wejściowego i wyjściowego z funkcją korelacyjną charakterystyki impulsowej

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \{ m_W(t_1, \tau_1) m_W(t_2, \tau_2) R_{\mu\mu}(\tau_1, \tau_2) + R_{WW}(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) [m_\mu(\tau_1) m_\mu(\tau_2) + R_{\mu\mu}(\tau_1, \tau_2)] \} d\tau_1 d\tau_2 \quad (34)$$

W przypadku szczególnym, gdy sygnałem wejściowym jest szum biały o funkcji korelacyjnej

$$R_{\mu\mu}(\tau_1, \tau_2) = Q_\mu(\tau_1) \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (35)$$

wzór (34) przyjmie postać

$$\begin{aligned}
 R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = & \int_0^{\min(t_1, t_2)} m_w(t, \tau_1) m_w(t_2, \tau_2) Q_{\mu}(\tau_1) d\tau_1 + \\
 & + \int_0^{\min(t_1, t_2)} R_{ww}(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) Q_{\mu}(\tau_1) d\tau_1 + \\
 & + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_{ww}(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) m_{\mu}(\tau_1) m_{\mu}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned} \quad (36)$$

Jeżeli $t_1 = t_2$, to ze wzoru (36) wynika zależność określająca dyspersję sygnału wyjściowego

$$\begin{aligned}
 D_{\eta}(t) = R_{\eta\eta}(t, t) = & \int_0^t \int_0^t \{ m_w(t, \tau_1) m_w(t, \tau_2) R_{\mu\mu}(\tau_1, \tau_2) + \\
 & + R_{ww}(t, t, \tau_1, \tau_2) [m_{\mu}(\tau_1) m_{\mu}(\tau_2) + R_{\mu\mu}(\tau_1, \tau_2)] \} d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned} \quad (37)$$

W przypadku, gdy sygnał wejściowy ma zerową nadzieję matematyczną i jest szumem białym o intensywności $Q_{\mu}(\tau_1)$ (35), wzór (37) przyjmie postać

$$D_{\eta}(t) = \int_0^t R_{ww}(t, t, \tau, \tau) Q_{\mu}(\tau) d\tau \quad (38)$$

Charakterystyka impulsowa $w(t, \tau, d)$ jest funkcją przypadkową. Realizacja fizyczna modelu obiektu o takiej charakterystyce jest operacją prawie niemożliwą do praktycznego wykonania. Zachodzi więc potrzeba aproksymacji takiego modelu modelem idealnym. Zagadnienie przybliżenia sprowadza się do wyznaczenia takiej funkcji $w_{ap}(t, \tau)$, która byłaby funkcją zdeterminowaną i realizowałaby podstawowe funkcjonalne przeznaczenie modelu stochastycznego.

Kryterium oceny doboru oparte jest na różnicy pomiędzy rzeczywistym sygnałem wyjściowym, określonym równaniem (24) i sygnałem wyjściowym modelu

$$\varepsilon(t) = \eta(t) - \eta_{ap}(t) \quad (39)$$

Proces wyjściowy $\eta_{ap}(t)$ określony jest równaniem

$$\eta_{ap}(t) = \int_0^t w_{ap}(t, \tau) \xi(\tau) d\tau \quad (40)$$

gdzie: $w_{ap}(t, \tau)$ - charakterystyka impulsowa zdeterminowana,
 $\xi(t)$ - proces przypadkowy.

Proces $\xi(t)$ jest częścią pożyteczną sygnału $\mu(t)$

$$\mu(t) = \xi(t) + \gamma(t) \quad (41)$$

gdzie $\gamma(t)$ jest sumą addytywną.

Jeżeli wielkości przypadkowe zależnościami (39) scentrujemy, podniesiemy obie strony tej zależności do kwadratu oraz zastosujemy operację $M\{\}$, to otrzymamy zależność określającą funkcję korelacyjną błędów

$$R_{\epsilon\epsilon}(t, d) = R_{\eta\eta}(t, d) - 2R_{\eta\eta_{ap}}(t, d) + R_{\eta_{ap}\eta_{ap}}(t) \quad (42)$$

W celu uwidocznienia zależności sygnału $\eta(t)$, a tym samym funkcji $\epsilon(t)$, od parametru przypadkowego d , w odpowiednich funkcjach uwzględniono ten parametr.

Różniczkując równanie (42) po parametrze d , otrzymamy zależność /obliczenie dla punktu $d = m_d /$

$$\nabla R_{\epsilon\epsilon}(t, m_d) = \nabla R_{\eta\eta}(t, m_d) - 2 \nabla R_{\eta\eta_{ap}}(t, m_d) \quad (43)$$

która po uwzględnieniu wzorów

$$R_{\epsilon\epsilon}(t, d) = \int_0^t \int_0^t w(t, \tau_1, d) R_{\mu\mu}(\tau_1, \tau_2) w(t, \tau_2, d) d\tau_1 d\tau_2 \quad (44)$$

$$R_{\eta\eta_{ap}}(t, d) = \int_0^t \int_0^t w(t, \tau_1, d) R_{\mu\xi}(\tau_1, \tau_2) w_{ap}(t, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (45)$$

przyjmiemy postać

$$\begin{aligned} \nabla R_{\epsilon\epsilon}(t, m_d) = & \int_0^t \int_0^t [\nabla w(t, \tau_1, m_d) R_{\mu\mu}(\tau_1, \tau_2) w(t, \tau_2, d) + \\ & + w(t, \tau_1, m_d) R_{\mu\mu}(\tau_1, \tau_2) \nabla w(t, \tau_2, m_d)] d\tau_1 d\tau_2 - \\ & - 2 \int_0^t \int_0^t \nabla w(t, \tau_1, m_d) R_{\mu\xi}(\tau_1, \tau_2) w_{ap}(t, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (46)$$

Jeżeli funkcje korelacyjne oraz charakterystyka $w(t, \tau, d)$ są zadane w postaci analitycznej, to z równania (46) można wyznaczyć charakterystykę impulsową $w_{ap}(t, \tau)$.

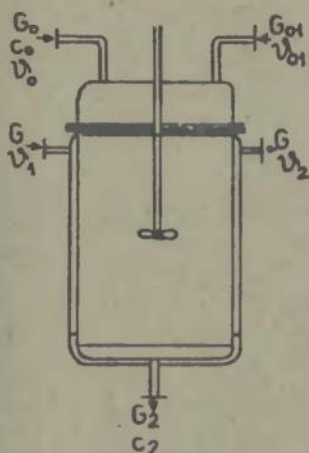
6. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE USTALONE WIELOWYMIAROWE O PARAMETRACH SKUPIONYCH. WYMUSZENIA ZDETERMINOWANE

6.1. Wstęp

Większość obiektów inżynierii chemicznej jest obiektami wielu wzajemnie oddziaływujących wielkości /sygnałów/. Wielkości te ze względu na ich oddziaływania na obiekt można podzielić na następujące grupy:

- wielkości wejściowe pojawiające się w wyniku generowania sygnałów układami zewnętrznymi, których charakterystyki wyznacza się z analizy doświadczalnej,
- wielkości wyjściowe charakteryzujące reakcje układu oraz pozwalające opisać pewne aspekty zachowania się obiektu dynamicznego,
- oddziaływania sterujące, które charakteryzują stan oddziaływań dyspozycyjnych,
- wielkości zakłócające pracę obiektu, których charakterystyki są funkcjami przypadkowymi o nieznanej naturze pojawienia się i nieznanych wartościach liczbowych,
- zmienne /współrzędne/ stanu lub współrzędne przejściowe, które charakteryzują dynamiczne zachowanie się badanego obiektu.

Przykład wielowymiarowego obiektu inżynierii chemicznej pokazano na rysunku 13.



Urządzenie sterujące ma za zadanie tak oddziaływać na obiekt wielkościami sterującymi, aby zniwelować wpływ wielkości zakłócających /niesterowanych/ na wielkości wyjściowe. Efektywność działania urządzenia zależy od tego, w jakim stopniu informacje o możliwych powiązaniach pomiędzy wielkościami są prawidłowe oraz czy dysponuje się charakterystykami wielkości zakłócających.

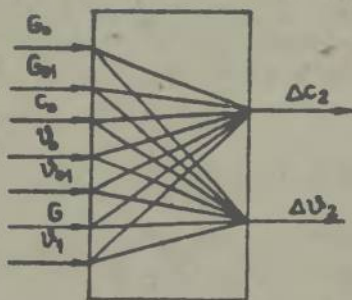
Jeżeli zakłócenia są intensywne, to oddziaływania są stochastyczne. W przypadku braku zakłóceń, oddziaływania mają postać funkcji zde-terminowanych.

Rys. 13. Proces reaktorowy

Schemat blokowy procesu reaktorowego z uwzględnieniem oddziaływań pokazano na rysunku 14.

Analiza obiektu wielowymiarowego o K wejściach oraz N wyjściach jest KN razy bardziej złożona od analizy obiektu z jednym wejściem oraz jednym wyjściem, ponieważ zamiast jednej charakterystyki dynamicznej /charakterystyka impulsowa, funkcja przejścia/ należy wyznaczyć KN takich charakterystyk.

Praktycznie elementy macierzy charakterystyki dynamicznej wyznaczają się przez rozpatrzenie stanu obiektu z K wejściami i jednym wyjściem. Dla każdego N_i tego, wyodrębnionego wyjścia z K wejściami wyznaczają się charakterystyki dynamiczne.



Rys. 14. Schemat blokowy procesu reaktorowego

6.2. Układ dynamiczny

Układ dynamiczny ze względu na swoją strukturę jest abstrakcyjnym pojęciem matematycznym. W wyniku przeprowadzonych obserwacji lub doświadczeń na obiekcie rzeczywistym dochodzi się do opisu zachowania się obiektu w zadanych warunkach. Dla każdego momentu t ze zbioru momentów $t \in E$ określa się przestrzeń $R(T)$ elementów $\vec{r}(t)$ nazywanych funkcjami stanu. Każdej parze wielkości $\vec{r}(t)$ i wielkości wejściowej $\vec{m}(t)$, wybranej z przestrzeni $M(T) / T \in E /$, odpowiada co najmniej jedna funkcja wyjściowa $\vec{u}(t)$ z przestrzeni $U(T^X) / T^X \in E /$.

Układem dynamicznym nazywamy relację binarną

$$S \subset M(T) \times U(T^X) \quad (1)$$

W większości zagadnień praktycznych przestrzenie $M(T)$ oraz $U(T)$ pokrywają się. Stąd relacja (1) przyjmie postać

$$S \subset M(T) \times M(T) \quad (2)$$

Z zależności (1) wynika, że model matematyczny układu dynamicznego formułuje się nie w oparciu o analizę struktury obiektu, a przy użyciu reakcji obiektu na wymuszenie. Otrzymujemy matematyczny model obiektu w makroskali. Formułowanie modelu obiektu w mikroskali realizuje się w oparciu o badanie procesów przebiegających w aparacie

/procesy kinetyczne/.

Jeżeli przekrój układu dynamicznego S ma dla każdego $m(t)$ tylko jeden element $u(t)$, to taki układ nazywamy funkcjonalnym. Relacji binarnej (1) odpowiada jeden operator

$$U(t) = \hat{A}^{-1} * m(t) \quad (3)$$

działający z obszaru $M(T)$ w obszar $U(T^X)$.

Układ, w którym dla zmiennych warunków początkowych jednemu sygnałowi wejściowemu odpowiada zbiór sygnałów wyjściowych, nazywamy układem niefunkcjonalnym.

Układ dynamiczny jest ustalony, jeżeli kompozycja przesunięcia funkcjonalnego $T \in E$ /przesunięcie $\tau \in [0, \infty)$ / przyporządkowuje każdej funkcji $m(t) \in M(T)$ funkcję $m(t+\tau) \in A(T)$ /spełnia relację

$$T_\tau * S = S * T_\tau \quad (4)$$

Suma, kompozycja oraz iloczyn dwóch układów ustalonych jest układem dynamicznym ustalonym. W takim układzie wszystkie podukłady są ustalone.

Układ dynamiczny nazywamy ciągłym, jeżeli przestrzenie wielkości wejściowych oraz wyjściowych są ciągłe w czasie. W układzie ciągłym wszystkie przestrzenie są przestrzeniami funkcji.

Układ dynamiczny jest fizycznie realizowalny, jeżeli istnieje on lub można go zrealizować praktycznie. Reakcja takiego układu na wymuszenie w dowolnym momencie jest określona jednoznacznie, jeżeli znane są charakterystyki dynamiczne oraz określona jest "historia" obiektu.

Układ dynamiczny jest liniowy, jeżeli operator $\hat{A}^{-1}(3)$ jest liniowy. Suma lub kompozycja dwóch układów liniowych jest układem liniowym. Kompozycja dwóch układów liniowych ustalonych spełnia zależność

$$S_1 * S_2 = S_2 * S_1 \quad (5)$$

Układ dynamiczny funkcjonalny nazywamy jednorodnym stopnia i -tego, jeżeli operator $\hat{A}^{-1}(3)$ jest jednorodny i jest i -tego stopnia.

Układ dynamiczny funkcjonalny nazywamy analitycznym, jeżeli można rozłożyć go w zbieżny szereg układów jednorodnych. Suma, kompozycja lub iloczyn dwóch układów analitycznych jest układem analitycznym, jeżeli w rozkładzie szeregi są zbieżne.

Układ dynamiczny S , dla którego istnieje parametr $u_0 \in U_0$ niezależny od przyszłych wartości sygnałów m oraz u , i to taki, że dla każdej jego wartości oraz każdego sygnału wejściowego istnieje jeden sygnał wyjściowy określony w przestrzeni stanów początkowych, można opisać

iloczynem potrójnym

$$S_{u_0} C M(T) \times U_0 \times U(T) \quad (6)$$

Układowi takiemu przypisuje się operator

$$u(t) = A^{-1} \times [u_0, m(t)] \quad (7)$$

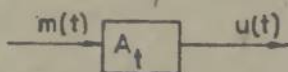
Pojęcie "stan początkowy" traci sens, jeżeli znana jest cała "historia" układu dynamicznego.

6.3. Schematy modeli obiektów wielowymiarowych

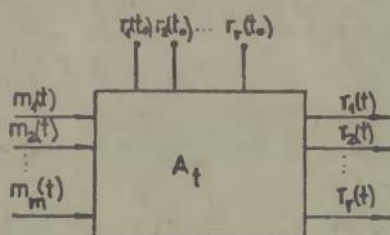
Najprostszym przypadkiem obiektu dynamicznego jest obiekt z jednym sygnałem wejściowym oraz jednym sygnałem wyjściowym /rysunek 15/. Model takiego obiektu /model skalarowy/ opisany jest równaniem n-tego rzędu

$$\sum_{i=0}^n \frac{d^i}{dt^i} u(t) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} m(t) \quad (8)$$

Obiekty dynamiczne wielowymiarowe charakteryzują się wieloma sygnałami wejściowymi i wyjściowymi oraz wieloma funkcjami stanu. Przykład takiego obiektu z m sygnałami wejściowymi oraz r funkcjami stanu opisuje schemat blokowy pokazany na rysunku 16.



Rys. 15. Model skalarowy obiektu



Rys. 16. Model obiektu wielowymiarowego

Obiekt dynamiczny, którego schemat blokowy pokazano na rysunku 16 ma model matematyczny opisany układem równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \dot{r}_1(t) &= a_{11} u_1(t) + \dots + a_{1r} u_r(t) + b_{11} m_1(t) + \dots + b_{1m} m_m(t) \\ &\vdots \\ \dot{r}_r(t) &= a_{r1} u_1(t) + \dots + a_{rr} u_r(t) + b_{r1} m_1(t) + \dots + b_{rm} m_m(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Układ równań (9) można zapisać w postaci maciersowej

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = A\bar{F}(t) + B\bar{m}(t) \quad (10)$$

gdzie: A - macierz stała kwadratowa o wymiarze $r \times r$, charakteryzująca parametry obiektu,

B - macierz stała prostokątna o wymiarze $r \times m$, przekształcająca wielkości wejściowe,

$\bar{F}(t) = \text{col}(r_1(t), r_2(t), \dots, r_r(t))$ - wektor stanu,

$\bar{m}(t) = \text{col}(m_1(t), m_2(t), \dots, m_m(t))$ - wektor sygnałów wejściowych,

$\bar{F}(t_0) = \text{col}(r_1(t_0), r_2(t_0), \dots, r_r(t_0))$ - wektor warunków początkowych.

Obiekt, którego model matematyczny opisany jest równaniem (10), ma n sygnałów wejściowych oraz n sygnałów wyjściowych pod warunkiem, że każdą funkcję stanu traktujemy jako sygnał wyjściowy. W przypadku ogólnym liczba sygnałów wyjściowych nie jest równa liczbie funkcji stanu. Sygnały wyjściowe mogą stanowić kombinację zmiennych wyjściowych oraz zmiennych stanu /funkcji stanu/. Model matematyczny takiego obiektu opisany jest układem równań

$$\begin{aligned} u_1(t) &= c_{11}r_1(t) + \dots + c_{1r}r_r(t) + d_{11}m_1(t) + \dots + d_{1m}m_m(t) \\ &\vdots \\ u_n(t) &= c_{n1}r_1(t) + \dots + c_{nr}r_r(t) + d_{n1}m_1(t) + \dots + d_{nm}m_m(t) \end{aligned} \quad (11)$$

który można zapisać w postaci maciersowej

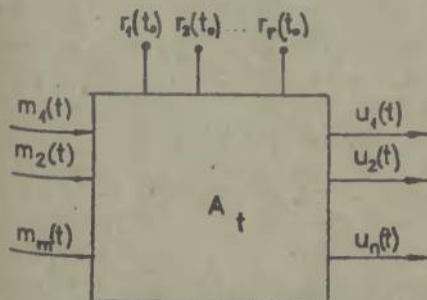
$$\bar{u}(t) = C\bar{F}(t) + D\bar{m}(t) \quad (12)$$

gdzie: C - macierz stała o wymiarze $n \times r$, charakteryzująca parametry urządzenia pomiarowego,

D - macierz stała bezpośrednich sprzężeń wejście-wyjście o wymiarze $n \times m$,

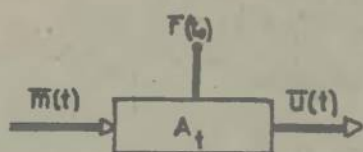
$\bar{u}(t) = \text{col}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ - wektor sygnałów wyjściowych.

Schemat blokowy obiektu dynamicznego o wielu wejściach oraz wielu wyjściach pokazano na rysunku 17.



Rys. 17. Model obiektu wielowymiarowego

Oznaczając na rysunku 17 wektory zmiennych linią podwójną otrzymamy inną postać tego rysunku /rysunek 18/



Rys. 18. Model obiektu wielowymiarowego

Na rysunkach 15-18 macierz A_t opisuje własności dynamiczne obiektu wielowymiarowego w dziedzinie oryginałów / funkcje zmiennej t /.

6.4. Stan dynamiczny obiektu wielowymiarowego

Stan obiektu w momencie t_0 jest informacją, która wraz z sygnałem wejściowym określa sygnał wyjściowy w dowolnym momencie $t \geq t_0$.

Stan obiektu r -tego rzędu opisany jest wektorem r wymiarowy

$$\vec{r}(t) = [r_1(t), r_2(t), \dots, r_r(t)] \quad (13)$$

Składowe wektora $\vec{r}(t)$ są zmiennymi stanu obiektu. Przestrzeń stanu obiektu jest przestrzenią zawierającą zbiór wektorów $\{\vec{r}(t)\}$, z których można wybrać wektor $\vec{r}(t)$.

Dysponując wiedzą o stanie obiektu w momencie t_0 , $\vec{r}(t_0)$ oraz informacją o sygnałach wejściowych w momencie t_0 , $\vec{m}(t_0)$ i w momentach przyszłych $\vec{m}(t)$, możemy określić wartość sygnałów wyjściowych w momencie t_0 , $\vec{u}(t_0)$ oraz momentach przyszłych $\vec{u}(t)$.

Jeżeli obiekt dynamiczny dopuszcza opisanie stanu przy użyciu wektora $\vec{r}(t)$, a model matematyczny formuluje się w postaci równań różniczkowych o stałych współczynnikach, to równania modelu mają postać

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{r}(t), \vec{m}(t)) \quad (14)$$

$$\vec{u}(t) = \vec{g}(\vec{r}(t), \vec{m}(t)) \quad (15)$$

gdzie: $\vec{f}$ - funkcja wektorowa o wymiarze r ,
 $\vec{g}$ - funkcja wektorowa o wymiarze m .

Równania (14) oraz (15) dla obiektu liniowego ustalonego wielowymiarowego zapisuje się w postaci układu dwóch równań (10) oraz (12)

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = A \vec{r}(t) + B \vec{m}(t)$$

$$\bar{u}(t) = C\bar{r}(t) + D\bar{m}(t)$$

Do równań tych należy dołączyć warunek

$$\bar{r}(t_0) = \bar{r}_0 \quad (16)$$

Formułowanie równań (10) i (12) oraz określenie warunków (16) jest podstawowym etapem analizy dynamiki obiektów wielowymiarowych.

Jeżeli w równaniu stanu (10) założymy $\bar{m}(t) \equiv 0$, to otrzymamy równanie

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = A\bar{r}(t) \quad (17)$$

opisujące ruch swobodny obiektu wywołany niezerowymi warunkami początkowymi. Ruch nieswobodny obiektu, wywołany wymuszeniem zewnętrznym, opisuje równanie (10).

Równanie stanu (10) można zapisać w postaci równania wektorowo-macierzowego

$$\frac{d\bar{v}(t)}{dt} = A\bar{v}(t) \quad (18)$$

gdzie: A - macierz współczynników rozszerzona,

$\bar{v}(t)$ - wektor kolumnowy zawierający zmienne wejściowe $m_j(t)$ oraz współrzędne obiektu $r_k(t)$

$$\bar{v}(t) = \begin{bmatrix} \bar{m}(t) \\ \bar{r}(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Jeżeli zmienne wejściowe włącza się do zbioru współrzędnych obiektu, to wektor $\bar{v}(t)$ opisuje stan obiektu o zwiększonej wymiarowości. Wówczas macierz A jest macierzą współczynników obiektu o zwiększonej wymiarowości.

Jeżeli poza wektorem kolumnowym $\bar{v}(t)$ są inne oddziaływania zewnętrzne złożonej postaci, to wykorzystuje się równanie (18) lecz tworzy się nowy wektor $\bar{v}'(t)$ zawierający nowe zmienne wejściowe.

6.5. Rachunek macierzowy

Macierz o wymiarze $n \times m$ można zapisać w następujących postaciach

$$A = [A] = [a_{ij}] = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = [a_{ij}]_{n \times m} = [A_j] = [A_1, A_2, \dots, A_m] \quad (20)$$

gdzie: A - macierz o n wierszach i m kolumnach,

a_{ij} - element macierzy,

i - numer wiersza,

j - numer kolumny,

A_j - macierz kolumnowa,

A_i - macierz wierszowa,

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$A_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}] \quad (22)$$

Macierz o wymiarze $m \times m$ jest macierzą kwadratową

$$A = [a_{ij}]_{m \times m} \quad (23)$$

Zbiór elementów macierzy tworzących nową macierz, dla której $n' \leq n$ oraz $m' \leq m$ nazywa się podmacierzą. Przykładowo dla macierzy (20) podmacierzą /zbiór elementów oznaczono linią przerywaną/ jest wyrażenie

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Macierzy (20) przypisuje się liczbę zwaną wyznacznikiem lub determinantą macierzy

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^r (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad (25)$$

gdzie M_{ij} jest wyznacznikiem macierzy kwadratowej otrzymanym z macierzy A przez wykreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny.

Jeżeli wprowadzimy symbol Kronekera δ_{ij} określony równościami

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (26)$$

to macierz

$$E = [\delta_{ij}] \quad (27)$$

nazywa się macierzą jednostkową.

Macierz zawierająca tylko składniki wzdłuż przekątnej nazywa się macierzą diagonalną

$$\text{diag } A = [\delta_{ij} a_{ij}] \quad (28)$$

Rzędem k macierzy A nazywa się najwyższy stopień macierzy kwadratowej otrzymanej z danej macierzy, której wyznacznik jest różny od zera

$$\text{rank } A \in [0 \leq r \leq \min(n, m)] \quad (29)$$

Macierzą transponowaną względem macierzy A o wymiarze $n \times m$ i elementach a_{ij} , nazywamy taką macierz B o wymiarze $m \times n$ o elementach b_{ij} , dla której zachodzi równość

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (30)$$

Transpozycją macierzy jest obrót macierzy dookoła przekątnej

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Transpozycją wiersza (22) jest kolumna (21).

Macierzą odwrotną A^{-1} dowolnej macierzy A nazywamy macierz, która spełnia zależność

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \quad (32)$$

gdzie: $E = [\delta_{ij}]$ - macierz jednostkowa,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} [A_{ij}]^T; \quad (|A| \neq 0) \quad (33)$$

gdzie: $|A|$ - wyznacznik macierzy A ,

$[A_{ij}]$ - macierz kwadratowa o elementach będących algebraicznym dopełnieniem elementów macierzy A /macierz dołączona/.

Zgodnie z zależnością (33) macierz odwrotna A^{-1} macierzy kwadratowej A o wymiarze $n \times n$ ma postać

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \text{ad } A_{11} & \text{ad } A_{21} & \dots & \text{ad } A_{n1} \\ \text{ad } A_{12} & \text{ad } A_{22} & \dots & \text{ad } A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{ad } A_{1n} & \text{ad } A_{2n} & \dots & \text{ad } A_{nn} \end{bmatrix} \quad (34)$$

gdzie:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (35)$$

$$\text{ad } A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (36)$$

Macierz A nazywamy ortogonalną, jeżeli

$$A^T = A^{-1} \quad (37)$$

Wielomianem charakterystycznym macierzy kwadratowej A stopnia r nazywamy wielomian $f(\lambda)$ stopnia r zmiennej określony następującą równością

$$f(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} - \lambda \end{vmatrix} \quad (38)$$

Przyrównując do zera wielomian $f(\lambda)$ otrzymamy równanie charakterystyczne macierzy A

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (39)$$

Zera w równaniu (39) nazywamy pierwiastkami charakterystycznymi macierzy A . Wstawiając do macierzy (38) zamiast λ pierwiastek charakterystyczny otrzymamy macierz osobliwą.

Diagonalizacją macierzy A nazywamy mnożenie prawostronne macierzy A przez macierz B oraz mnożenie lewostronne otrzymanego iloczynu AB przez macierz B^{-1} . Otrzymujemy macierz diagonalną

$$B^{-1}AB = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad (40)$$

Macierz B nazywamy macierzą diagonalizującą macierz A .

Przekształcenie centroafiniczne przestrzeni n wymiarowej o punktach m_j w przestrzeń n wymiarową o punktach u_i realizuje się zależnością

$$u_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} m_j \quad (41)$$

Wykorzystując zapis macierzowy otrzymamy

$$U = BM \quad (42)$$

gdzie $B = [b_{ij}]_{n \times m}$

Kierunkiem głównym macierzy A nazywamy kierunek, gdy macierz A przyporządkowuje wektorowi $\vec{m}(t)$ wektor $\vec{u}(t)$ o tym samym kierunku

$$\lambda \vec{m} = A \vec{m} \quad (43)$$

gdzie λ jest współczynnikiem kolinearności wektorów.

Wartościami własnymi macierzy A nazywamy takie wartości, dla których równanie (43) ma rozwiązanie niezerowe. Odpowiadający wartości

ciom własnym wektor własny $\bar{\xi}_k = (\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)})$ na współrzędne wyznaczone z równania

$$(A - \lambda_k) \bar{\xi}_k = 0 \quad (44)$$

które można zapisać w postaci układu równań

$$\sum_{i=1}^n (a_{ij} - \lambda_k \delta_{ij}) \xi_i^{(k)} = 0 \quad (44a)$$

Wektor $\bar{\xi}_{k1} \neq 0$, dla którego

$$(A - \lambda_k E)^{l-1} \bar{\xi}_{k1} = 0 \quad (45)$$

nazywa się uogólnionym wektorem własnym rzędu l , odpowiadającym wartości własnej λ_k .

Jeżeli zbudujemy macierz Ξ , której kolumny są wektorami własnymi $\bar{\xi}_j$, to macierz Λ jest macierzą diagonalną macierzy A

$$\Lambda = \Xi^{-1} A \Xi \quad (46)$$

gdzie $\Xi = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_n)$

Macierz A nazywamy macierzą podobną do macierzy B , jeżeli istnieje taka macierz nieosobliwa C , że

$$B = C^{-1} A C \quad (47)$$

Macierz sprzężona $\bar{A}$ z daną macierzą A powstaje przez zastąpienie jej elementów elementami z nimi sprzężonymi

$$A = [a_{ij}], \text{ to } \bar{A} = [\bar{a}_{ij}] \quad (48)$$

Relacja sprzężenia macierzy jest symetryczna, tj. jeżeli $A = \bar{B}$, to $B = \bar{A}$. Dwukrotne zastosowanie operacji sprzężenia nad macierzą, prowadzi do tej samej macierzy

$$\overline{(\bar{A})} = A \quad (48a)$$

Transpozycja macierzy sprzężonej daje macierz

$$A^+ = \bar{A}^T \quad (48b)$$

której elementy wiążą się z elementami macierzy A zależnością

$$(A^+)_{ij} = \bar{a}_{ji} \quad (48c)$$

Podstawowe działania na macierzach zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Podstawowe działania nad macierzami

Lp	Nazwa operacji matematycznej	Operacja matematyczna
1	Dodawanie	$C = A + B \quad (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$
2	Mnożenie	$C = A \cdot B$ $A = A \cdot E$ $\alpha(\beta A) = \alpha\beta A$ $c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk}$ $\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ b_{1k} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{mk} & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ik} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$
3	Odejmowanie	$A - B = A + (-1)B$
4	Potęgowanie	$A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A \quad (n=1,2,\dots)$
5	Transpozycja	$(A+B)^T = A^T + B^T$ $(AB)^T = A^T \cdot B^T$
6	Odwrotność	$AA^{-1} = E$ $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ $ A^{-1} = A ^{-1}$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $(A^{-1})^{-1} = A$ $A^T(A^{-1})^T = E$
7	Wyznacznik	$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ $\det A^T = \det A$ $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

6.6. Równania stanu obiektu wielowymiarowego w postaci standardowej

Układ równań (10) oraz (12) zapiszemy w postaci

$$\dot{\bar{r}}(t) = A\bar{r}(t) + B\bar{m}(t) \quad (49)$$

$$\bar{u}(t) = C\bar{r}(t) + D\bar{m}(t) \quad (50)$$

nosi nazwę układu równań standardowych obiektu wielowymiarowego.

Czwórka macierzy stałych współczynników $\{A, B, C, D\}$ opisuje w zupełności obiekt dynamiczny, tj. pozwala wyznaczyć odpowiedź obiektu na dowolne wymuszenie. Zbiór tych macierzy nazywa się realizacją obiektu wielowymiarowego. Jeden i ten sam układ dynamiczny może mieć nieskończenie wiele realizacji.

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$\bar{z}(t) = T\bar{r}(t) \quad (51)$$

gdzie T jest dowolną macierzą nieosobliwą $\det T \neq 0$, to układ równań (49) oraz (50) możemy zapisać w postaci

$$\dot{\bar{z}}(t) = TAT^{-1}\bar{z}(t) + TB\bar{m}(t) \quad (52)$$

$$\bar{u}(t) = CT^{-1}\bar{z}(t) + D\bar{m}(t) \quad (53)$$

Układ równań (52) oraz (53) realizuje się nową czwórką macierzy $\{TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D\}$. Zależność pomiędzy sygnałami wejściowym oraz wyjściowym pozostaje taka sama. Zbiór macierzy T jest nieskończony, a więc jest nieskończona liczba realizacji układu równań stanu.

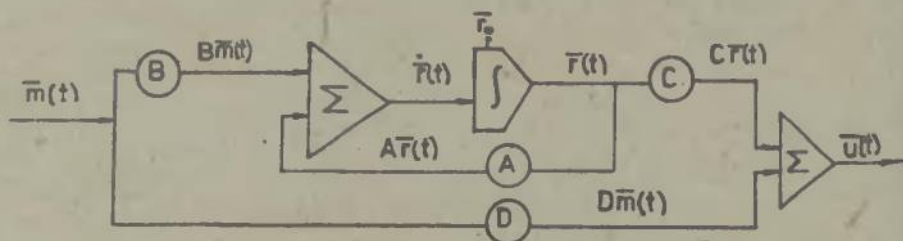
Równania (49) oraz (50) można łatwo przedstawić w postaci wektorowego schematu analogowego. W tym celu należy z równania (49) wyznaczyć wektor stanu $\bar{r}(t)$

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \int_{t_0}^t [A\bar{r}(\tau) + B\bar{m}(\tau)] d\tau \quad (54)$$

gdzie t_0 jest momentem startu funkcji.

Wykorzystując dwa sumatory oraz jeden całon całkujący otrzymamy

schemat analogowy /rysunek 19/



Rys. 19. Wektorowy schemat analogowy układu równań (49) i (50)

6.7. Procesy przejściowe w obiekcie wielowymiarowym

Procesy przejściowe $\bar{r}(t)$ oraz $\bar{u}(t)$ wyznacza się z rozwiązania równań stanu oraz równania wyjścia.

Całkując równanie (49) otrzymamy

$$\bar{r}(t) = \exp[A(t-t_0)]\bar{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[A(t-\tau)]B\bar{m}(\tau)d\tau \quad (55)$$

Uwzględniając wektor $\bar{r}(t)$ określony zależnością (55) w równaniu (50) otrzymamy całkę spłotu w zapisie macierzowym

$$\bar{u}(t) = C \exp[A(t-t_0)]\bar{r}(t_0) + C \int_{t_0}^t \exp[A(t-\tau)]B\bar{m}(\tau)d\tau + D\bar{m}(t) \quad (56)$$

Jeżeli wprowadzimy nową zmienną $t-t_0 = \tau$ oraz przyjmiemy zerowe warunki początkowe wektora stanu

$$\bar{r}(t)|_{t_0=0} = \bar{r}(0) = 0 \quad (57)$$

to otrzymamy uproszczoną postać całki spłotu (56)

$$\bar{u}(t) = C \int_0^t \exp[A(t-\tau)]B\bar{m}(\tau)d\tau + D\bar{m}(t) \quad (58)$$

Przyjmując, że część zmiennych stanu jest wielkościami wyjściowymi, równanie (50) przyjmie postać

$$\bar{u}(t) = C\bar{r}(t) \quad (59)$$

Uwzględniając zależność (53) w równaniu (59), otrzymamy całkę
 splotu w postaci

$$\bar{u}(t) = C \int_0^t \exp[A(t-\tau)] B \bar{m}(\tau) d\tau \quad (60)$$

Jeżeli rozpatrujemy ruch swobodny obiektu wielowymiarowego, to wykorzystujemy równanie (17) oraz warunki początkowe (16). Rozwiązaniem będzie wektor stanu obiektu

$$\bar{r}(t) = [\exp A(t-t_0)] \bar{r}_0 \quad (61)$$

Macierz

$$\Phi_0(t-t_0) = \exp[A(t-t_0)] \quad (62)$$

nazywa się macierzą przejścia stanów.

Wprowadzając oznaczenie (62) w równaniu (61), otrzymamy

$$\bar{r}(t) = \Phi_0(t-t_0) \bar{r}_0 \quad (63)$$

Równanie (63) ustala zależność pomiędzy wektorem stanu, warunkami początkowymi oraz macierzą przejścia stanów, a więc macierzą określającą przejście obiektu ze stanu początkowego w momencie t_0 w stan $\bar{r}$ t.

Wprowadzając macierz (62) do wzoru (55), otrzymamy nową postać tego wzoru

$$\bar{r}(t) = \Phi_0(t-t_0) \bar{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_0(t-\tau) B \bar{m}(\tau) d\tau \quad (64)$$

gdzie: $\Phi_0(t-t_0) \bar{r}_0$ - człon charakteryzujący zmiany stanu obiektu wynikłe z niezerowych warunków początkowych /ruch swobodny obiektu/,
 $\int_{t_0}^t \Phi_0(t-\tau) B \bar{m}(\tau) d\tau$ - człon charakteryzujący reakcję obiektu na sygnał wejściowy /ruch wymuszony obiektu/.

Jeżeli oddziaływanie sterujące jest funkcją skalarową

$$\bar{m}(t) = m(t) \quad (65)$$

to równanie (49) przyjmie postać

$$\dot{\bar{r}}(t) = A \bar{r}(t) + B^* m(t) \quad (66)$$

gdzie B^* jest macierzą sterowania określoną wyrażeniem

$$B^* = (0, 0, \dots, 0, b)^T \quad (67)$$

Macierz B^x jest macierzą kolumnową, której wszystkie elementy, ze wyjątkiem ostatniego, są równe zero.

Jeżeli macierz A ma wartości własne różniące się pomiędzy sobą, to stosując przekształcenie liniowe

$$\bar{r}(t) = T \bar{z}(t) \quad (68)$$

można równanie (66) zapisać w postaci kanonicznej

$$\dot{\bar{z}}(t) = \Lambda \bar{z}(t) + T^{-1} B^* m(t) \quad (69)$$

gdzie wektor $\bar{z}(t)$ określa n kanonicznych zmiennych stanu i nazywa się wektorem kanonicznym stanu obiektu. Macierz Λ jest macierzą diagonalną z elementami niezerowymi

$$\Lambda = T^{-1} A T \quad (70)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix} \quad (71)$$

gdzie λ_i są wartości własne macierzy A .

Macierz T wyrażona przez wartości własne macierzy A ma postać

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{bmatrix} \quad (72)$$

Wobec powyższych wsorów wyrażenie $\exp(At)$ dla równania kanonicznego jest macierzą diagonalną

$$\exp At = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_r t} \end{bmatrix} \quad (73)$$

Jeżeli rozpatruje się ruch nieswobodny, to rozwiązanie równania (18) jest wektor

$$\bar{v}(t) = \Phi(t) \bar{v}(t_0) \quad (74)$$

gdzie:

$$\bar{v}(t_0) = \begin{bmatrix} \bar{m}(t_0) \\ \bar{r}(t_0) \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\bar{m}(t_0) = \begin{bmatrix} m_1(t_0) \\ m_2(t_0) \\ \vdots \\ m_m(t_0) \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$F(t_0) = \begin{bmatrix} f_1(t_0) \\ f_2(t_0) \\ \vdots \\ f_r(t_0) \end{bmatrix} \quad (77)$$

Macierz rozszerzona procesu przejściowego, określonego wektorem $F(t)$ (74), ma postać

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (78)$$

Gdzie: $n=r+m$,

$a_{ij}(t)$ - elementy macierzy podlegające określeniu,

$$\Phi(t) = \exp(At). \quad (79)$$

6.8. Macierz charakterystyki impulsowej

Pojęcie charakterystyki impulsowej można przenieść na obiekt wielowymiarowy. W tym przypadku wobec m wejść oraz n wyjść należy wyznaczyć mn charakterystyk impulsowych. Z wyznaczonych składowych tworzy się macierz charakterystyki impulsowej o wymiarze $n \times m$

$$W(t) = \begin{bmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) & \dots & w_{1n}(t) \\ w_{21}(t) & w_{22}(t) & \dots & w_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{m1}(t) & w_{m2}(t) & \dots & w_{mn}(t) \end{bmatrix} \quad (80)$$

Przykładem macierzy charakterystyki impulsowej dla $n=2$ oraz $m=2$ może być macierz

$$W(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Każdy element macierzy (80) jest odpowiedzią obiektu wielowymiarowego i -tym wyjściem na impuls jednostkowy, wprowadzony na j -te wejście pod warunkiem, że pozostałe sygnały wejściowe oraz wyjściowe są równe zeru

$$u_{ij}(t) = \int_0^t w_{ij}(t-\tau) m_j(\tau) d\tau \quad (81)$$

Oddziaływanie na sygnałów wejściowych na i -ty sygnał wyjściowy wyraża się sumą całek spłotu w postaci

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^m \int_0^t w_{ij}(t-\tau) m_j(\tau) d\tau \quad (82)$$

lub w postaci równoważnej

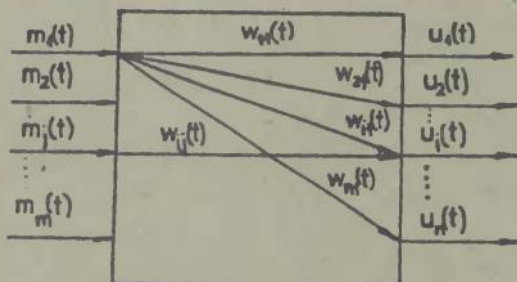
$$u_i(t) = \sum_{j=1}^m \int_0^t w_{ij}(\tau) m_j(t-\tau) d\tau \quad (83)$$

Uwzględniając wszystkie oddziaływania, otrzymany całkę spłotu w zapisie wektorowo-macierzowym

$$\bar{u}(t) = \int_0^t W(t) \bar{m}(t-\tau) d\tau \quad (84)$$

Dla obiektów fizycznie realizowalnych, macierz charakterystyki impulsowej spełnia warunek

$$W(t) = 0; \quad t < 0 \quad (85)$$



Rys. 20. Elementy $w_{ij}(t)$ macierzy (80)

Elementy macierzy (80) pokazano na rysunkach 20 i 21.

Wymuszeniem impulsowym uogólnionym jest δ -funkcja zapisana w postaci

$$\bar{m}(t) = N \delta(t) \quad (86)$$

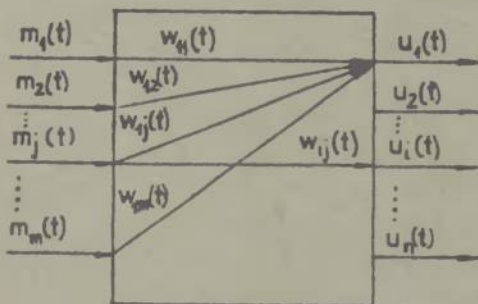
gdzie N jest macierzą kolumnową (21) w postaci

$$N = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} \quad (87)$$

Wielkości $s_1, s_2, \dots, s_m$ w macierzy (87) są powierzchniami δ -funkcji, określonymi z zależności granicznej

$$s_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t) dt \quad (88)$$

gdzie $\delta_{\varepsilon}(t)$ jest aproksymacją δ -funkcji.



Rys. 21. Elementy $w_{ij}(t)$ macierzy (80)

Jeżeli powierzchnie e_i są równe jedności, to otrzymany macierz N w postaci

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Jeżeli obiekt do momentu $t \leq 0$ miał zerowy wektor $u(0) = 0$, a w momencie $t=0^+$ znalazł się pod działaniem wymuszenia impulsowego (86) spełniającego zależność (89), to całka spletu (84) przyjma postać

$$\bar{u}(t) = W(t) \left| m_j(t) = 1 \delta(t); j = \overline{1, m} \right. \quad (90)$$

Wzór ten definiuje macierz charakterystyki impulsowej.

Obiekt wielowymiarowy jest stabilny, gdy wektor wyjściowy spełnia warunek / dla wszystkich wartości warunków początkowych/

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\bar{u}(t) - \int_{-\infty}^t W(t) \bar{m}(\tau) d\tau \right] = 0 \quad (91)$$

Obiekt wielowymiarowy jest stabilny w sensie ograniczonego wyjścia-wejścia, gdy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w_{ij}(\theta)| d\theta = K_{ij} < \infty \quad (92)$$

Gdzie K_{ij} jest wielkością stałą wymierną.

Jeżeli spełnione są warunki (91) oraz (92), to każdy element macierzy charakterystyki impulsowej ma postać

$$w_{ij}(t) = \sum_{k=1}^l c_k t^{n_k} e^{s_k t} \quad (93)$$

Gdzie: $\operatorname{Re}[s_k] < 0$

n_k - liczba nieujemna wymierna dla każdego k .

Wektor wyjściowy $\bar{u}(t)$ obiektu wielowymiarowego opisany jest wzorem

$$\bar{u}(t) = C \phi_0(t) \bar{r}_0 + C \int_0^t \phi(t-\tau) B \bar{m}(\tau) d\tau + D \bar{m}(t) \quad (94)$$

Gdzie: $\bar{r}(t)$, $\bar{m}(t)$, $\bar{u}(t)$ - wektory r, m oraz n wymiarowe,

A, B, C - macierze o wymiarach $r \times r$, $r \times m$ oraz $n \times r$

Jeżeli na j -te wejście obiektu wielowymiarowego z zerowymi warunkami początkowymi podamy wymuszenie impulsowe

$$\bar{m}(t) = N_j \delta(t) \quad (95)$$

Gdzie N_j jest j -tą kolumną macierzy jednostkowej o wymiarach $m \times m$, tj.

$$N_j = \text{col}[0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0] \quad (96)$$

to proces wyjściowy jest j -tą kolumną macierzy charakterystyki impulsowej

$$\bar{u}(t) = h_j(t) \quad (97)$$

Zależność (97) można zapisać w innej postaci

$$h_j(t) = \begin{bmatrix} h_{1j}(t) \\ h_{2j}(t) \\ \vdots \\ h_{mj}(t) \end{bmatrix} \quad (98)$$

gdzie h_{ij} jest charakterystyką impulsową na i -tym wyjściu obiektu wielowymiarowego na j -tym wejściu impulsem jednostkowym.

Wprowadzając wyrażenie (97) do równania (94), otrzymamy całkę spłotu

$$h_j(t) = C \int_0^t \Phi_o(t-\tau) B N_j \delta(\tau) d\tau \quad (99)$$

która wobec wzoru określającego własność δ -funkcji

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau) d\tau = (-1)^n f^{(n)}(0) \quad (100)$$

uproszczi się do postaci

$$h_j(t) = C \Phi_o(t) B N_j \quad (101)$$

Ze wzoru określającego macierz charakterystyki impulsowej wynika, że

$$W(t) = [h_1(t), h_2(t), \dots, h_j(t), \dots, h_m(t)] \quad (102)$$

Wobec zależności (102) macierz $W(t)$ ma postać

$$W(t) = C \Phi_o(t) B \quad (103)$$

Wykorzystując wzór (79), otrzymamy nową postać macierzy charakterystyki impulsowej

$$W(t) = C \exp[A t] B \quad (104)$$

Wprowadzając oznaczenie macierzy $W(t)$ (104) do całki (94), otrzymamy całkę spłotu

$$\bar{u}(t) = C \exp [At] \bar{r}_0 + \int_0^t W(t-\tau) \bar{m}(\tau) d\tau \quad (105)$$

Dla obiektu z zerowymi warunkami początkowymi / $\bar{r}_0 = 0$ / wzór przyjął postać całki (84) swanej całką superpozycji.

Jeżeli znany macierz $W(t)$, to stosując metodę wariacji dowolnych stałych do układu równań (49) oraz (50) otrzymamy rozwiązanie w postaci

$$\bar{r}(t) = \Phi(t-\tau) \bar{r}(\tau) + \Phi(t-\tau) \alpha(t) \bar{r}(\tau) \quad (106)$$

gdzie $\alpha(t)$ jest macierzą uźmienniania stałych.

Wprowadzając oznaczenie

$$\bar{z}(t) = [E + \alpha(t)] \bar{r}(t) \quad (107)$$

do równania (106), otrzymamy zależność wiążącą wektory $\bar{r}(t)$ oraz $\bar{z}(t)$

$$\bar{r}(t) = \Phi(t-\tau) \bar{z}(t) \quad (108)$$

Wobec zależności (108) równanie (49) przyjął postać

$$\dot{\bar{z}}(t) = \Phi^{-1}(t-\tau) B \bar{m}(\tau) \quad (109)$$

którego rozwiązaniem jest wektor $\bar{z}(t)$

$$\bar{z}(t) = \int_{\tau}^t \Phi^{-1}(t-\tau) B \bar{m}(\tau) d\tau \quad (110)$$

Z porównania wzorów (110) oraz (106) wynika zależność

$$\Phi^{-1}(t-\tau) \bar{r}(t) = \Phi^{-1}(t) \bar{r}(\tau) + \int_{\tau}^t \Phi^{-1}(t-\tau) B \bar{m}(\tau) d\tau \quad (111)$$

Wykorzystując własności macierzy $\Phi(t)$

$$\Phi(0) = E \quad (112)$$

$$\Phi(t-\tau) \Phi^{-1}(\tau-\tau) = \Phi(t-0) \quad (113)$$

we wzorze (111), otrzymamy wyrażenie określające wektor stanu $\bar{r}(t)$

$$\bar{r}(t) = \Phi(t-\tau) \bar{r}(\tau) + \int_{\tau}^t \Phi(t-\tau) B \bar{m}(\tau) d\tau \quad (114)$$

Wprowadzając wektor $\bar{r}(t)$ określony wzorem (114) do równania (50),

otrzymamy całkę spłotu (84) zapisaną w postaci równoważnej

$$\bar{u}(t) = \int_0^t [CW(t-\vartheta)B + \Delta(t-\vartheta)D] \bar{m}(\vartheta) d\vartheta \quad (115)$$

gdzie Δ jest macierzą δ -funkcji Diraca.

Porównując wzory (84) oraz (115) otrzymamy macierz charakterystyki impulsowej wyrażoną przez macierze A, B, C, oraz D

$$W(t) = \begin{cases} C \exp(At)B + \Delta(0)D, & \text{gdy } t \geq 0 \\ 0, & \text{gdy } t < 0 \end{cases} \quad (116)$$

Obiekt dynamiczny z macierzą charakterystyki impulsowej (116) jest stabilny w sensie wejście-wyjście, jeżeli spełniona jest nierówność

$$\int_0^{\infty} |C \exp(At)B + \Delta(0)D| dt < \infty \quad (117)$$

lub w postaci nierówności równoważnej

$$\int_0^{\infty} |C \exp(At)B| dt < \infty \quad (118)$$

Warunek konieczny oraz dostateczny spełnienia nierówności (118) wymaga, aby części rzeczywiste wartości własnych wyrażenia $C \exp(At)B$ były ujemne.

Stabilność asymptotyczną obiektu wielowymiarowego określa się re-
lacją

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp[At] = 0 \quad (119)$$

6.9. Rozwiązanie fundamentalne równania stanu swobodnego obiektu

Rozwiązaniem równania stanu (49) jest macierz

$$R_0(t) = \begin{bmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) & \dots & \psi_{1r}(t) \\ \psi_{21}(t) & \psi_{22}(t) & \dots & \psi_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{r1}(t) & \psi_{r2}(t) & \dots & \psi_{rr}(t) \end{bmatrix} \quad (120)$$

gdzie: $R_0(t)$ - macierz fundamentalna równania jednorodnego (17).

$\varphi_{ij}(t)$ - rozwiązanie dopełniające /swobodne/.

Podstawiając dowolne rozwiązanie $\varphi_{ij}(t)$ do równania (17) otrzymamy tożsamość

$$\frac{dR_0(t)}{dt} = AR_0(t) \quad (121)$$

Jeżeli wyrażenie określające własność iloczynu dwóch macierzy prostej i odwrotnej

$$R_0(t)R_0^{-1}(t) = E \quad (122)$$

roźniczkujemy względem t

$$\frac{dR_0(t)}{dt} R_0^{-1}(t) + R_0(t) \frac{dR_0^{-1}(t)}{dt} = 0 \quad (123)$$

oraz uwzględnimy wzory (17), (49) i (122), to po dokonaniu elementarnych przekształceń otrzymamy równanie

$$R_0^{-1}(t) \frac{d\bar{r}(t)}{dt} + \frac{dR_0^{-1}(t)}{dt} \bar{r}(t) = R_0^{-1}(t) B \bar{m}(t) \quad (124)$$

które można zapisać w innej postaci

$$\frac{d}{dt} [R_0^{-1}(t) \bar{r}(t)] = R_0^{-1}(t) B \bar{m}(t) \quad (125)$$

Całkując równanie (125) w granicach od 0 do t , otrzymamy rozwiązanie w postaci

$$\bar{r}(t) = \int_0^t R_0(t) R_0^{-1}(\tau) B \bar{m}(\tau) d\tau \quad (126)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$W(t, \tau) = R_0(t) R_0^{-1}(\tau) B \quad (127)$$

otrzymamy całkę spłotu

$$\bar{r}(t) = \int_0^t W(t, \tau) \bar{m}(\tau) d\tau \quad (128)$$

Przy $\bar{r}(t) = \bar{u}(t)$ macierz $W(t, \tau)$ jest macierzą charakterystyki impulsowej (80) z elementami $w_{ij}(t, \tau)$.

Macierz $W(t, \hat{t})$ dla $t = \hat{t}$ oraz $B = 1$ jest macierzą jednostkową

$$W(t, \hat{t}) = R_0(t) R_0^{-1}(t) = E \quad (129)$$

Wzór (128) otrzymano przy założeniu, że warunki początkowe są zerowe. Gdy warunki te nie są zerowe, to można je sprowadzić do zerowych przez wprowadzenie równoważnego im sygnału wejściowego.

Macierz $R_0^{-1}(t)$ wyznacza się z zależności (33)

$$R_0^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|R_0|} & \frac{A_{21}}{|R_0|} & \dots & \frac{A_{m1}}{|R_0|} \\ \frac{A_{12}}{|R_0|} & \frac{A_{22}}{|R_0|} & \dots & \frac{A_{m2}}{|R_0|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|R_0|} & \frac{A_{2n}}{|R_0|} & \dots & \frac{A_{mn}}{|R_0|} \end{bmatrix} \quad (130)$$

gdzie

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1j} & \dots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \varphi_{i2} & \dots & \varphi_{ij} & \dots & \varphi_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nj} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}$$

Wykorzystując zależność określającą współczynniki c_{ik} iloczynami macierzy /tablica 1/, otrzymamy macierz charakterystyki impulsowej wyrażoną przez elementy macierzy fundamentalnej /przy $n=r$ /

$$W(t-s) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{A_{1k}}{|R_0|} \varphi_{1k} & \dots & \sum_{k=1}^n \frac{A_{1n}}{|R_0|} \varphi_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{A_{nk}}{|R_0|} \varphi_{1k} & \dots & \sum_{k=1}^n \frac{A_{nn}}{|R_0|} \varphi_{1k} \end{bmatrix} \quad (131)$$

Macierz fundamentalna, macierz przejścia oraz warunki początkowe powiązane są zależnościami

$$R_0(t) = \Phi_0(t) R_0 \quad (132)$$

gdzie R_0 jest macierzą stałą równą $R_0(t_0)$. Natomiast zależność pomiędzy wektorem stanu, macierzą przejścia oraz warunkami początkowymi opisana jest wzorem (63).

6.10. Rozkład macierzy $\exp(At)$ w szereg potęgowy

Macierz $f(A) = \exp(At)$ można rozłożyć w szereg potęgowy

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k A^k \quad (133)$$

gdzie A jest macierzą kwadratową r -tego rzędu z r niezależnymi wartościami własnymi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Zgodnie z twierdzeniem Sylvestra otrzymamy

$$f(A) = \sum_{i=1}^r f(\lambda_i) F(\lambda_i) \quad (134)$$

gdzie $F(\lambda_i)$ jest macierzą niezależną od postaci funkcji $f(\lambda)$ i jest określona zależnością

$$F(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{A - \lambda_j E}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (135)$$

Wartości własne λ wyznacza się ze wzoru (38).

Macierz $F(\lambda_i)$ spełnia następujące zależności

$$F(\lambda_i) F(\lambda_j) = 0; \text{ gdy } i \neq j \quad (136)$$

$$[F(\lambda_i)]^r = F(\lambda_i) \quad (137)$$

$$\sum_{i=1}^r F(\lambda_i) = E \quad (138)$$

6.11. Macierz funkcji przejścia

Funkcja przejścia obiektu wielowymiarowego ustalonego równa jest ilorazowi transformat Laplace'a wektorów $\bar{u}(s)$ oraz $\bar{m}(s)$

$$W(s) = \frac{\bar{U}(s)}{\bar{M}(s)} \quad (139)$$

gdzie:

$$\bar{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_n(s) \end{bmatrix}; \quad \bar{M}(s) = \begin{bmatrix} M_1(s) \\ M_2(s) \\ \vdots \\ M_m(s) \end{bmatrix}$$

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1m}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{n1}(s) & W_{n2}(s) & \dots & W_{nm}(s) \end{bmatrix} \quad (140)$$

Z zależności (139) wynika obraz równania modelu matematycznego obiektu wielowymiarowego

$$\bar{U}(s) = W(s) \bar{M}(s) \quad (141)$$

Macierz funkcji przejścia oraz macierz charakterystyki impulsowej powiązane są ze sobą przekształceniem Laplace'a

$$W(s) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t) e^{-st} dt \quad (142)$$

$$W(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} W(s) e^{st} ds \quad (143)$$

Przykładowo, macierz funkcji przejścia dla $n=2$ oraz $m=3$ ma postać

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+0,1)(s+0,2)(s+0,3)} & \frac{1}{(s+0,3)} & 0 \\ \frac{1}{(s+0,1)(s+0,4)} & \frac{1}{(s+0,3)} & \frac{1}{(s+0,4)} \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy (140) można przedstawić w postaci ułamków wymiernych

$$W_{ij}(s) = \frac{L_{ij}(s)}{N_{ij}^{(\beta)}(s)} \quad (144)$$

gdzie $L_{ij}(s)$ oraz $N_{ij}(s)$ są wielomianami zmiennej s . Wielomian $N_{ij}(s)$ może mieć bieguny pojedyncze lub wielokrotne. W celu wyznaczenia macierzy A, B oraz C stosujemy metodę Gilberta dla biegunów pojedynczych oraz metodę Kalmana dla biegunów wielokrotnych.

Macierz funkcji przejścia wyznacza się z układu równań (49) oraz (50). W tym celu należy wyznaczyć obrazy tych równań

$$s\bar{R}(s) - \bar{r}_0 = A\bar{R}(s) + B\bar{M}(s) \quad (145)$$

$$\bar{U}(s) = C\bar{R}(s) + D\bar{M}(s) \quad (146)$$

W wyniku przekształceń układu równań (145) oraz (146), przy założeniu, że $\bar{r}_0 = 0$ i $M(s) = 1$, otrzymamy wyrażenie w postaci

$$\bar{U}(s) = C[sE - A]^{-1} B \bar{M}(s) \quad (147)$$

z którego wynika macierz funkcji przejścia

$$W(s) = C[sE - A]^{-1} B \quad (148)$$

Znając macierz funkcji przejścia $W(s)$, można wyznaczyć macierze A, B oraz C stosując obliczenia residualne.

6.12. Momenty macierzy charakterystyki impulsowej

Macierz momentu k -tego rzędu macierzy charakterystyki impulsowej (104) jest wyrażenie

$$H_k = \int_0^t t^k W(t) dt ; k=0,1,2,\dots \quad (149)$$

Wprowadzając określenie momentu (149) do wzoru (104), całkując otrzymaną zależność k razy oraz zakładając, że spełniony jest warunek (119) otrzymamy

$$H_k = (-1)^{k+1} k! C A^{-k-1} B ; k=0,1,2,\dots \quad (150)$$

Ze wzoru (150) wynika

$$\begin{aligned} H_1 &= C A^{-2} B \\ H_2 &= 2 C A^{-3} B \\ &\vdots \\ H_r &= r C A^{-(r+1)} B \end{aligned} \quad (151)$$

Jeżeli wprowadzimy nowe określenie macierzy momentów

$$H_k^* = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} H_{k-1} ; k=1,2,\dots \quad (152)$$

oraz oznaczymy

$$H_0^* = W(t) \Big|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s W(s) \quad (153)$$

to otrzymany wzór

$$H_k^* = C A^{-k} B ; k=0,1,2,\dots \quad (154)$$

opisujący zależność macierzy momentów k -tego rzędu macierzy charakterystyki impulsowej od trójki macierzy $\{A, B, C\}$.

6.13. Metody rozwiązywania równania stanu

Równanie stanu

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}}(t) &= A \bar{r}(t) + B \bar{m}(t) \\ \bar{r}(t_0) &= \bar{r}_0 \end{aligned} \quad (155)$$

można rozwiązać stosując przekształcenie Laplace'a. Otrzymamy obraz wektora stanu

$$R(s) = (sE - A)^{-1} [B \bar{M}(s) + \bar{r}_0] \quad (156)$$

Obliczając wartości $\bar{R}(s)$ przy różnych s , można określić zachowanie się obiektu wielowymiarowego w obszarze zmiennej zespolonej. W celu wyznaczenia wektora $\bar{r}$ t za pomocą odwrotnego przekształcenia Laplace'a należy określić bieguny wyrażenia $(sE - A)$, tj. wartości własne macierzy A .

Metody numeryczne rozwiązywania równania stanu oparte są na rozkładzie wektora stanu w szereg Taylora oraz uwzględnieniu kilku wyrazów szeregu. Uwzględniając tylko dwa wyrazy szeregu, otrzymamy dla równania stanu (155) następujące związki

$$\bar{r}_k^{(1)}(t) = A \bar{r}_k(t) + B \bar{m}_k(t) \quad (157)$$

$$\bar{r}_k^{(2)}(t) = A \bar{r}_k^{(1)}(t) + B \bar{m}(t_0 + k\Delta t) \quad (158)$$

Jeżeli funkcja wektorowa $\bar{m}(t)$ jest gładka oraz Δt jest małe, to otrzymamy wzór

$$\bar{r}_k^{(2)}(t) = A \bar{r}_k^{(1)}(t) + B \frac{1}{\Delta t} [\bar{m}(t_0) + (k+1)\Delta t - \bar{m}(t_0 + k\Delta t)] \quad (159)$$

Ze wzorów (157), (158) oraz (159) wynika wzór

$$\begin{aligned} \bar{r}_{k+1}(t) &= \bar{r}_k(t) + \Delta t [A \bar{r}_k(t) + B \bar{m}_k(t)] + \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta t)^2 [A^2 \bar{r}_k(t) + AB \bar{m}_k(t) + \frac{1}{\Delta t} B [\bar{m}_{k+1}(t) - \bar{m}_k(t)]] \end{aligned} \quad (160)$$

który po dokonaniu przekształceń przyjmie postać

$$\begin{aligned} \bar{r}_{k+1}(t) &= \Delta t [A \bar{r}_k(t) + \frac{1}{2} B [\bar{m}_k(t) + \bar{m}_{k+1}(t)]] + \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta t)^2 [A^2 \bar{r}_k(t) + AB \bar{m}_k(t)] \end{aligned} \quad (161)$$

Rozwiązanie analityczne (94)

$$\bar{r}(t) = e^{A(t-t_0)} \bar{r}_0 + e^{\int_{t_0}^t A \tau} B \bar{m}(\tau) d\tau \quad (162)$$

dla przyrostu Δt , przekształci się do postaci

$$\bar{r}_{k+1}(t) = e^{A\Delta t} \bar{r}_k(t) + e^{A[t_0 + (k+1)\Delta t]} \int_{t+k\Delta t}^{t_0 + (k+1)\Delta t} e^{-A\tau} B \bar{m}(\tau) d\tau \quad (163)$$

Stosując wzór Simpsona do całki zależnośc (163), otrzymamy wzór iteracyjny

$$\begin{aligned} \bar{r}_{k+1}(t) = e^{A\Delta t} \left[\bar{r}_k(t) + \frac{\Delta t}{6} B \bar{m}_k(t) \right] + \\ + \frac{2\Delta t}{3} e^{A\frac{\Delta t}{2}} B \bar{m}_{k+\frac{1}{2}}(t) + \frac{\Delta t}{2} B \bar{m}_{k+1}(t) \end{aligned} \quad (164)$$

Stosując metodę Runge-Kutta oraz ograniczając się czwartym rzędem rozkładu w szereg, otrzymamy inny wzór iteracyjny

$$\bar{r}_{k+1}(t) = \bar{r}_k(t) + \frac{\Delta t}{6} (\alpha_k + 2\beta_k + 2\gamma_k + \delta_k) \quad (165)$$

gdzie: $\alpha_k = A\bar{r}_k(t) + B\bar{m}_k(t)$

$$\beta_k = A\left\{\bar{r}_k(t) + \frac{\Delta t}{2} [A\bar{r}_k(t) + B\bar{m}_k(t)] + B\bar{m}_{k+\frac{1}{2}}(t)\right\}$$

$$\gamma_k = A\left\{\bar{r}_k(t) + \frac{\Delta t}{2} \left[A + \frac{\Delta t}{2} A^2\right] \bar{r}_k(t) + \frac{\Delta t}{2} AB\bar{m}_k(t) + B\bar{m}_{k+\frac{1}{2}}(t)\right\} + B\bar{m}_{k+\frac{1}{2}}(t)$$

$$\begin{aligned} \delta_k = A\left\{\bar{r}_k(t) + \Delta t \left[A + \frac{\Delta t}{2} A^2 + \frac{(\Delta t)^2}{4} A^3\right] \bar{r}_k(t) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta t}{4} A^2 B \bar{m}_k(t) + \left[\frac{\Delta t}{2} AB + B\right] \bar{m}_{k+\frac{1}{2}}(t) + B\bar{m}_{k+1}(t)\right\} \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenie wielkości α, β, γ i δ do wzoru (165) oraz wykonując odpowiednie przekształcenia, otrzymamy postać iteracyjną wzoru (165)

$$\begin{aligned} \bar{r}_{k+1}(t) = 1 + \Delta t A + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 A^2 + \frac{1}{6} (\Delta t)^3 A^3 + \\ + \frac{1}{24} [(\Delta t)^4 A^4] \bar{r}_k(t) + \frac{1}{6} [1 + \Delta t A + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 A^2] + \\ + \frac{1}{4} [(\Delta t)^3 A^3] B \bar{m}_k(t) + \frac{2}{3} [1 + \frac{1}{2} \Delta t A + \frac{1}{8} (\Delta t)^2 A^2] B \bar{m}_{k+\frac{1}{2}}(t) + B \bar{m}_{k+1}(t) \end{aligned} \quad (165a)$$

Pierwszy składnik wzoru (165a) daje pięć wyrazów rozkładu funkcji $\exp(A\Delta t)$ w szereg Taylora. Pozostałe składniki są wyrazami rozkładu w szereg Taylora funkcji

$$f = e^{A\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-A\delta t} B \bar{m}(t_k + \delta t) d\delta t$$

Inna metoda rozwiązywania równania (155) oparta jest na analogu

dyskretnym wzoru (9*)

$$\bar{r}(k\Delta t) = e^{A\Delta t} \bar{r}[(k-1)\Delta t] + \bar{m}[(k-1)\Delta t] B \int_0^{\Delta t} e^{A\delta t} d\delta t \quad (166)$$

W celu otrzymania postaci praktycznej wzoru (166) należy całkę przedstawić w postaci sumy, z równoczesnym rozkładem wyrażenia $\exp(A\Delta t)$ w szereg równomiernie zbieżny dla dowolnego t . Rozkład w szereg potęgowy daje potęgi macierzy A wyższe niż $r-1$. W celu ułatwienia obliczeń wykorzystuje się następujący rozkład wyrażenia $\exp(A\Delta t)$

$$e^{A\Delta t} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} (A\Delta t)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Delta t)^{r+k}}{(r+k)!} \left[\sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{jk} A^j \right] = \sum_{j=0}^{r-1} A^j \left[\frac{(\Delta t)^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{jk} \frac{(\Delta t)^{r+k}}{k!} \right] \quad (167)$$

Macierz A^j dla $j=0, r-1$ wyznacza się z równania (39), zapisanego w postaci

$$f_0 E + f_1 A + \dots + f_r A^r = 0 \quad (168)$$

Współczynniki tego równania wyznacza się z równania charakterystycznego

$$f_0^* + f_1^* \lambda + f_2^* \lambda^2 + \dots + f_{r-1}^* \lambda^{r-1} + \lambda^r = 0 \quad (169)$$

przy użyciu wzorów

$$\begin{aligned} f_{n-1}^* &= -T_1, \\ f_{n-2}^* &= -\frac{1}{2} (f_{n-1}^* T_1 + T_2), \\ f_{n-3}^* &= -\frac{1}{3} (f_{n-2}^* T_1 + f_{n-1}^* T_2 + T_3) \\ f_0^* &= -\frac{1}{n} (f_1^* T_1 + f_2^* T_2 + \dots + f_{n-1}^* T_{n-1} + T_n) \end{aligned} \quad (170)$$

gdzie: $T_k = \text{tr}(A^k)$

$$f_k^* = \frac{f_k}{f_r}$$

Wyższe potęgi macierzy A niż $r-1$ / $p > r-1, p=0, 1, 2, \dots$ / wyznacza się ze wzoru

$$A^{r+p} = \alpha_{0,p} E + \alpha_{1,p} A + \alpha_{2,p} A^2 + \dots + \alpha_{r-1,p} A^{r-1} \quad (171)$$

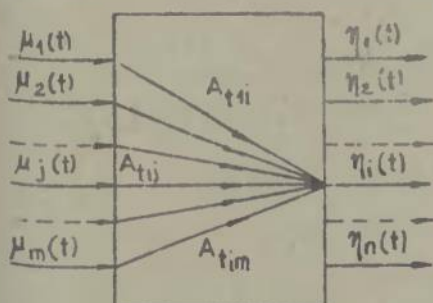
którego współczynniki α_{jk} określone są zależnościami

$$\begin{aligned} \alpha_{k,0} &= -f_k^* \quad ; k = \overline{0, n-1}, \\ \alpha_{0,p} &= -f_0^* \alpha_{0,p-1}, \\ \alpha_{1,p} &= \alpha_{0,p-1} - f_1^* \alpha_{1,p-1}, \\ \alpha_{2,p} &= \alpha_{1,p-1} - f_2^* \alpha_{2,p-1}, \\ &\dots \\ \alpha_{r-1,p} &= \alpha_{r-2,p-1} - f_{r-1}^* \alpha_{r-1,p-1} \end{aligned} \quad (172)$$

7. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE USTALONE WIELOWYMIAROWE O PARAMETRACH SKUPIONYCH. WYMOSZENIA STOCHASTYCZNE

7.1. Wstęp

W wielu zagadnieniach praktycznych obiekty wielowymiarowe znajdują się pod działaniem przypadkowych sygnałów wejściowych. Sygnały te przetwarzane są przez obiekt w sygnały wyjściowe, które są również przypadkowe. Schemat obiektu wielowymiarowego z wektorami przypadkowymi $\mu(t)$ oraz $\eta(t)$ pokazano na rysunku 22.



Rys. 22. Schemat obiektu wielowymiarowego

W przypadku szczególnym obiekty wielowymiarowe mogą mieć jedno wejście oraz kilka wyjść albo odwrotnie, jedno wyjście oraz kilka wejść. Ponadto sygnały wejściowe przypadkowe mogą być skorelowane lub, jak w przypadku szumu białego, nie zachodzi korelacja pomiędzy składowymi procesu stochastycznego.

Analiza obiektów wielowymiarowych z sygnałami przypadkowymi sprowadza się do opracowania, w celu opisu matematycznego procesów stochastycznych, odpowiedniego aparatu matematycznego.

Metody analizy teoretycznej formułują model matematyczny obiektu w oparciu o jego własności fizyczne. Metody doświadczalne sprowadzają się do wyznaczenia charakterystyk statystycznych w oparciu o wybrane realizacje procesów stochastycznych. Z matematycznego punktu widzenia jest to najważniejszy sposób analizy wektorów przypadkowych.

7.2. Operator modelu obiektu wielowymiarowego

Każdy sygnał wejściowy $\mu_j(t)$ / $j=\overline{1,m}$ / przekształca się w obiekcie w odpowiedni sygnał wyjściowy $\eta_i(t)$ / $i=\overline{1,n}$ /. Operacje przekształcenia realizuje operator modelu obiektu

$$\eta_{ij}(t) = (A_t^{-1})_{ij} \mu_j(t) \quad (1)$$

gdzie $(A_t^{-1})_{ij}$ jest elementem macierzy operatora działającego w obszarze zmiennej t .

Dla obiektu liniowego wielowymiarowego zgodnie z zasadą superpozycji sygnał wyjściowy sumaryczny jest wynikiem przekształcenia wszystkich n sygnałów wejściowych

$$\eta_i(t) = \sum_{j=1}^m (A_t^{-1})_{ij} \mu_j(t) \quad (2)$$

W obiekcie zachodzi m możliwych przekształceń n sygnałów wejściowych w n sygnałów wyjściowych. Stąd własności dynamiczne obiektu wielowymiarowego określone są macierzą operatorów

$$(A_t^{-1}) = |(A_t^{-1})_{ij}| ; j = \overline{1, m}; i = \overline{1, n} \quad (3)$$

Sygnały przypadkowe $\eta_i(t)$ oraz $\mu_j(t)$ są procesami stochastycznymi, które w zagadnieniach praktycznych opisane są zbiorami realizacji $\{u_{ik}(t)\}$ oraz $\{m_{jk}(t)\}$.

Wyrażając zależność (2) przez realizacje, otrzymamy

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^m (A_t^{-1})_{ij} m_j(t) \quad (4)$$

Wzórów (1) i (2) nie można rozwiązać praktycznie, ponieważ poza operatorem A_{ij} pozostałe wielkości są funkcjami przypadkowymi. Problem rozwiązania równania (1) lub (4), tj. wyznaczenie nieprzypadkowych elementów macierzy (3), sprowadza się do określania charakterystyk statystycznych sygnałów przypadkowych. Operując charakterystykami statystycznymi, które są funkcjami zdeterminowanymi, zagadnienie wyznaczenia elementów A_{ij} macierzy operatora A polega na rozwiązaniu równania różniczkowego liniowego lub równania algebraicznego. Równania takie będą zawierały charakterystyki statystyczne, obliczone w obszarze czasu lub w obszarze częstotliwości. Są to następujące charakterystyki: funkcje korelacyjne oraz gęstości widmowe jako obrazy fourierowskie tych funkcji.

7.3. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej

7.3.1. Wstęp

Elementy macierzy operatora $(A_t^{-1})_{ij}$ można wyrazić przy użyciu elementów macierzy charakterystyki impulsowej

$$(A_t^{-1})_{ij} \{ \} = \int_{t_0}^t w_{ij}(t-\tau) \{ \} d\tau \quad (5)$$

gdzie $w_{ij}(t)$ jest elementem macierzy charakterystyki impulsowej obiektu wielowymiarowego dla i -tego wyjścia oraz j -tego wejścia. Elementy te tworzą macierz

$$W(t-\tau) = \begin{bmatrix} w_{11}(t-\tau) & w_{12}(t-\tau) & \dots & w_{1m}(t-\tau) \\ w_{21}(t-\tau) & w_{22}(t-\tau) & \dots & w_{2m}(t-\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1}(t-\tau) & w_{n2}(t-\tau) & \dots & w_{nn}(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Jeżeli we wzorze (4) wykonamy obustronnie operację uśrednienia statystycznego $M\{\}$, to otrzymamy wzór określający zależność pomiędzy nadzieją matematyczną sygnału wyjściowego oraz sygnału wejściowego

$$m_{\eta i} = \sum_{j=1}^m (A^{-1})_{ij} m_{\mu j} \quad ; i=1, \bar{n} \quad (7)$$

Wykorzystując zależność (5), otrzymamy inną postać tego wzoru

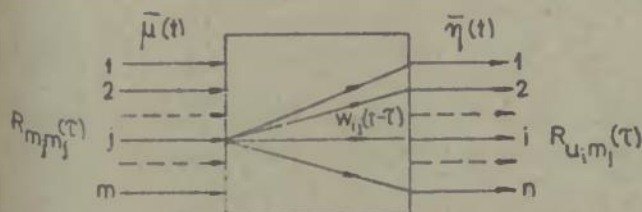
$$m_{\eta i} = \sum_{j=1}^m m_{\mu j} \int_{t_0}^t w_{ij}(t-\tau) d\tau \quad (8)$$

Nadzieja matematyczna oraz dyspersja są charakterystykami liczbowymi i nie opisują więzi statystycznej pomiędzy realizacjami sygnału wejściowego oraz wyjściowego. Więć taką opisują funkcje korelacyjne.

7.3.2. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej dla sygnałów wejściowych statystycznie niezależnych

7.3.2.1. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej w dziedzinie oryginałów

Jeżeli sygnały wejściowe są statystycznie niezależne, tj.



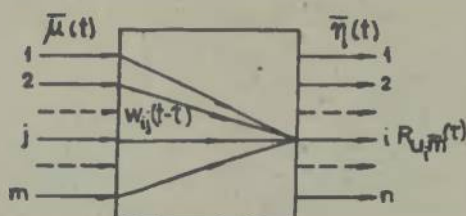
$$M\{m_k(t)m_l(t)\} = 0 \quad (9) \quad k, l=1, \bar{m}$$

to zagadnienie wyznaczenia macierzy charakterystyki impulsowej przy znanych funkcjach korelacyjnych realizuje się tak samo jak dla obiektu o jednym wej-

Rys. 23. Obiekt wielowymiarowy z jednym wejściem oraz n wyjściami

ścin.

Schemat obiektu wielowymiarowego o m wejściach oraz n wyjściach opisany charakterystykami statystycznymi pokazano na rysunkach 23 oraz 24.



Rys. 24. Obiekt wielowymiarowy z jednym wyjściem oraz m wejściami

Jeżeli wyrażenie (7) zapisane dla realizacji scentrowanych /lub z zerowymi nadziejami matematycznymi /

$$\hat{u}_{ij}(t) = (A_+^{-1})_{ij} \cdot \hat{m}_j(t) \quad (10)$$

pomnożymy obustronnie przez $\hat{m}_j(t-\tau)$ oraz wykonamy operację neredniienia statystycznego, to otrzymamy zależność

$$R_{uimj}(\tau) = (A_+^{-1})_{ij} \{M_j(\tau) \hat{m}_j(t-\tau)\} \quad (11)$$

gdzie $\hat{m}_j(t) = m_j(t) - \bar{m}_j$ jest scentrowaną j -tą realizacją sygnału $\bar{\mu}(t)$. Wykorzystując zależność (5) we wzorze (11) otrzymamy inną postać tego wzoru

$$R_{uimj}(\tau) = \int_0^t w_{ij}(t-\tau) R_{mjmj}(\tau) d\tau \quad (12)$$

lub w postaci równoważnej

$$R_{uimj}(\tau) = \int_0^+ w_{ij}(\tau) R_{mjmj}(t-\tau) d\tau \quad (13)$$

Równanie (12) jest równaniem Wienera-Hopfa, określającym element macierzy charakterystyki impulsowej dla j -tego, nieskorelowanego z innymi składowymi, wektora $\bar{\mu}(t)$ oraz i -tego sygnału wyjściowego.

Jeżeli uwzględnimy czas opóźnienia i -tego sygnału wyjściowego odpowiadającego j -temu sygnałowi wejściowemu, to całkowanie to we wzorze (12) przeprowadza się w granicach od t_{o1} do ∞

$$R_{uimj}(\tau) = \int_{t_{o1}}^{\infty} w_{ij}(t-\tau) R_{mjmj}(\tau) d\tau \quad (14)$$

Jeżeli chcemy uwzględnić wpływ sygnału wejściowego na wyjście dla $\tau > 0$ oraz $\tau < 0$, to całkowanie przeprowadza się od $-\infty$ do $+\infty$

$$R_{uimj}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{ij}(t-\tau) R_{mjmj}(\tau) d\tau \quad (15)$$

Funkcja korelacji wzajemnej dla i -tego sygnału wyjściowego oraz m sygnałów wejściowych jest sumą składników $R_{uimj}(\tau)$

$$R_{u;\bar{m}}(\tau) = \sum_{j=0}^m R_{u;im_j}(\tau) \quad (16)$$

Wprowadzając do wzoru (16) oznaczenie funkcji $R_{u;im_j}(\tau)$ ze wzoru (14), otrzymamy układ równań

$$\left. \begin{aligned} R_{u;im_1}(\tau) &= \int_{t_{01}}^t W_{i1}(\tau) R_{m_1m_1}(t-\tau) d\tau \\ &\dots \dots \dots \\ R_{u;im_m}(\tau) &= \int_{t_{0m}}^t W_{im}(\tau) R_{m_m m_m}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Gdzie $t_{01}, t_{02}, \dots, t_{0m}$ oznaczają czasy opóźnień odpowiednio w stosunku do pierwszego, drugiego itd sygnału wejściowego.

Każde równanie układu równań (17) można rozwiązać oddzielnie metodami stosowanymi dla obiektów jednowymiarowych.

Jeżeli uwzględnimy zależność (13) we wzorze (16), to otrzymamy zbiór równań

$$R_{u;\bar{m}}(\tau) = \int_0^t [W_{i1}(t-\tau) R_{m_1m_1}(\tau) + W_{i2}(t-\tau) R_{m_2m_2}(\tau) + \dots + W_{im}(t-\tau) R_{m_m m_m}(\tau)] d\tau \quad (18)$$

który dla $i=\bar{1}, n$ można zapisać w postaci macierzowej

$$R_{u;\bar{m}}(\tau) = \int_0^t W(t-\tau) R_{\bar{m}\bar{m}}(\tau) d\tau \quad (19)$$

Gdzie:

$$R_{u;\bar{m}}(\tau) = \begin{bmatrix} R_{u;\bar{m}}(\tau) \\ R_{u;\bar{m}}(\tau) \\ \vdots \\ R_{u;\bar{m}}(\tau) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$R_{\bar{m}\bar{m}}(\tau) = \begin{bmatrix} R_{m_1m_1}(\tau) \\ R_{m_2m_2}(\tau) \\ \vdots \\ R_{m_nm_n}(\tau) \end{bmatrix} \quad (21)$$

Sygnałem wejściowym, spełniającym warunki niekorelowalności wzajemnej składowych, jest wielowymiarowy szum biały

$$\bar{m}(t) = N\delta(t) \quad (22)$$

Gdzie N jest macierzą kolumnową intensywności wielowymiarowego szumu białego.

Macierz funkcji korelacyjnej szumu białego jest macierzą diagonalną

$$R_{\bar{m}\bar{m}}(\tau) = \begin{bmatrix} S_1 \delta(\tau) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 \delta(\tau) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_m \delta(\tau) \end{bmatrix} \quad (23)$$

lub w zapisie macierzowym

$$R_{\bar{m}\bar{m}}(\tau) = N \delta(\tau) \quad (24)$$

gdzie N jest macierzą stałowartościową intensywności szumu białego

$$N = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_m \end{bmatrix} \quad (25)$$

Uwzględniając wzór (24) w równaniu (19), zapisanym w postaci równoważnej

$$R_{\bar{u}\bar{m}}(\tau) = \int_0^t W(\tau) R_{\bar{m}\bar{m}}(t-\tau) d\tau \quad (26)$$

otrzymamy równanie

$$R_{\bar{u}\bar{m}}(\tau) = N \int_0^t W(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (27)$$

Wykorzystując własność δ -funkcji w równaniu (27), otrzymamy

$$R_{\bar{u}\bar{m}}(\tau) = N W(\tau) \quad (28)$$

Z równania tego wynika, że macierz charakterystyki impulsowej jest miarą energii δ -funkcji.

7.3.2.2. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej w dziedzinie obrazów

Jeżeli każdy element macierzy kolumnowej funkcji korelacyjnych (20) oraz (21) jest transformowalny w sensie transformat Fouriera, to otrzymamy wzory określające gęstości widnowe

$$S_{u_i m_j}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{u_i m_j}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (29)$$

$$S_{m_j m_j}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{m_j m_j}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (30)$$

Transformując wyraz po wyrazie układ równań (17), otrzymamy jego obraz w obszarze częstotliwości

$$\left. \begin{aligned} S_{U_i m_1}(\omega) &= W_{i1}^*(j\omega) S_{m_1 m_1}(\omega) \\ \dots \dots \dots \\ S_{U_i m_m}(\omega) &= W_{im}^*(j\omega) S_{m_m m_m}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

gdzie

$$W_{ij}^*(j\omega) = W_{ij}(j\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (32)$$

Funkcja $W_{ij}(\omega)$ jest elementem macierzy charakterystyki częstotliwościowej odpowiadającym elementowi macierzy charakterystyki impulsowej dla j -tego wejścia oraz i -tego wyjścia obiektu wielowymiarowego idealnego /bez opóźnienia/

$$W_{ij}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{ij}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (33)$$

Jeżeli przekształcenie Fouriera zastosujemy do wzoru (16), to otrzymamy jego obraz

$$S_{U_i \bar{m}}(\omega) = \sum_{j=1}^m W_{ij}(j\omega) S_{m_j m_j}(\omega) \quad (34)$$

Stosując odwrotne przekształcenie Fouriera do funkcji $W_{ij}(j\omega)$ wyznaczonych z układu równań (34), otrzymamy elementy macierzy charakterystyki impulsowej

$$w_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{ij}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (35)$$

7.3.3. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej dla sygnałów wejściowych statystycznie zależnych

7.3.3.1. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej w dziedzinie oryginałów

Jeżeli składowe $m_i(t)$ sygnału wejściowego, zapisanego w postaci

$$\bar{m}(t) = \text{col}[m_1(t), m_2(t), \dots, m_m(t)] \quad (36)$$

są statystycznie zależne, to funkcje korelacyjne są różne od zera

$$\begin{aligned} R_{m_i m_j}(\tau) &\neq 0 \\ R_{m_j m_i}(\tau) &\neq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Wobec powyższego, macierz funkcji korelacyjnej sygnału wejściowego ma postać

$$R_{\bar{m}\bar{m}}(\tau) = \begin{bmatrix} R_{m_1 m_1}(\tau) & R_{m_1 m_2}(\tau) & \dots & R_{m_1 m_m}(\tau) \\ R_{m_2 m_1}(\tau) & R_{m_2 m_2}(\tau) & \dots & R_{m_2 m_m}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{m_m m_1}(\tau) & R_{m_m m_2}(\tau) & \dots & R_{m_m m_m}(\tau) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Macierz korelacyjna (38) jest symetryczna względem przekątnej głównej, t.j. spełniona jest równość

$$R_{m_k m_j}(\tau) = R_{m_j m_k}(\tau) \quad (39)$$

Macierz (38) wyznacza się ze wzoru definicyjnego

$$R_{\bar{m}\bar{m}}(\tau) = M \{ \bar{m}(t) \bar{m}^T(t+\tau) \} \quad (40)$$

gdzie $\bar{m}^T(t+\tau)$ jest transponowaną postacią macierzy kolumnowej $\bar{m}(t)$ z równoczesną zamianą t na $t+\tau$. Otrzymamy macierz wierszową

$$\bar{m}^T(t+\tau) = [m_1(t+\tau), m_2(t+\tau), \dots, m_m(t+\tau)] \quad (41)$$

Używając zależności (36) oraz (41), wzór (40) przyjmie postać

$$M \{ \bar{m}(t) \bar{m}^T(t+\tau) \} = M \left\{ \begin{bmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ \vdots \\ m_m(t) \end{bmatrix} [m_1(t+\tau), m_2(t+\tau), \dots, m_m(t+\tau)] \right\} \quad (42)$$

lub po wykonaniu operacji mnożenia otrzymamy inną postać tego wzoru

$$M \{ \bar{m}(t) \bar{m}^T(t+\tau) \} = \begin{bmatrix} M \{ m_1(t) m_1(t+\tau) \} & M \{ m_1(t) m_2(t+\tau) \} & \dots & M \{ m_1(t) m_m(t+\tau) \} \\ M \{ m_2(t) m_1(t+\tau) \} & M \{ m_2(t) m_2(t+\tau) \} & \dots & M \{ m_2(t) m_m(t+\tau) \} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad (43)$$

Macierz funkcji korelacji wzajemnej sygnałów przypadkowych $\bar{u}(t)$ oraz $\bar{y}(t)$ wyznacza się ze wzoru definicyjnego

$$R_{\bar{u}\bar{m}}(\tau) = M \{ \bar{u}(t) \bar{m}^T(t+\tau) \} \quad (44)$$

Dysponując elementami macierzy funkcji korelacyjnych $R_{\bar{u}\bar{m}}(\tau)$ oraz $R_{\bar{m}\bar{m}}(\tau)$ a także biorąc pod uwagę zależność (15), otrzymamy układ równań

$$\left. \begin{aligned} R_{u_1 m_1}(\tau) &= \int_0^\infty w_{i1}(\tau) R_{m_1 m_1}(t-\tau) d\tau + \int_0^\infty w_{i2}(\tau) R_{m_1 m_2}(t-\tau) d\tau + \dots \\ &\quad \dots + \int_0^\infty w_{im}(\tau) R_{m_1 m_m}(t-\tau) d\tau \\ R_{u_1 m_m}(\tau) &= \int_0^\infty w_{i1}(\tau) R_{m_1 m_m}(t-\tau) d\tau + \int_0^\infty w_{i2}(\tau) R_{m_2 m_m}(t-\tau) d\tau + \dots \\ &\quad \dots + \int_0^\infty w_{im}(\tau) R_{m_m m_m}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

który można zapisać w postaci zwartej

$$\sum_{j=1}^m R_{u_i m_j}(\tau) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \int_0^\infty w_{ij}(\tau) R_{m_k m_j}(t-\tau) d\tau \quad (46)$$

W celu wyznaczenia elementów macierzy charakterystyki impulsowej $w_{i1}(\tau)$, $w_{i2}(\tau)$, ..., $w_{im}(\tau)$ należy rozwiązać układ równań (45).

Analiza upraszcza się, jeżeli spośród $m-1$ sygnałów wejściowych wybierzemy składową spełniającą równanie (15). Rozwiązując odizolowane $n-1$ równań całkowych, otrzymamy $n-1$ charakterystyk impulsowych obiektu wielowymiarowego dla i -tego sygnału wyjściowego.

Wprowadzając wyznaczone funkcje $w_{ij}(t)$ / $j=1, m-1$ / do jednego z równań układu (45), w wyniku rozwiązywania otrzymamy charakterystykę impulsową $w_{im}(t)$. Pozostałe $n-1$ równań tego układu można wykorzystać w celu kontroli prawidłowości rozwiązania.

W przypadku jednego wyjścia otrzymamy macierz wierszową charakterystyki impulsowej

$$W(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)] \quad (47)$$

Jeżeli mamy n sygnałów wyjściowych, to budujemy układy równań (45) dla każdego $i=1, n$, które w zapisie macierzowym sprowadzają się do postaci

$$R_{\bar{u}\bar{m}}(\tau) = \int_0^t W(\tau) R_{\bar{m}\bar{m}}(t-\tau) d\tau \quad (48)$$

gdzie: $R_{\bar{u}\bar{m}}(\tau)$ - macierz korelacji wzajemnej wektorów $\bar{u}(t)$ oraz $\bar{m}(t)$,

$R_{\bar{m}\bar{m}}(\tau)$ - macierz korelacyjna pełna własna i wzajemna wektora $\bar{m}(t)$,

$W(\tau)$ - macierz charakterystyki impulsowej ($0 \leq \tau \leq t$).

Równanie (48) nosi nazwę równania całkowego wektorowo-macierzowego Wienera-Hopfa.

Macierz charakterystyki impulsowej obiektu wielowymiarowego spełnia warunek realizacji fizycznej

$$W(\tau) = \begin{cases} W(\tau); & \text{gdy } \tau > 0 \\ 0 & \text{; gdy } \tau < 0 \end{cases} \quad (49)$$

7.3.3.2. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej w dziedzinie obrazów

Stosując przekształcenie Fouriera do układu równań (45), otrzymamy jego obraz w dziedzinie częstotliwości

$$\left. \begin{aligned} S_{u,im_1}(\omega) &= W_{i1}(j\omega) S_{m_1,m_1}(\omega) + \dots + W_{im}(j\omega) S_{m_1,m_m}(\omega) \\ &\dots \dots \dots \\ S_{u,im_m}(\omega) &= W_{i1}(j\omega) S_{m_m,m_1}(\omega) + \dots + W_{im}(j\omega) S_{m_m,m_m}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Rozwiązując układ równań (50) względem $W_{i1}(j\omega), W_{i2}(j\omega), \dots, W_{im}(j\omega)$, otrzymamy

$$W_{ij}(j\omega) = \frac{\sum_{k=1}^m (-1)^{k+j} S_{u,im_k}(\omega) \Delta_{kj}}{\Delta} \quad ; j = \overline{1, m} \quad (51)$$

gdzie: Δ - wyznacznik układu równań (50),

$$\Delta = \begin{bmatrix} S_{m_1,m_1}(\omega) & \dots & S_{m_1,m_m}(\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ S_{m_m,m_1}(\omega) & \dots & S_{m_m,m_m}(\omega) \end{bmatrix} \quad (52)$$

Δ_{kj} - minor wyznacznika (52) otrzymany przez wykreślenie ktego wiersza jtej kolumny.

Stosując odwrotne przekształcenie Fouriera (35), otrzymamy wiersz macierzy charakterystyki impulsowej dla i -tego sygnału wyjściowego

$$W_i(t) = [W_{i1}(t), W_{i2}(t), \dots, W_{im}(t)] \quad (53)$$

Powtarzając rozwiązanie układu równań (50) dla $i = \overline{1, n}$, otrzymamy pozostałe wiersze macierzy charakterystyki impulsowej obiektu wielowymiarowego.

7.3.4. Wyznaczenie macierzy charakterystyki impulsowej przy użyciu macierzy korelacji własnej sygnału $\bar{\mu}(t)$

Elementy macierzy charakterystyki impulsowej można wyznaczyć w oparciu o obliczone macierze funkcji autokorelacyjnych sygnału wejściowego oraz sygnału wyjściowego.

Zgodnie z definicją, elementy macierzy funkcji autokorelacyjnej sygnału wyjściowego wyznacza się z zależności

$$R_{u;u_k}(\tau) = M\{\bar{u}_i(t) \bar{u}_k(t+\tau)\} \quad (54)$$

gdzie: $\bar{u}_i(t) = u_i(t) - m_{u_i}$

τ - przesunięcie czasowe jednego przekroju procesu stochastycznego względem drugiego,

t - czas bieżący.

Wykorzystując wzór (1), otrzymamy zależność pomiędzy składnikami macierzy funkcji korelacyjnej sygnału wyjściowego oraz sygnału wejściowego

$$R_{u;u_k}(\tau) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m (\bar{A}_+^{-1})_{ij} (\bar{A}_+^{-1})_{kl}^* R_{m;m_l}(\tau) \quad (55)$$

Wobec oznaczenia (5) równanie (55) przyjmie postać

$$R_{u;u_k}(\tau) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} w_{ij}(\tau_1) w_{kl}(\tau_2) R_{m;m_l}(\tau + \tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (56)$$

gdzie $i, k = \overline{1, n}$.

Równanie (56) słuszne jest dla pełnej korelacji w obszarze składowych wektora $\bar{m}(t)$ oraz $\bar{u}(t)$, a więc w macierzy funkcji korelacyjnych są składowe korelacji własnej i wzajemnej składowych tych wektorów.

Jeżeli brak jest korelacji wzajemnej pomiędzy składowymi wektora $\bar{u}(t)$, to we wzorze (56) $i=k$. Macierz funkcji korelacyjnej sygnału $\bar{u}(t)$ jest macierzą diagonalną. Wzór (56) przyjmie postać

$$R_{u;u_i}(\tau) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} w_{ij}(\tau_1) w_{il}(\tau_2) R_{m;m_l}(\tau + \tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (57)$$

gdzie $i = \overline{1, n}$.

Dla $j=l$ macierz funkcji korelacyjnej sygnału $\bar{m}(t)$ jest macierzą diagonalną i wzór (56) przyjmie najprostszą postać

$$R_{u;u_i}(\tau) = \left(\sum_{j=1}^m \right)^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} w_{ij}(\tau_1) w_{ij}(\tau_2) R_{m;m_j}(\tau + \tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (58)$$

gdzie $i=\overline{1,n}$.

W równaniach całkowych (56), (57) oraz (58) granice całkowania mogą być w przedziale zmian czasu $[0, \infty)$ lub $[0, t]$.

Jeżeli do obu stron równania (56) zastosujemy przekształcenie Fouriera proste, to otrzymamy obraz tego równania

$$S_{u_i u_k}(\omega) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \int_0^{\infty} W_{ij}(\tau_1) e^{-j\omega\tau_1} d\tau_1 \int_0^{\infty} W_{kl}(\tau_2) \cdot e^{-j\omega\tau_2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{m_j m_l}(\tau_1 + \tau_2 - \tau) e^{-j\omega(\tau_1 + \tau_2 - \tau)} d\tau \quad (59)$$

Wprowadzając oznaczenie obrazów fourierowskich funkcji stransformowanych, otrzymamy nową postać tego równania

$$S_{u_i u_k}(\omega) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m W_{ij}(j\omega) \overline{W_{kl}(j\omega)} S_{m_j m_l}(\omega) \quad (60)$$

gdzie $\overline{W_{kl}(j\omega)}$ jest charakterystyką częstotliwościową, sprzężoną dla k -tego wejścia oraz l -tego wyjścia.

Stosując przekształcenie Fouriera odwrotne do równania (60) oraz zakładając, że $\tau = 0$ i $i=k$, otrzymamy wzór określający dyspersję sygnału wyjściowego

$$D\eta_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} W_{ij}(j\omega) \overline{W_{il}(j\omega)} S_{m_j m_l}(\omega) d\omega \quad (61)$$

8. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE NIEUSTALONE WIELOWYMIAROWE O PARAMETRACH EKUPIONTCH, WYMUSZENIA ZDETERMINOWANE

8.1. Wstęp

Model obiektu dynamicznego wielowymiarowego nieustalonego można opisać równaniem stanu oraz równaniem wyjścia. Równania te mają postać standardową

$$\dot{\bar{r}}(t) = \bar{f}[\bar{r}(t), \bar{m}(t), t] \quad (1)$$

$$\bar{u}(t) = \bar{g}[\bar{r}(t), \bar{m}(t), t] \quad (2)$$

gdzie: $\bar{f}$ - funkcja wektorowa r wymiarowa,
 $\bar{g}$ - funkcja wektorowa n wymiarowa.

Do równań (1) oraz (2) należy dołączyć równanie warunków początkowych

$$\bar{r}(t_0) = \bar{r}_0 \quad (3)$$

Jeżeli wektor sygnałów wejściowych jest zerowy, tj.

$$\bar{m}(t) = 0 \quad (4)$$

to obiekt jest w ruchu swobodnym. Równanie stanu takiego obiektu ma postać

$$\dot{\bar{r}}(t) = \bar{f}[\bar{r}(t), t] \quad (5)$$

Rozwiązanie równania (4) jest określone jednoznacznie stanem początkowym $\bar{r}(t_0)$; tj.

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t; \bar{r}_0, t_0)] = \bar{f}[\Phi(t; \bar{r}_0, t_0); t] \quad (6)$$

$$\Phi(t_0; \bar{r}_0, t_0) = \bar{r}_0 \quad (7)$$

gdzie: $\Phi(t; \bar{r}_0, t_0)$ - macierz przejścia stanów obiektu,
 t - symbol oznaczający główny argument, względem którego rozwija się proces przejściowy.

Jeżeli $\bar{r}(t) = 0$, to równanie stanu równowagowego ma postać

$$\bar{f}(\bar{r}_e; t) = 0 \quad (8)$$

którą można zapisać inaczej

$$\bar{f}(t; \bar{r}_e, t_0) = \bar{r}_0 \quad ; t > t_0 \quad (9)$$

Obiekt dynamiczny wielowymiarowy jest liniowy, jeżeli funkcja wektorowa $\bar{f}$ jest liniową funkcją argumentów $(\bar{r}, \bar{m})$, tj.

$$\bar{f}[\alpha \bar{r}_1(t) + \beta \bar{r}_2(t), \alpha \bar{m}_1(t) + \beta \bar{m}_2(t)] = \alpha \bar{f}(\bar{r}_1(t), \bar{m}_1(t)) + \beta \bar{f}(\bar{r}_2(t), \bar{m}_2(t)) \quad (10)$$

Szczególnym przypadkiem równania stanu jest postać

$$\dot{\bar{r}}(t) = \bar{f}[\bar{r}(t), \bar{m}(t)] \quad (11)$$

która przy $\bar{m}(t) = 0$ opisuje obiekt dynamiczny wielowymiarowy liniowy autonomiczny.

8.2. Równanie stanu w postaci maciersowej

Dowolny obiekt dynamiczny wielowymiarowy nieustalony można opisać równaniem stanu oraz równaniem wielkości wyjściowych w postaci maciersowej

$$\dot{\bar{r}}(t) = A(t) \bar{r}(t) + B(t) \bar{m}(t) \quad (12)$$

$$\bar{u}(t) = C(t) \bar{r}(t) + D(t) \bar{m}(t) \quad (13)$$

gdzie: $\bar{r}(t)$ - wektor stanu r wymiarowy,

$\bar{m}(t)$ - wektor wielkości wejściowych m wymiarowy,

$\bar{u}(t)$ - wektor wielkości wyjściowych n wymiarowy,

$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ oraz $D(t)$ - macierze typu $r \times r$, $r \times m$, $n \times r$ oraz $n \times m$.

Ruch wymuszony obiektu wielowymiarowego nieustalonego opisany jest niejednorodnym równaniem stanu

$$\dot{\bar{r}}(t) = A(t) \bar{r}(t) + \bar{f}(t) \quad (14)$$

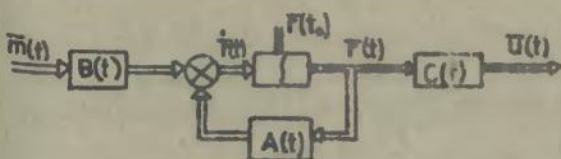
Gdzie $\bar{F}(t) = B(t) \bar{m}(t)$ jest wymiarem zewnętrzny.

W równaniu tym sygnałami wyjściowymi są zmienne stanu $x_i(t)$, $i=1, n$. Każdej zmiennej stanu $x_i(t)$ odpowiada sygnał wejściowy $f_i(t)$.

W przypadku ogólnym rząda, równanie stanu ma postać

$$\begin{aligned}\dot{\bar{F}}(t) &= A(t) \bar{F}(t) + B(t) \bar{m}(t) \\ \bar{U}(t) &= C(t) \bar{F}(t) \\ \bar{F}(t_0) &= \bar{F}_0\end{aligned}\quad (15)$$

Schemat blokowy układu równań (15) pokazano na rysunku 25.



Ruch swobodny obiektu wielowymiarowego niestabilnego opisany jest niejednorodnym równaniem stanu

$$\begin{aligned}\dot{\bar{F}}(t) &= A(t) \bar{F}(t) \\ \bar{F}(t_0) &= \bar{F}_0\end{aligned}\quad (16)$$

Rys. 25. Schemat blokowy układu równań (15)

Układ równań (12) oraz (13) można sprowadzić do

postaci prostszej, równoważnej. W tym celu należy zastosować przekształcenie zmiennej stanu

$$\bar{\xi}(t) = T^{-1}(t) \bar{F}(t) \quad (17)$$

Gdzie macierz $T(t)$ jest macierzą rzeczywistą nieosobliwą, ciągłą oraz ma macierz odwrotną ciągłą w dowolnym skończonym przedziale t .

Wobec przekształcenia (17) równania (12) oraz (13) przyjmą postać

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = [T^{-1}(t)A(t)T(t) - \dot{T}^{-1}(t)T(t)]\bar{\xi}(t) + T^{-1}(t)B(t)\bar{m}(t) \quad (18)$$

$$\bar{U}(t) = C(t)T(t)\bar{\xi}(t) + D(t)\bar{m}(t) \quad (19)$$

Równania te można uprościć, jeżeli wykorzystamy macierz fundamentalną $R_0(t)$, będącą rozwiązaniem równania jednorodnego (16).

Wprowadzając oznaczenie

$$T(t) = R_0(t) \quad (20)$$

do równania (17) otrzymamy nową jego postać

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = [R_0(t)]^{-1} \bar{F}(t) \quad (21)$$

Uwzględniając zależności (20) oraz (21) w równaniach (18) i (19), otrzymamy proste postacie tych równań, łatwiejsze do rozwiązania

$$\dot{\bar{x}}(t) = R_0^{-1}(t) B(t) \bar{m}(t) \quad (22)$$

$$\bar{u}(t) = C(t) R_0(t) \bar{x}(t) + D(t) \bar{m}(t) \quad (23)$$

Jeżeli macierz A jest okresowa z okresem T , tj.

$$A(t+T) = A(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (24)$$

to równania (12) oraz (13) opisują obiekty dynamiczne wielowymiarowe nieustalone o okresowych charakterystykach dynamicznych.

Szczególnym przypadkiem równań (12) oraz (13) są równania typu

$$\dot{\bar{r}}(t) = A(t) \bar{r}(t) + \bar{b}^*(t) \bar{m}(t) \quad (25)$$

$$\bar{u}(t) = \bar{c}(t) \bar{r}(t) + d(t) \bar{m}(t) \quad (26)$$

gdzie:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)} & -\frac{a_{n-2}(t)}{a_0(t)} & -\frac{a_{n-3}(t)}{a_0(t)} & \dots & -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\bar{c}(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \quad (28)$$

$$\bar{b}_i^*(t) = \frac{1}{a_n(t)} \left[b_i(t) - \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{n+k-i} C_{n-1}^{n+k-i} a_{i-j-k}(t) \frac{d^k b_j^*(t)}{dt^k} \right] \quad (29)$$

$$d(t) = b_0^*(t) \quad (30)$$

$$b_0^*(t) = \frac{b_0(t)}{a_0(t)} \quad (31)$$

Równania (25) oraz (26) stanowią zapis macierzowo-wektorowy równania n -tego rzędu obiektu niestabilnego jednowymiarowego

$$a_0(t) \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \dots + a_n(t) u(t) = b_0(t) \frac{d^m m(t)}{dt^m} + \dots + b_m(t) m(t) \quad (32)$$

Gdzie: $u(t)$ - sygnał wyjściowy skalarowy,
 $m(t)$ - sygnał wejściowy skalarowy.

Przejdźcie z zapisu równania (32) do postaci (25) oraz (26) dokonując się przez wprowadzenie oznaczeń

$$u(t) = r_1(t) \quad (33)$$

$$r_i(t) = u^{(i-1)}(t); i = \overline{1, n} \quad (34)$$

Pozwalających również na zapis równania n -tego rzędu w postaci układu n równań pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} \dot{r}_1(t) &= r_2(t) \\ \dot{r}_2(t) &= r_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{r}_{n-1}(t) &= r_n(t) \\ \dot{r}_n(t) &= -\frac{a_n(t)}{a_0(t)} r_1(t) - \dots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)} r_n(t) + \frac{f(t)}{a_0(t)} \end{aligned} \quad (35)$$

Gdzie $f(t)$ oznacza prawą stronę równania (32).

8.3. Rozwiązywanie równania jednorodnego

8.3.1. Macierz przejścia stanów

Równanie jednorodne (16) daje r rozwiązań w postaci

$$\bar{r}_i(t) = \text{col} [r_{1i}(t) \ r_{2i}(t) \ \dots \ r_{ri}(t)] \quad (36)$$

Wektor $\bar{r}_i(t)$ jest kolumną i -tą macierzy Wronskiego. Macierz ta jest zbiorem r wektorów $\bar{r}_i(t)$ oraz ma wymiar $rx1$. Zapisuje się ją w postaci

$$R_0(t) \equiv \begin{bmatrix} \bar{r}_1(t) & \bar{r}_2(t) & \dots & \bar{r}_r(t) \end{bmatrix} \quad (37)$$

lub w postaci

$$R_0(t) = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & \dots & r_{1r}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & \dots & r_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{r1}(t) & r_{r2}(t) & \dots & r_{rr}(t) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Jeżeli dla wszystkich wartości t w przedziale $-\infty < t < \infty$ macierz (38) jest różna od zera, tj.

$$\det(R_0(t)) \neq 0 \quad (39)$$

to funkcje (36) są liniowo niezależne. Jeżeli wektory $\bar{F}_i(t)$ są rozwiązaniami liniowo niezależnymi równania jednorodnego (16), to dowolne rozwiązanie można zapisać w postaci liniowej kombinacji rozwiązań, tj.

$$\bar{r}(t) = \sum_{i=1}^r c_i \bar{r}_i(t) \quad (40)$$

gdzie c_i są stałymi niezależnymi.

Układ r rozwiązań liniowo niezależnych (40) równania jednorodnego (16) bez określenia konkretnych warunków początkowych tworzy układ fundamentalnych rozwiązań, z których formuje się macierz Wronskiego.

Macierz Wronskiego (38) spełniająca warunek (39) nazywamy macierzą fundamentalną równania jednorodnego

$$\dot{R}_0(t) = A(t)R_0(t) \quad (41)$$

dla którego

$$R_0(t_0) = C \quad (42)$$

gdzie C jest macierzą stałą.

Analogicznie do obiektów wielowymiarowych ustalonych, rozwiązanie równania (41) można zapisać w postaci

$$R_0(t) = \Phi(t, t_0)C \quad (43)$$

gdzie $\Phi(t, t_0)$ jest macierzą przejścia stanów.

Dla $C = E$ macierz stanów jest macierzą charakterystyczną.

Łatwo można dojść do wniosku, że macierz przejścia $\Phi(t, t_0)$ daje się opisać zależnością

$$\Phi(t, t_0) = R_0(t)[R_0(t_0)]^{-1} \quad (44)$$

Dla obiektu wielowymiarowego nieustalonego swobodnego rozwiązanie równania jednorodnego ma postać

$$\vec{r}_0(t) = \Phi(t, t_0) \vec{r}_0(t_0) \quad (45)$$

Moment początkowy t_0 jest momentem dowolnie obranym i dla obiektów nieustalonych przyjmuje się równy momentowi startu funkcji γ . Stąd otrzymany

$$\Phi(t, \tau) = R_0(t) [R_0(\tau)]^{-1} \quad (46)$$

Znając macierz $\Phi(t, \tau)$ rozwiązanie równania jednorodnego z niezerowymi warunkami początkowymi można zapisać w postaci

$$\vec{r}(t) = \Phi(t, t_0) \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) \vec{m}(\tau) d\tau \quad (47)$$

Jeżeli $\vec{r}_0 = 0$, to rozwiązanie (47) przyjmie postać

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) \vec{m}(\tau) d\tau \quad (48)$$

Wyrażenie (48) nazywane jest całką superpozycji.

Ze wzorów (45), (47) oraz (48) wynika, że rozwiązanie równania stanu (12) dla dowolnych warunków początkowych oraz dowolnych wymuszeń zewnętrznych można wyznaczyć w oparciu o znane reakcje obiektu, ujęte w postaci macierzy przejścia stanów.

8.3.2. Własności macierzy przejścia stanów

Macierz przejścia stanów całkowicie charakteryzuje więź pomiędzy wektorem wielkości wejściowej oraz wektorem współrzędnych stanu.

Macierz $\Phi(t, \tau)$ ma następujące własności:

$$\Phi(t, \tau) = E ; t = \tau \quad (49)$$

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t, t_1) \Phi(t_1, \tau) \quad (50)$$

$$\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t) \quad (51)$$

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t) \Phi(t, \tau) \quad (52)$$

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau} = -\Phi(t, \tau) A(\tau) \quad (53)$$

$$\det[\Phi(t, \tau)] = \exp \left[\int_{\tau}^t \text{tr}(A(\tau)) d\tau \right] \quad (54)$$

gdzie $\text{tr } A(t)$ jest śladem macierzy, który określa się z zależności

$$\text{tr}(A(t)) = \sum_{i=1}^r a_{ii}(t) \quad (55)$$

Ze wzoru wynika, że ślad macierzy A jest równy sumie jej elementów diagonalnych.

Macierz przejścia stanów jest macierzą nieosobliwą. Własność ta wynika ze wzoru (44).

8.4. Macierz charakterystyki impulsowej

Jeżeli obiekt wielowymiarowy niestabilny opisany jest układem równań

$$\dot{\bar{r}}(t) = A(t)\bar{r}(t) + B(t)\bar{m}(t) \quad (56)$$

$$\bar{u}(t) = C(t)\bar{r}(t) \quad (57)$$

to zgodnie ze wzorem (47) odpowiedź obiektu na dowolne wymuszenie zewnętrzne określa się wzorem

$$\bar{u}(t) = C(t)\Phi(t, t_0)\bar{r}_0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)\bar{m}(\tau)d\tau \quad (58)$$

Gdy warunki początkowe są zerowe, wzór (58) przyjmie postać

$$\bar{u}(t) = \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)\bar{m}(\tau)d\tau \quad (59)$$

Dla obiektu wielowymiarowego, opisanego układem równań (12) oraz (13) odpowiedź obiektu na dowolne wymuszenie zewnętrzne wyznacza się ze wzoru

$$\bar{u}(t) = C(t)\Phi(t, t_0)\bar{r}_0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)\bar{m}(\tau)d\tau + D(t)\bar{m}(t) \quad (60)$$

Wykorzystując następującą własność δ -funkcji

$$f(t) = \int_{t_0}^t f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau; \quad t_0 \leq t \leq t \quad (61)$$

wzór (60) można zapisać w postaci

$$\bar{u}(t) = C(t)\phi(t, t_0)\bar{r}_0 + \int_{t_0}^t [C(t)\phi(t, \tau)B(\tau) + D(\tau)\delta(t-\tau)]\bar{m}(\tau) d\tau \quad (62)$$

Jeżeli na wejściu obiektu będącego w momentach $t \leq \tilde{t}$ w stanie zerowym $F(\tilde{t})=0$ wprowadzimy, w momencie $t=\tilde{t}^+$, wymuszenie impulsowe

$$\bar{m}(t) = N\delta(t-\tilde{t}) \quad (63)$$

Gdzie N jest macierzą jednostkową, to otrzymamy całkę superpozycji w postaci

$$\bar{u}(t) = \int_{t_0}^t [C(t)\phi(t, \tau)B(\tau) + D(\tau)\delta(t-\tau)]E\delta(t-\tau) d\tau \quad (64)$$

Wyrażenie ujęte nawiasem kwadratowym nazywane jest macierzą charakterystyki impulsowej

$$W(t, \tilde{t}) = C(t)\phi(t, \tilde{t})B(\tilde{t}) + D(\tilde{t})\delta(t-\tilde{t}) \quad (65)$$

Macierz ta jest współmierna funkcji Greena dla przypadku $t \geq \tilde{t}$.

Z iloczynu macierzy $C(t)$, $\phi(t, \tilde{t})$ oraz $B(\tilde{t})$ wynika, że macierz charakterystyki impulsowej ma wymiar $n \times m$

$$W(t, \tilde{t}) = \begin{bmatrix} w_{11}(t, \tilde{t}) & w_{12}(t, \tilde{t}) & \dots & w_{1m}(t, \tilde{t}) \\ w_{21}(t, \tilde{t}) & w_{22}(t, \tilde{t}) & \dots & w_{2m}(t, \tilde{t}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1}(t, \tilde{t}) & w_{n2}(t, \tilde{t}) & \dots & w_{nm}(t, \tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (66)$$

Gdzie $w_{ij}(t, \tilde{t})$ jest reakcja i -tego wyjścia obiektu na j -te wejście. Wobec powyższego, reakcja i -tego wyjścia obiektu na wszystkie m wejść jest równa sumie elementów i -tego wiersza macierzy (66)

Dowolny składnik macierzy (66) można określić z $W(t, \tilde{t})$ używając wyrażenia

$$w_{ij}(t, \tilde{t}) = \bar{s}_j^T W(t, \tilde{t}) \bar{s}_i \quad (67)$$

Gdzie: $\bar{s}_k (k=i, j)$ - powierzchnia δ -funkcji,

i - i -ta wyjście,

j - j -te wejście.

Wykorzystując własność δ -funkcji wzór (60), można zapisać w postaci

$$\bar{u}(t) = \int_{t_0}^t W(t, \tau) [\bar{m}_e(\tau) + \bar{m}(\tau)] d\tau \quad (68)$$

gdzie

$$\bar{m}_e(t) = N \delta(t - t_0) \quad (69)$$

Wektor $\bar{m}_e(t)$ oznacza dodatkowy wektor sygnału wejściowego, równoważny warunkom początkowym $\bar{F}(t_0)$.

Macierz charakterystyki impulsowej można wyrazić przez macierz przejścia stanów $\Phi(t, \tau)$. Tak dla obiektu opisanego układem równań (54) oraz (55) otrzymamy zależność

$$W(t, \tau) = C(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) \quad (70)$$

Z zależności (70) wynika wniosek, że synteza modelu obiektu w oparciu o macierz charakterystyki impulsowej sprowadza się do wyznaczenia współczynników układu równań (56) oraz (57), a więc sprowadza się do określenia macierzy $A(t)$, $B(t)$ i $C(t)$. Jednak problem komplikuje się, ponieważ realizacja macierzy $W(t, \tau)$ nie jest jednoznaczna. Model obiektu nadający się do obliczeń praktycznych powinien mieć najmniejszą macierz charakterystyki impulsowej. Innymi słowy, wektor stanu powinien mieć wymiar najmniejszy.

Jeżeli macierz charakterystyki impulsowej $W(t, \tau)$ o wymiarze $n \times n$ dopuszcza strukturę separacyjną, to można macierz tę rozłożyć na dwie macierze funkcjonalne

$$W(t, \tau) = \Phi(t) \Psi(\tau) \quad (71)$$

gdzie: $\Phi(t)$ - macierz o wymiarze $n \times k$,

$\Psi(\tau)$ - macierz o wymiarze $k \times m$.

Jeżeli rozpatrujemy całkę

$$\bar{u}(t) = \int_{-\infty}^t C(t) R_o(t) [R_o(\tau)]^{-1} B(\tau) \bar{m}(\tau) d\tau \quad (72)$$

to

$$\Phi(t) = C(t) R_o(t) \quad (73)$$

$$\Psi(\tau) = [R_o(\tau)]^{-1} B(\tau) \quad (74)$$

Biorąc pod uwagę wzór (44) można macierze $\Phi(t)$ i $\Psi(\tau)$ wyrazić przez macierz przejścia stanów. Otrzymamy inną postać wzorów (73) oraz (74)

$$\Phi(t) = C(t) \Phi(t, t_0); \quad t \geq t_0 \quad (75)$$

$$\Psi(\tau) = \Phi(t_0, \tau) B(\tau); t_0 \geq \tau \quad (76)$$

8.5. Równanie stanu sprzężone

Równanie stanu sprzężone otrzymuje się przez transpozycję macierzy równania normalnego.

Równanie jednorodne (16) ma równanie sprzężone w postaci

$$\dot{\bar{r}}^*(t) = -A^T(t) \bar{r}^*(t) \quad (77)$$

gdzie: $\bar{r}^*(t)$ - wektor stanu równania sprzężonego,

$A^T(t)$ - macierz transponowana.

Równanie (77) ma r rozwiązań w postaci

$$\bar{r}_i^*(t) = \begin{bmatrix} r_{1i}^*(t) \\ r_{2i}^*(t) \\ \vdots \\ r_{ri}^*(t) \end{bmatrix}; i = \overline{1, r} \quad (78)$$

Jeżeli warunki początkowe $\bar{r}_i^*(t_0) = \bar{r}_{i0}^*$ są określone, to równanie (77) ma jedno rozwiązanie.

Macierz fundamentalna Wrońskiego równania sprzężonego (77)

$$R_0^*(t) = [\bar{r}_1^*(t), \bar{r}_2^*(t), \dots, \bar{r}_r^*(t)] \quad (79)$$

Do transpozycji daje nową macierz w postaci

$$K_0^*(t) \equiv R_0^{*T}(t) \quad (80)$$

Zgodnie ze wzorem (46) otrzymamy

$$\Phi^*(t, \tau) = [K_0^*(t)]^{-1} K_0^*(\tau) \quad (81)$$

Porównując wzory (46) i (81) oraz biorąc pod uwagę wzór (51), dochodzimy do wniosku, że

$$\Phi^*(t, \tau) = [\Phi^{-1}(t, \tau)]^T = \Phi^T(\tau, t) \quad (82)$$

Z równania (82) wynika, że wielkością określającą proces przejściowy obiektu wielowymiarowego nieustalonego jest iloczyn $R_0(t)[R_0(\tau)]^{-1}$ lub iloczyn $[K_0^*(t)]^{-1} K_0^*(\tau)$.

Transpozycja równania (51) daje nowe równanie

$$\frac{\partial \Phi^*(t, \tau)}{\partial t} = A^*(t) \Phi^*(t, \tau) \quad (83)$$

które wobec zależności (82) można zapisać w innych postaciach równań

$$-\frac{\partial [\Phi^*(t, \tau)]^T}{\partial t} = A^T(t) [\Phi^*(t, \tau)]^T \quad (84)$$

$$\frac{\partial \Phi^T(\tau, t)}{\partial t} = -A^T(t) \Phi^T(\tau, t) \quad (85)$$

$$\frac{\partial \Phi^*(t, \tau)}{\partial t} = -A^T(t) \Phi^*(t, \tau) \quad (86)$$

$$-\frac{\partial \Phi^T(t, \tau)}{\partial \tau} = \Phi^T(t, \tau) A^T(\tau) \quad (87)$$

Układ równań

$$\dot{\bar{r}}(t) = A(t) \bar{r}(t) + B(t) \bar{m}(t) \quad (88)$$

$$u(t) = C(t) \bar{r}(t) \quad (89)$$

ma układ równań sprzężonych

$$\dot{\bar{r}}^*(t) = A^*(t) \bar{r}^*(t) + B^*(t) \bar{m}^*(t) \quad (90)$$

$$\bar{u}^*(t) = C^*(t) \bar{r}^*(t) \quad (91)$$

jeżeli spełniona jest zależność (82) oraz warunek

$$W^*(t, \tau) = -W^T(\tau, t) \quad (92)$$

Z porównania równań (83) oraz (86) wynika zależność

$$A^*(t) = -A^T(t) \quad (93)$$

Z warunku (93) oraz wzoru (70) otrzymamy następujące relacje

$$B^*(t) = \pm C^T(t) \quad (94)$$

$$C^*(t) = \mp B^T(t) \quad (95)$$

Wykorzystując zależności (93), (94) oraz (95) układ równań (90) i (91) można przekształcić do postaci

$$\dot{\bar{r}}^*(t) = -A^T(t)\bar{r}^*(t) \pm C^T(t)\bar{m}^*(t) \quad (96)$$

$$\bar{u}^*(t) = \mp B^T(t)\bar{r}^*(t) \quad (97)$$

Dla obiektu fizycznie realizowalnego macierz charakterystyki impulsowej spełnia warunek

$$W(t, \tau) = \begin{cases} W(t, \tau) & ; t \geq \tau \\ 0 & ; t < \tau \end{cases} \quad (98)$$

Macierz charakterystyki impulsowej układu równań sprzężonych określona jest w obszarze niemożliwości realizacji fizycznej obiektu. Obszar określenia macierzy $W^*(t, \tau)$ otrzymuje się przez zamianę miejscami w zależności (98) argumentów t oraz τ . Wykonując taką operację otrzymamy

$$W^*(t, \tau) = \begin{cases} W^*(t, \tau) & ; \tau \geq t \\ 0 & ; \tau < t \end{cases} \quad (98a)$$

Obiektu o takiej charakterystyce impulsowej nie można bezpośrednio modelować.

Ponieważ układ równań sprzężonych ma za cel wyjaśnienie zmian macierzy charakterystyki impulsowej $W(t, \tau)$, wraz ze zmianą dla pewnych ustalonych wartości $t=t_u$, to przy przejściu na macierz $W^*(t, \tau)$ należy zmienić t na $-t$ oraz τ na $-\tau$. Wykonując taką operację otrzymamy określenie macierzy W^* w obszarze realizacji fizycznej obiektu

$$W^*(-t, -\tau) = \begin{cases} W^*(-t, -\tau) & ; \tau \leq t \\ 0 & ; \tau > t \end{cases} \quad (99)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\Phi_d(t, \tau) = [\Phi^T(-t, -\tau)]^T \quad (100)$$

$$W_d(t, \tau) = W^T(-\tau, -t) \quad (101)$$

$$A_d(t) = A^T(-t) \quad (102)$$

$$B_d(t) = C^T(-t) \quad (103)$$

$$C_d(t) = B^T(-t) \quad (104)$$

do układu równań (88) oraz (89) otrzymamy układ równań dualnych

$$\dot{\bar{r}}_d(t) = A^T(-t) \bar{r}_d(t) + C^T(-t) \bar{m}_d(t) \quad (105)$$

$$\bar{u}_d(t) = B^T(-t) \bar{r}_d(t) \quad (106)$$

Jeżeli rozpatrzmy równanie ruchu wymuszonego z wymuszeniem zewnętrzным w postaci δ -funkcji jednostkowej

$$B(t) \bar{m}(t) = E \delta(t - \tau) \quad (107)$$

to równanie (85) przyjmie postać

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi^T(\tau, t) = A^T(t) \Phi^T(\tau, t) + E \delta(t - \tau) \quad (108)$$

Przy $\bar{r}(t) = \bar{u}(t)$ iloczyn macierzy $A^T(t)$ oraz $\Phi^T(\tau, t)$ daje macierz charakterystyki impulsowej

$$W^T(\tau, t) = A^T(t) \Phi^T(\tau, t) \quad (109)$$

Wprowadzając do równań (108) oraz (109) oznaczenie $\tau = t_u - t$, otrzymamy układ inwersyjny równań

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_*^T(t_u, \tau) = A^T(t_u - \tau) \Phi_*^T(t_u, \tau) + \delta(\tau) \quad (110)$$

$$W_{*}^T(t_u, \tau) = A^T(t_u - \tau) \Phi_{*}^T(t_u, \tau) \quad (111)$$

gdzie:

$$\Phi_{*}^T(\tau, t) \rightarrow \varphi_{ji}(\tau, t) = \varphi_{ji}^{*}(\tau, t) \quad (112)$$

$$W_{*}^T(\tau, t) \rightarrow w_{ji}(\tau, t) = w_{ji}^{*}(\tau, t) \quad (113)$$

$$w_{ji}(\tau, t) = \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} \frac{\partial^i}{\partial t^i} W(\tau, t) \quad (114)$$

8.6. Sterowalność, obserwowalność oraz stabilność obiektu wielowymiarowego niustalonego

W zagadnieniach regulacji obiektów wielowymiarowych zachodzi potrzeba określenia warunków pełnego wystereowania pracy obiektu. Realizuje się to przez określenie takiego oddziaływania $\bar{m}(t)$, które przy $t > t_0$ sprowadza obiekt ze stanu $\bar{r}(t_0)$ w stan $\bar{r}(t) = 0$.

Jeżeli znana jest funkcja przejścia stanów $\Phi(t, t_0)$ o wymiarze $r \times r$, to zgodnie z powyższym określeniem mamy

$$\bar{r}(t_0) = - \left[\int_{t_0}^t \Phi(t_0, \vartheta) A(\vartheta) A^T(\vartheta) \Phi^T(t_0, \vartheta) d\vartheta \right] \bar{r}_2(t_0) \quad (115)$$

gdzie: $\bar{m}(t) = A^T(t) \Phi^T(t_0, t) \bar{r}_2(t_0)$ - wektor sterowania,
 $\bar{r}_2(t_0)$ - wektor warunków początkowych określony w przestrzeni stanu obiektu.

Wprowadzając oznaczenie

$$S(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \vartheta) A(\vartheta) A^T(\vartheta) \Phi^T(t_0, \vartheta) d\vartheta \quad (116)$$

otrzymamy zależność

$$\bar{r}(t_0) = -S(t_0, t) \bar{r}_2(t_0) \quad (117)$$

Warunek (117) jest spełniony, tj. obiekt jest wystereowany całkowicie, jeżeli przekształcenie liniowe $S(t_0, t)$ ma rząd równy r . Oznacza to, że r wierszy macierzy $\Phi(t_0, \vartheta) A(\vartheta)$ powinno być liniowo niezależnych.

Obiekt wielowymiarowy niestabilny jest całkowicie obserwowalny w momencie t , jeżeli istnieje takie przekształcenie liniowe, które jednoznacznie określa stan $\bar{r}(t_0)$ w oparciu o wektor sygnałów wyjściowych $\bar{u}(t)$.

Wychodząc ze wzoru

$$\bar{r}^*(t) = \int_t^{t_0} \Phi^T(\vartheta, t_0) C^T(\vartheta) \bar{m}(\vartheta) d\vartheta \quad (118)$$

określającego wektor stanu $\bar{r}^*(t)$ układu równań sprzężonych (90) oraz (91) otrzymamy zależność

$$\bar{u}(t) = \left[\int_t^{t_0} \Phi^T(\vartheta, t_0) C^T(\vartheta) C(\vartheta) \Phi(\vartheta, t_0) d\vartheta \right] \bar{r}(t_0) \quad (119)$$

gdzie $\bar{m}(t) = C(t) \Phi(t, t_0) \bar{r}(t_0)$ jest wektorem sygnałów wejściowych.

Wprowadzając oznaczenie

$$O(t, t_0) = \int_t^{t_0} \Phi^T(\vartheta, t_0) C^T(\vartheta) C(\vartheta) \Phi(\vartheta, t_0) d\vartheta \quad (120)$$

otrzymamy zależność

$$\bar{u}(t) = O(t, t_0) \bar{r}(t_0) \quad (121)$$

Warunek (121) oznacza, że obiekt dynamiczny wielowymiarowy niestabilny jest całkowicie obserwowalny, jeżeli przekształcenie liniowe (121) ma rząd równy r . Oznacza to, że r wierszy macierzy $O(t, t_0)$ jest liniowo niezależnych.

Obiekt wielowymiarowy, którego model matematyczny opisany jest układem równań (88) oraz (89) jest stabilny, jeżeli spełniony jest warunek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\bar{u}(t) - \int_{t_0}^t W(t, \tau) \bar{m}(\tau) d\tau \right] = 0 \quad (122)$$

Jeżeli rozpatrujemy skończony przedział czasu $[t_0, t_0 + T]$, to obiekt wielowymiarowy jest stabilny w tym przedziale, gdy spełniona jest nierówność

$$\bar{r}^T(t_0) \bar{r}(t_0) \leq \varepsilon \quad (123)$$

Zależność tę można łatwo przenieść na wektor sygnałów wyjściowych. W tym celu wystarczy wykorzystać równanie wyjścia (15) i utworzyć iloczyn

$$\bar{u}^T(t) \bar{u}(t) = \bar{r}^T(t) C^T(t) C(t) \bar{r}(t) \quad (124)$$

Wobec symetryczności macierzy $C^T(t)C(t)$ otrzymamy nierówność

$$\bar{U}^T(t)\bar{U}(t) \leq \varphi_{\max}(t)C \quad (125)$$

gdzie: $\varphi_{\max}(t)$ - maksymalna wartość własna macierzy $C^T(t)C(t)$,
 C - ograniczenie.

Dobierając wartości wielkości ξ , C oraz T można wyróżnić dwa przypadki:

- obiekt wielowymiarowy jest stabilny w skończonym przedziale czasu, lecz niestabilny przy $t \rightarrow \infty$,
- obiekt wielowymiarowy jest niestabilny w skończonym przedziale czasu, lecz stabilny przy $t \rightarrow \infty$.

8.7. Struktura kanoniczna Kalmana

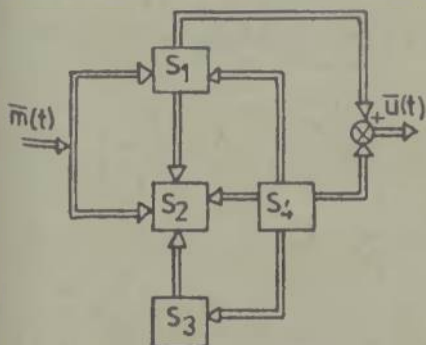
Nie wszystkie zmienne stanu mogą być sterowane / zmienna stanu $x_i(t)$ jest całkowicie sterowalna w przedziale $[t_0, t_u]$, jeżeli istnieje wielkość $\bar{m}(t)$ prowadząca stan $x_i(t_0)$ do stanu $x_i(t)$ / oraz podatna do obserwacji / zmienna stanu x_i jest całkowicie obserwowalna w przedziale $[t_0, t_u]$, jeżeli zmiana wielkości $x_i(t)$ zawsze wywołuje zmianę wielkości $\bar{u}(t)$ /. W celu uwidocznienia różnorodności zmiennych stanu, wektor stanu $\bar{x}(t)$ rozkłada się na cztery grupy wektorów

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ \bar{x}_4(t) \end{bmatrix} \quad (126)$$

gdzie: $\bar{x}_1(t)$ - wektor zmiennych stanu sterowalnych, lecz nie podlegających obserwacji,

$\bar{x}_2(t)$ - wektor zmiennych stanu sterowalnych podlegających obserwacji,

$\bar{x}_3(t)$ - wektor zmiennych stanu nie dających się ani sterować, ani obserwować,



Rys. 26. Schemat strukturalny

$\bar{x}_a(t)$ - wektor zmiennych stanu podlegających obserwacji, lecz nie dających się sterować.

Model obiektu z wektorami stanu (126) przedstawiono w postaci schematu strukturalnego na rysunku 26. Schematowi temu odpowiada równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{r}}_1(t) \\ \dot{\bar{r}}_2(t) \\ \dot{\bar{r}}_3(t) \\ \dot{\bar{r}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{13}(t) & A_{14}(t) \\ 0 & 0 & A_{24}(t) \\ 0 & A_{33}(t) & A_{34}(t) \\ 0 & 0 & A_{44}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_1(t) \\ \bar{r}_2(t) \\ \bar{r}_3(t) \\ \bar{r}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{m}(t) \quad (127)$$

$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & C_2(t) & 0 & C_4(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_1(t) \\ \bar{r}_2(t) \\ \bar{r}_3(t) \\ \bar{r}_4(t) \end{bmatrix} \quad (128)$$

8.8. Macierz charakterystyki impulsowej dla elementarnych połączeń schematów blokowych

Wektory sygnałów wyjściowych $\bar{u}(t)$ oraz sygnałów wejściowych $\bar{m}(t)$ powiązane są ze sobą zależnością

$$\bar{u}(t) = \int_{t_0}^t W(t, \tau) \bar{m}(\tau) d\tau \quad (129)$$

Jeżeli wektor $\bar{m}(t)$ określony jest zależnością (63), to ze wzoru (129) wynikają zależności określające macierz charakterystyki impulsowej dla:

- połączenia szeregowego

$$W_Z(t, \tau) = \int_{t_0}^t W_2(t, \tau_1) d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} W_1(\tau_1, \tau_2) N \delta(\tau_2 - \tau) d\tau_2 \quad (130)$$

- połączenia równoległego

$$W_Z(t, \tau) = \int_{t_0}^t [W_1(t, \tau) + W_2(t, \tau)] N \delta(t - \tau) d\tau \quad (131)$$

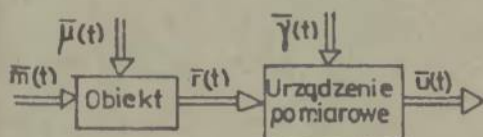
- pętli sprzężenia zwrotnego

$$W_Z(t, \tau) = W_1(t, \tau) - \int_{\tau}^t W_1(t, \tau_1) d\tau_1 \int_{\tau}^{\tau_1} W_2(\tau_1, \tau_2) W_Z(\tau_2, \tau) d\tau_2 \quad (132)$$

9. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE NIEUSTALONE WIRLOWYMIAROWE O PARAMETRACH SKUPIONYCH. WYMUSZENIA STOCHASTYCZNE

9.1. Układ równań modelu obiektu dynamicznego

Każdy proces fizyczny rozwijający się w czasie można traktować jako proces stochastyczny. Rozpatrując obiekt dynamiczny jako układ składający się z obiektu fizycznego oraz urządzenia pomiarowego można wyróżnić dwa rodzaje oddziaływań przypadkowych / rysunek 27 /:



Rys. 27. Oddziaływania przypadkowe otoczenia na obiekt dynamiczny

- oddziaływanie przypadkowe otoczenia na proces przebiegający w obiekcie/ wektor przypadkowy $\bar{\mu}(t)$ /,
- oddziaływanie przypadkowe otoczenia na proces przetwarzania zmiennych stanu w wielkości wyjściowej/wektor przypadkowy $\bar{\gamma}(t)$ /.

Jeżeli model obiektu dynamicznego dla wymuszeń zdeterminowanych opisany jest układem równań wektorowo-macierzowych

$$\dot{\bar{r}}(t) = A(t)\bar{r}(t) + B(t)\bar{m}(t) \quad (1)$$

$$\bar{u}(t) = C(t)\bar{r}(t) \quad (2)$$

to dla wymuszeń przypadkowych bez oddziaływań zdeterminowanych układ tych równań przyjął postać

$$\dot{\bar{\phi}}(t) = A(t)\bar{\phi}(t) + B(t)\bar{\mu}(t) \quad (3)$$

$$\bar{\zeta}(t) = C(t)\bar{\phi}(t) + \bar{\gamma}(t) \quad (4)$$

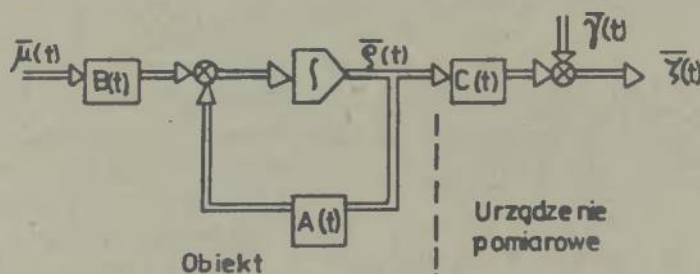
gdzie: $\bar{\phi}(t)$ - wektor zmiennych stanu o wymiarze rx^1 ,

$\bar{\zeta}(t)$ - wektor wielkości wyjściowych o wymiarze nx^1 ,

$\bar{\mu}(t), \bar{\gamma}(t)$ - wektory oddziaływań przypadkowych,

- $A(t)$ - macierz o wymiarze $n \times n$ charakteryzująca parametry obiektu,
 $B(t)$ - macierz o wymiarze $n \times m$ przekształcająca sygnały wejściowe,
 $C(t)$ - macierz o wymiarze $n \times r$ charakteryzująca parametry urządzenia pomiarowego.

Schemat strukturalny układu równań (3) oraz (4) pokazano na rysunku 28.



Rys. 28. Schemat strukturalny układu równań (3) oraz (4)

Zbiór wektorów $\bar{y}(t)$ określonych sumą

$$\bar{y}(t) = \bar{\eta}(t) + \bar{y}(t) \quad (5)$$

tworzy podprzestrzeń liniową przestrzeni stanów. Wektor stanu $\bar{x}(t)$ jest procesem stochastycznym. Wektory $\bar{\mu}(t)$ oraz $\bar{y}(t)$ są procesami stochastycznymi Gaussa typu szumu białego.

Jeżeli macierz $C(t)$ jest macierzą jednostkową, to sygnał wyjściowy jest sumą procesu stochastycznego $\bar{x}(t)$ oraz szumu białego $\bar{y}(t)$

$$\bar{y}(t) = \bar{x}(t) + \bar{y}(t) \quad (6)$$

W przypadku ogólnym wektory $\bar{\mu}(t)$ oraz $\bar{y}(t)$ można zapisać w postaci

$$\bar{\mu}(t) = f(\bar{m}^*(t), \bar{v}(t)) \quad (7)$$

$$\bar{y}(t) = f(\bar{v}^*(t), \bar{v}(t)) \quad (8)$$

gdzie: $\bar{m}(t)$ - wektor wymuszeń zdeterminowanych,

$\bar{v}(t)$ - wektor zakłóceń,

$\bar{v}^*(t)$ - wektor sygnału użytecznego.

W praktyce zależności (7) oraz (8) stanowią kombinację addytywną, multiplikacyjną lub multiplikacyjno-addytywną sygnałów

$$\bar{\mu}(t) = \bar{v}^*(t) + \bar{v}(t) \quad (9)$$

$$\bar{\mu}(t) = \bar{v}^*(t) \bar{\chi}(t) \quad (10)$$

$$\bar{\mu}(t) = \bar{v}^*(t) \bar{\chi}(t) + \bar{v}(t) \quad (11)$$

gdzie $\bar{\chi}(t)$ jest zakłóceniem multiplikacyjnym.

Wektor sygnału użytecznego stochastycznego jest sumą części regularnej oraz nieregularnej

$$\bar{v}^*(t) = \bar{v}_0(t) + \overset{\circ}{v}^*(t) \quad (12)$$

gdzie: $\overset{\circ}{v}^*(t)$ - funkcja przypadkowa o zerowej nadziei matematycznej,
 $\bar{v}_0(t)$ - funkcja nieprzypadkowa czasu.

W przypadku ogólnym część regularna sygnału $\bar{v}^*(t)$ jest funkcją nieliniową czasu oraz wektora parametru przypadkowego, którą w postaci liniowej można zapisać jako funkcję

$$\bar{v}_0(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \quad (13)$$

gdzie: $f_i(t)$ - funkcja nieprzypadkowa czasu,
 c_i - wielkości przypadkowe $i=1, n$.

Macierz $A(t)$ oraz $B(t)$ są zdeterminowane. W przypadku gdy stan obiektu dynamicznego obarczony jest szumem parametrycznym, to równanie stanu (3) przyjmie postać

$$\dot{\bar{x}}(t) = [A(t) + V(t)] \bar{x}(t) + \bar{n}(t) \quad (14)$$

gdzie: $V(t)$ - macierz szumów parametrycznych o wymiarze $r \times r$,
 $\bar{n}(t)$ - wektor szumów addytywnych.

W obliczeniach praktycznych zakłada się, że szumy addytywne oraz parametryczne są procesami stochastycznymi korelowalnymi typu szumu białego o zerowej nadziei matematycznej. Zakłada się również, że procesy te tworzone są przez skończone zbiory realizacji /zbiory funkcji przypadkowych/.

9.2. Macierz korelacyjna

Jeżeli zbiór funkcji przypadkowych tworzących proces stochastyczny jest skończony, to można go opisać z wymiarową funkcją rozkładu prawdopodobieństwa. Praktycznie wygodniej jest korzystać z charakterystyk bardziej swartych. Są to: moment początkowy pierwszego rzędu oraz moment centralny drugiego rzędu, tj. nadzieja matematyczna oraz macierz funkcji korelacyjnej.

Macierz korelacyjną wektora współrzędnych stanu /lub innych wektorów przypadkowych/ określa się ze wzoru

$$R_{rr}(t, \tau) = M \left\{ \vec{\xi}(t) \vec{\xi}^T(\tau) \right\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(t) \vec{f}^T(\tau) w_2(\vec{r}(t), t, \vec{r}(\tau), \tau) d\vec{r}(t) d\vec{r}(\tau) \quad (15)$$

gdzie: $\vec{f}(t)$, $\vec{f}(\tau)$ - wektory realizacji scentrowanych wektora przypadkowego współrzędnych stanu określone w momentach t oraz τ ,

$w_2(\vec{r}(t), t, \vec{r}(\tau), \tau)$ - dwuwymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa,

$\vec{\xi}(t)$ - scentrowany wektor przypadkowy współrzędnych stanu.

Macierz funkcji korelacyjnej można obliczyć ze wzoru (15) wówczas, jeżeli znany gęstość rozkładu prawdopodobieństwa. Wektor $\vec{r}(t)$ jest wielowymiarowym procesem Markowa, dla którego funkcję $w(\vec{r}(t), t, \vec{r}(\tau), \tau)$ można przedstawić w postaci iloczynu

$$w_2(\vec{r}(t), t, \vec{r}(\tau), \tau) = w(\vec{r}(\tau), \tau) w(\vec{r}(t), t | \vec{r}(\tau), \tau) \quad (16)$$

gdzie: $w(\vec{r}(\tau), \tau)$ - jednowymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa,

$w(\vec{r}(t), t | \vec{r}(\tau), \tau)$ - warunkowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa, tj. gęstość prawdopodobieństwa przejścia ze stanu $\vec{r}(\tau)$ w stan $\vec{r}(t)$.

Wprowadzając wyrażenie (16) do wzoru (15), otrzymamy równanie

$$R_{rr}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(t) w(\vec{r}(t), t | \vec{r}(\tau), \tau) d\vec{r}(t) \right] \vec{f}^T(\tau) w(\vec{r}(\tau), \tau) d\vec{r}(\tau) \quad (17)$$

Całka wewnętrzna określa warunkową nadzieję matematyczną wektora $\vec{\xi}(t)$ przy ustalonej wartości tego wektora

$$\bar{m}_{\vec{f}(t)}(\tau) = M \left\{ \vec{\xi}(t) | \vec{r}(\tau) \right\} \quad (18)$$

Zakładając w równaniu (3) $\bar{\mu}(t) = 0$ oraz wykonując obustronnie operację uśrednienia statystycznego $M\{\}$, otrzymamy równanie

$$\dot{\bar{m}}_{\bar{r}}(t) = A(t) \bar{m}_{\bar{r}}(t) \quad (19)$$

$$\bar{m}_{\bar{r}}(t) = \bar{r}(t) \quad (20)$$

którego rozwiązaniem jest nadzieja matematyczna

$$\bar{m}_{\bar{r}}(t) = \Phi(t, \tau) \bar{r}(\tau) \quad (21)$$

Gdzie $\Phi(t, \tau)$ jest macierzą funkcji wagowej / macierz przejścia stanów / równania ruchu swobodnego obiektu. Funkcja ta spełnia równanie

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = A(t) \Phi(t, \tau) + E \delta(t - \tau) \quad (22)$$

$$\Phi(\tau, \tau) = 0 \quad (23)$$

Gdzie E jest macierzą intensywności szumu białego /macierz jednostkowa/.

Zamieniając zerowe warunki początkowe (23) na równoważne warunki początkowe niezerowe otrzymamy równanie jednorodne

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = A(t) \Phi(t, \tau) \quad (24)$$

$$\Phi(\tau, \tau) = E \quad (25)$$

którego rozwiązaniem dla $t > \tau$ jest funkcja $\Phi(t, \tau)$

$$\Phi(t, \tau) = 1(t - \tau) \Phi(t, \tau) \quad (26)$$

Uwzględniając w równaniu (17) zależności (21) oraz (26) otrzymamy nową postać tego równania

$$R_{\bar{r}\bar{r}}(t, \tau) = 1(t - \tau) \Phi(t, \tau) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{r}(\tau) \bar{r}^T(\tau) w(\bar{r}(\tau), \tau) d\bar{r}(\tau) \quad (27)$$

Całka w tym równaniu jest równa macierzy funkcji korelacyjnej

wektora $\vec{q}(t)$ dla momentu

$$R_{FF}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{q}(t) \vec{q}^T(t) W(F(t), t) dF(t) \quad (28)$$

Wprowadzając oznaczenie całki (28) do równania (27), otrzymamy macierz bieżącej funkcji korelacyjnej wektora stanu o postaci

$$R_{FF}(t, \tau) = 1(t - \tau) \Phi(t, \tau) R_{FF}(\tau) \quad (29)$$

Wzór (29) jest słuszny tylko w obszarze $t > \tau$. W obszarze $t < \tau$ macierz $R_{FF}(t, \tau)$ jest macierzą zerową.

W celu określenia macierzy bieżącej funkcji korelacyjnej w obszarze $t < \tau$ należy wykonać transpozycję wyrażenia (29). Otrzymamy macierz funkcji korelacyjnej bieżącej słusznej tylko w obszarze t

$$R_{FF}^T(\tau, t) = 1(\tau - t) R_{FF}(\tau) \Phi^T(\tau, t) \quad (30)$$

Sumując wyrażenia (29) oraz (30) otrzymamy

$$R_{FF}(t, \tau) = 1(t - \tau) \Phi(t, \tau) R_{FF}(\tau) + 1(\tau - t) R_{FF}(\tau) \Phi^T(\tau, t) \quad (31)$$

Wzór (31) spełnia warunek symetryczności macierzy funkcji autokorelacyjnej wektora $\vec{q}(t)$

$$R_{FF}(t, \tau) = R_{FF}^T(\tau, t) \quad (32)$$

Zapisując wzór definicyjny (15) w postaci

$$M \{ \vec{q}(t) \vec{q}^T(\tau) \} = M \left\{ \begin{bmatrix} \vec{q}_1(t) \\ \vdots \\ \vec{q}_r(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_1(\tau) & \dots & \vec{q}_r(\tau) \end{bmatrix} \right\} \quad (33)$$

oraz wykonując operacje mnożenia i uśrednienia statystycznego, otrzymamy jego nową postać

$$M \{ \vec{q}(t) \vec{q}^T(\tau) \} = \begin{bmatrix} M \{ \vec{q}_1(t) \vec{q}_1(\tau) \} & M \{ \vec{q}_1(t) \vec{q}_2(\tau) \} & \dots & M \{ \vec{q}_1(t) \vec{q}_r(\tau) \} \\ M \{ \vec{q}_2(t) \vec{q}_1(\tau) \} & M \{ \vec{q}_2(t) \vec{q}_2(\tau) \} & \dots & M \{ \vec{q}_2(t) \vec{q}_r(\tau) \} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M \{ \vec{q}_r(t) \vec{q}_1(\tau) \} & M \{ \vec{q}_r(t) \vec{q}_2(\tau) \} & \dots & M \{ \vec{q}_r(t) \vec{q}_r(\tau) \} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$R_{r_i r_j}(t, \tau) = R_{ij}(t, \tau) = M \{ \vec{q}_i(t) \vec{q}_j(\tau) \} \quad (35)$$

do wzoru (35), otrzymamy macierz bieżących funkcji autokorelacyjnych wektora zmiennych stanu

$$R_{zz}(t, \tau) = \begin{bmatrix} R_{z1}(t, \tau) & R_{z2}(t, \tau) & \dots & R_{zr}(t, \tau) \\ R_{z1}(t, \tau) & R_{z2}(t, \tau) & \dots & R_{zr}(t, \tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{z1}(t, \tau) & R_{z2}(t, \tau) & \dots & R_{zr}(t, \tau) \end{bmatrix} \quad (36)$$

W podobny sposób można przedstawić macierze funkcji autokorelacyjnych wektorów sygnału wyjściowego $\bar{z}(t)$ oraz sygnału wymuszającego $\bar{u}(t)$. Macierze funkcji korelacyjnej własnej i wzajemnej definiuje się następującymi wzorami

$$R_{zz}(t, \tau) = M \left\{ \bar{z}(t) \bar{z}^T(\tau) \right\} \quad (37)$$

$$R_{zr}(t, \tau) = M \left\{ \bar{z}(t) \bar{r}^T(\tau) \right\} \quad (38)$$

$$R_{rr}(t, \tau) = M \left\{ \bar{r}(t) \bar{r}^T(\tau) \right\} \quad (39)$$

Wektor szumów addytywnych $\bar{v}(t)$ jest szumem białym wielowymiarowym, którego macierz korelacyjna jest diagonalna

$$R_{vv}(t, \tau) = \begin{bmatrix} n_1(t) \delta(t-\tau) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n_2(t) \delta(t-\tau) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n_r(t) \delta(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (40)$$

Wyluczając δ -funkcję poza macierz oraz wprowadzając oznaczenie

$$N(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n_r(t) \end{bmatrix} \quad (41)$$

otrzymamy macierz korelacji własnej bieżącej wielowymiarowego szumu białego w postaci

$$R_{vv}(t, \tau) = N(t) \delta(t-\tau) \quad (42)$$

Gdzie $N(t)$ jest macierzą intensywności szumu białego.

Dla $N(t) = E$ wzór (42) uprości się do postaci

$$R_{\bar{z}\bar{z}}(t, \tau) = E \delta(t - \tau) \quad (43)$$

9.3. Macierz charakterystyki impulsowej

Wektory sygnałów przypadkowych $\bar{f}(t)$ oraz $\bar{z}(t)$ powiązane ze sobą zależnością

$$\bar{z}(t) = \int_{-\infty}^t W(t, \vartheta) \bar{\mu}(\vartheta) d\vartheta \quad (44)$$

gdzie $W(t, \vartheta)$ jest zdeterminowaną macierzą charakterystyki impulsowej obiektu dynamicznego /obiekt fizyczny oraz urządzenie pomiarowe/ wielowymiarowego nieustalonego

$$W(t, \tau) = \| w_{ij}(t, \tau) \| \quad i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m} \quad (45)$$

Centrując wektory przypadkowe $\bar{z}(t)$ oraz $\bar{\mu}(t)$ we wzorze (44) oraz mnożąc obustronnie przez wektor $\bar{\mu}^T(t)$ i wykonując operację uśrednienia statystycznego, otrzymamy zależność

$$M \{ \bar{z}(t) \bar{z}^T(\tau) \} = \int_{-\infty}^t W(t, \vartheta) M \{ \bar{\mu}(\vartheta) \bar{\mu}^T(\tau) \} d\vartheta \quad (46)$$

Używając oznaczeń (37+39) we wzorze (46) otrzymamy

$$R_{\bar{z}\bar{z}}(t, \tau) = \int_{-\infty}^t W(t, \vartheta) R_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(\vartheta, \tau) d\vartheta \quad (47)$$

gdzie t_0 jest momentem wprowadzenia wymuszenia.

Równanie wektorowo-macierzowe (47) nosi nazwę równania Wienera - Hopfa.

Macierz charakterystyki impulsowej spełnia warunek realizacji fizycznej

$$W(t, \vartheta) \equiv 0, \text{ gdy } t < \vartheta \quad (48)$$

Mnożąc obustronnie zależność (44) przez postać transponowaną tego wzoru oraz wykonując operację uśrednienia statystycznego, otrzymamy wzór wiążący macierze bieżących funkcji autokorelacyjnych sygnału wyjściowego $\bar{z}(t)$ oraz wejściowego $\bar{\mu}(t)$ /wykorzystano oznaczenia (37) oraz (39) /.

$$R_{\bar{m}\bar{m}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t W(t, \varphi_1) W^T(\tau, \varphi_2) R_{\bar{m}\bar{m}}(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \quad (49)$$

gdzie: $W(t, \tau)$ - macierz normalnej charakterystyki impulsowej,
 $W^T(t, \tau) = W^T(\tau, t)$ - macierz sprzężonej charakterystyki impulsowej.

Macierz charakterystyki impulsowej można wyrazić przez macierze współczynników $A(t)$, $B(t)$ oraz $O(t)$. W tym celu należy określić zależność pomiędzy macierzami funkcji korelacyjnych $R_{\bar{m}\bar{m}}(t, \tau)$ oraz $R_{\bar{m}\bar{m}}(t, \tau)$.

Macierz bieżącej funkcji korelacji wzajemnej sygnałów $\bar{\mu}(t)$ oraz $\bar{\gamma}(t)$ określa się zależnościami

$$R_{\bar{m}\bar{m}}(t, t) = M \{ \bar{\mu}(t) \bar{\gamma}^T(t) \} \quad (50)$$

Wektor $\bar{\gamma}^T(t)$ określa się przez transpozycję wektora (4)

$$\bar{\gamma}^T(t) = \bar{\varphi}^T(t) C^T(t) + \bar{\delta}^T(t) \quad (51)$$

Rozwiązując równanie (3) przy założeniu, że warunki początkowe są zerowe/ $\bar{\varphi}(t_0) = 0$, otrzymamy określenie wektora stam

$$\bar{\varphi}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \lambda) B(\lambda) \bar{\mu}(\lambda) d\lambda \quad (52)$$

Przez transpozycję wektora (52) otrzymamy wektor $\bar{\varphi}^T(t)$ w postaci

$$\bar{\varphi}^T(t) = \int_{t_0}^t \bar{\mu}^T(\lambda) B^T(\lambda) \Phi^T(t, \lambda) d\lambda \quad (53)$$

Wprowadzając wektor (51) do zależności (50), uwzględniając wzór (53) oraz zakładając, że sygnały $\bar{\mu}(t)$ i $\bar{\gamma}(t)$ są statystycznie niezależne

$$M \{ \bar{\mu}(t) \bar{\gamma}^T(t) \} = 0 \quad (54)$$

otrzymamy równanie

$$R_{\bar{m}\bar{m}}(t, t) = \int_{t_0}^t R_{\bar{m}\bar{m}}(t, \lambda) [B^T(\lambda) \Phi^T(t, \lambda) C^T(\lambda)] d\lambda \quad (55)$$

w którym wyrażenie ujęte nawiasem kwadratowym jest macierzą transponowaną charakterystyki impulsowej równania sprzężonego

$$W^T(t, t) = B^T(t) \Phi^T(t, t) C^T(t) \quad (56)$$

Macierz (55) określona jest w obszarze czasu do momentu wprowadzenia wymuszenia $\bar{\mu}(t)$.

Dwukrotna transpozycja macierzy (56) daje macierz charakterystyki impulsowej układu równań sprzężonych

$$W(\tau, t) = \left\{ [C(t) \Phi(\tau, t) B(t)]^T \right\}^T = C(t) \Phi(\tau, t) B(\tau) \quad (57)$$

Zamiana t na τ daje macierz charakterystyki impulsowej układu równań (3) oraz (4)

$$W(t, \tau) = C(\tau) \Phi(t, \tau) B(\tau) \quad (58)$$

Znając macierz charakterystyki impulsowej można wyznaczyć elementy macierzy nadstępi matematycznej, dyspersji oraz funkcji autokorelacyjnej procesu wyjściowego

$$m_{\eta_i} = \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t w_{ji}(t, \tau) m_{\mu_j}(\tau) d\tau \quad (59)$$

$$D_{\eta_i}(t) = \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t w_{ji}(t, \vartheta_1) w_{ji}(t, \vartheta_2) R_{\mu_j \mu_j}(\vartheta_1, \vartheta_2) d\vartheta_1 d\vartheta_2 \quad (60)$$

$$R_{\eta_i \eta_k}(t, \tau) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} w_{ji}(t, \vartheta_1) w_{lk}(\tau, \vartheta_2) R_{\mu_j \mu_l}(\vartheta_1, \vartheta_2) d\vartheta_1 d\vartheta_2 \quad (61)$$

gdzie: i - i -ty sygnał wyjściowy / $i = \overline{1, n}$ /,

k - k -ty sygnał wyjściowy / $k = \overline{1, n}$ /,

j - j -ty sygnał wejściowy / $j = \overline{1, m}$ /,

l - l -ty sygnał wejściowy / $l = \overline{1, m}$ /.

9.4 Filtry Kalmana-Bucy'ego

Jeżeli układ dynamiczny opisany jest równaniami wektorowo-macierzowymi (3) oraz (4)

$$\frac{d\bar{\xi}(t)}{dt} = A(t) \bar{\xi}(t) + B(t) \bar{u}(t) \quad (62)$$

$$\bar{z}(t) = \bar{\eta}(t) + \bar{y}(t) \quad (63)$$

gdzie

$$\bar{\eta}(t) = C(t) \bar{\xi}(t) \quad (64)$$

to wektor oddziaływania przypadkowych $\bar{y}(t)$ nakłada się na wektor $\bar{y}(t)$, uniemożliwiając dokładne określenie wektora stanu $\bar{p}(t)$ w oparciu o obserwacje procesu wyjściowego. Można jedynie określić $\bar{p}_0(t)$ odzwierciedlający wektor $\bar{p}(t)$ z pewnym błędem $\bar{p}_E(t)$

$$\bar{p}_E(t) = \bar{p}(t) - \bar{p}_0(t) \quad (65)$$

Wektor $\bar{p}_E(t)$ można zapisać w postaci

$$\bar{p}_E(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_r(t) \end{bmatrix} \quad (66)$$

gdzie $e_i(t) = y_i(t) - \hat{y}_{i0}(t)$.

Jeżeli wektor transponowany

$$\bar{p}_E^T(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ \dots \ e_r(t)] \quad (67)$$

pomnożymy przez wektor (66), to otrzymamy wzór

$$\bar{p}_E^T(t) \bar{p}_E(t) = \text{tr} [\bar{p}_E(t) \bar{p}_E^T(t)] = \sum_{i=1}^r e_i^2(t) \quad (68)$$

określający sumę elementów przekątnej głównej macierzy

$$\bar{p}_E(t) \bar{p}_E^T(t) = \begin{bmatrix} e_1^2(t) & e_1(t)e_2(t) & \dots & e_1(t)e_r(t) \\ e_2(t)e_1(t) & e_2^2(t) & \dots & e_2(t)e_r(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_r(t)e_1(t) & e_r(t)e_2(t) & \dots & e_r^2(t) \end{bmatrix} \quad (69)$$

Nadzieja matematyczna tej macierzy jest równa macierzy dyspersji błędu określenia wektora stanu $\bar{p}_E(t)$. Jest ona metryką wektora $\bar{p}(t)$

$$\|\bar{p}_E(t)\|^2 = M \left\{ \sum_{i=1}^r e_i^2(t) \right\} \quad (70)$$

Jeżeli jako kryterium dokładności określenia wektora $\bar{p}(t)$ przyjmuje się minimalną wartość sumy kwadratów błędów, to zagadnienie sprowadza się do minimalizacji normy wektora $\bar{p}_E(t)$. Operację realizuje się przy użyciu filtra liniowego, którego parametry dobiera się tak, aby spełniony był warunek

$$\min \|\bar{p}_E(t)\| = \min \sqrt{M \left\{ \sum_{i=1}^r e_i^2(t) \right\}} \quad (71)$$

$$\{p\} = \{p_{opt}\} \quad \{p\} = \{p_{opt}\}$$

Gdzie p jest parametrem filtra.

Jeżeli brak jest zakłócenia $\bar{y}(t) = 0$, to każdemu wektorowi $\bar{p}_0(t)$ odpowiada jeden wektor stanu $\bar{p}(t)$. Wówczas filtr liniowy jest

wzmocnieniem o wzmocnieniu $\sigma^{-1}(t)$. Realizuje on przekształcenie wektora $\bar{\eta}(t)$ w wektor $\bar{\xi}(t)$. Gdy zakłócenie występuje / $\bar{\gamma}(t) \neq 0$, to w przestrzeni stanów istnieje określony podzbiór wektorów $\bar{\xi}_0(t)$ odzwierciedlających wektory $\bar{\gamma}(t)$.

Filtr liniowy powinien mieć taką macierz charakterystyki impulsowej, która wybierałaby ze zbioru wektorów $\bar{\xi}(t)$ wektor dający się przekształcić w wektor $\bar{\xi}_0(t)$. Operację określenia realizuje się w oparciu o wzór

$$\bar{\xi}_0(t) = \int_{t_0}^t W_F(t, \vartheta) \bar{\xi}(\vartheta) d\vartheta \quad (72)$$

gdzie $W_F(t, \vartheta)$ jest macierzą charakterystyki impulsowej filtru.

Jeżeli wielowymiarowe sumy białe $\bar{\mu}(t)$ i $\bar{\gamma}(t)$ są niekorelowalne (54) oraz wektory $\bar{\xi}(t)$ i $\bar{\gamma}(t)$ są również niekorelowalne

$$M\{\bar{\xi}(t) \bar{\xi}^T(\tau)\} = 0 \quad (73)$$

to z układu równań (3) oraz (4) wynikają następujące związki

$$\frac{dR_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(t, \tau)}{dt} = A(t) R_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(t, \tau); \quad \tau < t \quad (74)$$

$$R_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(t, \tau) = C(t) R_{\bar{\gamma}\bar{\gamma}}(t, \tau) \quad (75)$$

Różniczkując równanie Wienera-Hopfa

$$R_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(t, \tau) = \int_{-\infty}^t W_F(t, \vartheta) R_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(\vartheta, \tau) d\vartheta \quad (76)$$

otrzymamy zależność

$$\frac{dR_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(t, \tau)}{dt} = \int_{-\infty}^t \frac{dW_F(t, \vartheta)}{dt} R_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(\vartheta, \tau) d\vartheta + W_F(t, t) R_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(t, \tau) \quad (77)$$

Uwzględniając w równaniu (77) zależności (72), (74) oraz (76), otrzymamy równanie

$$\int_{t_0}^t \left[A(t) W_F(t, \vartheta) - \frac{dW_F(t, \vartheta)}{dt} - W_F(t, t) C(t) W_F(t, \vartheta) \right] R_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(\vartheta, \tau) d\vartheta = 0 \quad (78)$$

które jest słuszne dla

$$\begin{aligned} & t > \tau \\ & t_0 \leq \vartheta \leq t \end{aligned} \quad (79)$$

Z równania (78) wynika zależność, z której można wyznaczyć macierz

charakterystyki impulsowej filtra

$$\frac{dW_F(t, u)}{dt} = A(t)W_F(t, u) - W_F(t, t)C(t)W_F(t, u) \quad (80)$$

Różniczkując wzór (72)

$$\frac{d\bar{p}_e(t)}{dt} = \int_{t_0}^t \frac{dW_F(t, \theta)}{dt} \bar{z}(\theta) d\theta + W_F(t, t) \bar{z}(t) \quad (81)$$

oraz uwzględniając zależności (80) i (72), otrzymamy równanie różniczkowe ustalające zależność pomiędzy wektorami $\bar{p}_e(t)$ oraz $\bar{z}(t)$

$$\frac{d\bar{p}_e(t)}{dt} = [A(t) - W_F(t)C(t)]\bar{p}_e(t) + W_F(t)\bar{z}(t) \quad (82)$$

Jest to równanie filtra optymalnego.

Można otrzymać inną postać równania filtra optymalnego. W tym celu należy zależność (65) zróżniczkować po t oraz wykorzystać równania (3) oraz (82). W wyniku wykonanych operacji otrzymujemy równanie

$$\frac{d\bar{p}_e(t)}{dt} = [A(t) - W_F(t)C(t)]\bar{p}_e(t) + B(t)\bar{\mu}(t) - W_F(t)\bar{y}(t) \quad (83)$$

Działając na wektory przypadkowe równania (83) operatorem $M\{\}$ oraz uwzględniając oznaczenie (42), otrzymamy następujące zależności:

- macierz $W_F(t)$ w postaci

$$W_F(t) = D_{\bar{p}_e}(t) C^T(t) N^{-1}(t) \quad (84)$$

- równanie określające macierz funkcji autokorelacyjnej wektora błędu $\bar{p}_e(t)$

$$\frac{dR_{\bar{p}_e\bar{p}_e}(t)}{dt} = A(t)R_{\bar{p}_e\bar{p}_e}(t) + R_{\bar{p}_e\bar{p}_e}(t)A^T(t) + R_{\bar{p}_e\bar{p}_e}(t)C^T(t)N^{-1}(t)C(t)R_{\bar{p}_e\bar{p}_e}(t) + B(t)S(t)B^T(t) \quad (85)$$

gdzie: $D_{\bar{p}_e}(t)$ - dyspersja błędu $\bar{p}_e(t)$,

$N^{-1}(t)$ - macierz odwrotna do macierzy intensywności szumu białego $\bar{y}(t)$

$$M\{\bar{y}(t)\bar{y}^T(\tau)\} = N(t)\delta(t-\tau) \quad (86)$$

$R_{\bar{p}_e\bar{p}_e}(t)$ - macierz korelacyjna wektora błędu

$$R_{\bar{p}_e\bar{p}_e}(t) = M\{\bar{p}_e(t)\bar{p}_e^T(\tau)\} \quad (87)$$

- macierz intensywności szumu białego $\bar{\mu}(t)$

$$M\{\bar{\mu}(t)\bar{\mu}^T(\tau)\} = S(t)\delta(t-\tau) \quad (88)$$

9.5. Obiekty dynamiczne z szumem parametrycznym

Równanie różniczkowe, opisujące obiekt dynamiczny z szumem parametrycznym, ma postać

$$\frac{d\bar{\eta}(t)}{dt} = [C(t) + V(t)] \bar{\eta}(t) - \bar{\mu}(t) \quad (89)$$

- gdzie: $\bar{\eta}(t)$ - wektor sygnału wyjściowego,
 $\bar{\mu}(t)$ - wektor sygnału wejściowego,
 $C(t)$ - macierz współczynników obiektu dynamicznego,
 $V(t)$ - macierz szumów parametrycznych.

Równaniu (89) odpowiada operator całkowy przekształcający sygnał wejściowy w sygnał wyjściowy

$$\bar{\eta}(t) = \int_{t_0}^t W(t, \tau, d) \bar{\mu}(\tau) d\tau \quad (90)$$

gdzie $W(t, \tau, d)$ jest macierzą przypadkową charakterystyki impulsowej obiektu dynamicznego z szumem parametrycznym.

Macierz przypadkowa $W(t, \tau, d)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{dW(t, \tau, d)}{dt} = [C(t) + V(t)] W(t, \tau, d) + E \delta(t - \tau) \quad (91)$$

Przedstawiając macierz $W(t, \tau, d)$ w postaci sumy

$$W(t, \tau, d) = M_W(t, \tau) + \dot{W}(t, \tau, d) \quad (92)$$

gdzie: $M_W(t, \tau)$ - macierz nadziei matematycznej macierzy przypadkowej charakterystyki impulsowej,

$\dot{W}(t, \tau, d)$ - macierz scentrowana macierzy przypadkowej charakterystyki impulsowej,

oraz działając na funkcje przypadkowe we wzorze (90) operatorem uśrednienia statystycznego, otrzymamy następujące równania:

$$\bar{m}_\eta(t) = \int_0^t M_W(t, \tau) \bar{m}_\mu^T(\tau) d\tau \quad (93)$$

$$\bar{\eta}^0(t_1) = \int_0^{t_1} [M_W(t_1, \tau_1) \bar{\eta}^0(\tau_1) + \dot{W}(t_1, \tau_1, d) \bar{m}_\mu(\tau_1) + \dot{W}(t_1, \tau_1, d) \bar{\eta}^0(\tau_1)] d\tau_1 \quad (94)$$

Przez transpozycję wektora $\vec{\eta}(t)$ (94) otrzymamy wektor transpo-
nowany sygnału wyjściowego dla momentu t_2

$$\vec{\eta}^T(t_2) = \int_0^{t_2} [\vec{\mu}^T(\tau_2) M_W^T(t_2, \tau_2) + \vec{m}^T \mu(\tau_2) \vec{W}^T(t_2, \tau_2, d) + \vec{\mu}^T(\tau_2) \vec{W}^T(t_2, \tau_2, d)] d\tau_2 \quad (95)$$

Mnożąc stronami zależności (94) oraz (95) otrzymamy macierz

$$\begin{aligned} \vec{\eta}(t_1) \vec{\eta}^T(t_2) = & \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} [M_W(t_1, \tau_1) \vec{\mu}(\tau_1) \vec{\mu}^T(\tau_2) M_W^T(t_2, \tau_2) + M_W(t_1, \tau_1) \vec{\mu}(\tau_1) \vec{m}^T \mu(\tau_2) \vec{W}^T(t_2, \tau_2, d) + \\ & + M_W(t_1, \tau_1) \vec{\mu}(\tau_1) \vec{\mu}^T(\tau_2) \vec{W}^T(t_2, \tau_2, d) + \vec{W}(t_1, \tau_1, d) \vec{m} \mu(\tau_1) \vec{\mu}^T(\tau_2) M_W^T(t_2, \tau_2) + \\ & + \vec{W}(t_1, \tau_1, d) \vec{m} \mu(\tau_1) \vec{m}^T \mu(\tau_2) \vec{W}^T(t_2, \tau_2, d) + \vec{W}(t_1, \tau_1, d) \vec{m} \mu(\tau_1) \vec{\mu}^T(\tau_2) \vec{W}^T(t_2, \tau_2, d) + \\ & + \vec{W}(t_1, \tau_1, d) \vec{\mu}(\tau_1) \vec{\mu}^T(\tau_2) M_W^T(t_2, \tau_2) + \vec{W}(t_1, \tau_1, d) \vec{\mu}(\tau_1) \vec{m}^T \mu(\tau_2) \vec{W}^T(t_2, \tau_2, d) + \\ & + \vec{W}(t_1, \tau_1, d) \vec{\mu}(\tau_1) \vec{\mu}^T(\tau_2) \vec{W}^T(t_2, \tau_2, d)] d\tau_1 d\tau_2 \quad (96) \end{aligned}$$

Stosując operację $M\{\}$ do wszystkich członów zależności (96) oraz zakładając, że funkcje $\vec{W}(t, \tau, d)$ oraz $\vec{\mu}(\tau)$ są statystycznie niezależne, otrzymamy wzór do wyznaczenia macierzy funkcji korelacyjnej wektora procesu wyjściowego $\vec{\eta}(t)$

$$\begin{aligned} R_{\vec{\eta}\vec{\eta}}(t_1, t_2) = & \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} [M_W(t_1, \tau_1) R_{\vec{\mu}\vec{\mu}}(\tau_1, \tau_2) M_W^T(t_2, \tau_2) + \\ & + M\{\vec{W}(t_1, \tau_1, d) \vec{m} \mu(\tau_1) \vec{m}^T \mu(\tau_2) \vec{W}^T(t_2, \tau_2, d)\} + \\ & + M\{\vec{W}(t_1, \tau_1, d) R_{\vec{\mu}\vec{\mu}}(\tau_1, \tau_2) \vec{W}^T(t_2, \tau_2, d)\}] d\tau_1 d\tau_2 \quad (97) \end{aligned}$$

Jeżeli sygnałem wejściowym jest szum biały (88), to wzór (97) przyjmie postać

$$R_{\vec{\eta}\vec{\eta}}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} M\{\vec{W}(t_1, \tau_1, d) S(\tau_1) \delta(\tau_1 - \tau_2) \vec{W}^T(t_2, \tau_2, d)\} d\tau_1 d\tau_2 \quad (98)$$

Elementy tej funkcji korelacyjnej $R_{\vec{\eta}\vec{\eta}}(t_1, t_2)$ określa się z zależności

$$\begin{aligned} R_{u_i u_j}(t_1, t_2) = & \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \left(\sum_{k,p=1}^m m_{w_{ip}}(t_1, \tau_1) m_{w_{kj}}(t_2, \tau_2) R_{m_k m_p}(\tau_1, \tau_2) + \right. \\ & + R_{w_{ip} k_j}(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) [m_{\mu p}(\tau_1) m_{\mu k}(\tau_2) + \\ & \left. + R_{m_k m_p}(\tau_1, \tau_2)] \right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (99) \end{aligned}$$

gdzie $R_{wipkj}(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$ jest $jpkj$ -tym elementem tensora rzędu czwartego funkcji korelacyjnej elementów macierzy charakterystyki impulsowej $W(t, \tau, \alpha)$.

Wprowadzając we wzorze (99) oznaczenia $t_1 = t_2 = t$ oraz $i = j$, otrzymamy wzór na i -ty element macierzy dyspersji wektora sygnału wyjściowego $\bar{\eta}(t)$,

$$D_{\eta ii}(t) = \int_0^t \int_0^t \left(\sum_{p,k=1}^m \left\{ m_{wip}(t, \tau_1) m_{wkj}(t, \tau_2) R_{m_k m_p}(\tau_1, \tau_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + R_{wipki}(t, t, \tau_1, \tau_2) \left[m_{\mu p}(\tau_1) m_{\mu k}(\tau_2) + R_{m_k m_p}(\tau_1, \tau_2) \right] \right\} \right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (100)$$

Jeżeli wykorzystamy wzór (98), to ij -ty element macierzy funkcji korelacyjnej oraz i -ty element macierzy dyspersji wyznacza się ze wzorów

$$R_{u_i u_j}(t_1, t_2) = \int_0^{\min(t_1, t_2)} \sum_{p,k=1}^m R_{wipkj}(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) S_{pk}(\tau_1) d\tau_1 \quad (101)$$

$$D_{\eta i}(t) = \int_0^t \sum_{p,k=1}^m R_{wipki}(t, t, \tau_1, \tau_2) S_{pk}(\tau_1) d\tau_1 \quad (102)$$

10. OBIEKTY DYNAMICZNE LINIOWE USTALONE JEDNOWYMIAROWE O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH, WYMUSZENIA ZDETERMINOWANE

10.1. Wstęp

Obiekty o parametrach rozłożonych opisane są równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Wielkości fizykochemiczne jako funkcje stanu obiektu zmieniają się w czasie i są w określony sposób rozłożone w przestrzeni, ograniczonej własnościami geometrycznymi aparatu oraz własnościami kinematycznymi przebiegającego w nim procesu inżynierii chemicznej. Własności ustalone obiektu wynikają z niezależności współczynników równania różniczkowego od czasu. Współczynniki te również nie zależą od przestrzeni motrycznej. Charakterystyki dynamiczne tego typu obiektów dynamicznych są rozłożone w czasie oraz w przestrzeni.

Obiekty o parametrach rozłożonych są często spotykane w przemyśle chemicznym. Do nich w pierwszej kolejności należą przewody rurowe oraz aparaty zbudowane z elementów długich /wymenniki rurowe, reaktory rurowe/. W aparatach tych parametry fizykochemiczne są rozłożone wzdłuż długości /oś aparatu/ i mogą, lecz nie muszą, mieć rozkład w płaszczyźnie przekroju prostopadłego do osi aparatu. W aparatach bez długich elementów konstrukcyjnych lecz mających duże objętości, funkcje stanu są rozłożone w przestrzeni roboczej aparatu z możliwą dominacją rozkładu wzdłuż pewnego kierunku. Do nich należą takie aparaty, jak: młyny ekstraktory, wymenniki ciepła, reaktory, krystalizatory, kolumny, piece technologiczne i inne tego typu aparaty. Jakościowe wskaźniki technologiczne dla tych aparatów są nie tylko wartościami parametrów w jednym punkcie, lecz mają rozkład wzdłuż długości, wysokości lub w objętości aparatu.

Spośród wielu czynników wywołujących rozkład funkcji stanu w przestrzeni i w czasie należy wyróżnić:

- procesy segregacji,
- wieloźródłowość procesów,
- ściśliwość płynów,
- procesy dyfuzji i pseudodyfuzji.

Procesem przeciwdziałającym, a więc eliminującym rozkład funkcji stanu /gęstość, stężenie, temperatura, ciśnienie/ w przestrzeni aparatu, jest mieszanie mechaniczne.

Proces mieszania eliminuje niedostateczne wzajemne przenikanie składników w obszarach zastoju, intensyfikuje przebieg procesów kinetycznych oraz sprzyja selektywnemu przebiegowi reakcji chemicznych.

10.2. Równania różniczkowe modeli obiektów o parametrach rozłożonych

Model matematyczny obiektu, uwzględniający rozkład parametrów fizykochemicznych, ujemnie w sposób szerszy własności obiektu rzeczywistego/uwzględnia się efekt opóźnienia transportowego wynikły z ograniczonej prędkości przenoszenia substancji z jednego miejsca aparatu w drugie/ w porównaniu z modelem obiektu c parametrach skupicznych. Uwzględnienie rozkładu funkcji stanu w przestrzeni aparatu prowadzi do podwyższenia dokładności informacji dynamicznej, uzyskanej w badaniach identyfikujących obiekt.

W wielu przypadkach proces zachodzący w aparacie ma złożony charakter, a otrzymany model jest na tyle złożony, że bez upraszczających założeń traci sens fizyczny. Założenia muszą być takie, aby nie naruszały adekwatności modelu fizycznego i obiektu, a jedynie ułatwiał analizę matematyczną dynamiki obiektu.

Zachowanie się obiektów o parametrach rozłożonych opisuje się modelem matematycznym w postaci równań różniczkowych cząstkowych, różnicowo-cząstkowych, równań całkowych lub równań całkowo-różniczkowych.

Dynamikę obiektów c parametrach rozłożonych w ogólnym przypadku opisują prawa ruchu falowego, ruchu drgającego, ruchu dyfuzyjnego oraz źródłowość procesu.

Równanie dynamiki obiektów o parametrach rozłożonych w postaci ogólnej przedstawia się następująco

$$\frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial t} = G\left\{t, \bar{x}, u(\bar{x}, t), \frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^i u(\bar{x}, t)}{\partial x_1^i \dots \partial x_n^i}, \dots, m(\bar{x}, t)\right\} \quad (1)$$

gdzie: $G\{\}$ - operator struktury równania,

$u(\bar{x}, t)$ - wielkość wyjściowa,

$m(\bar{x}, t)$ - wielkość wejściowa rozłożona w czasie i przestrzeni,

$\bar{x} = \in (x, y, z)$ - współrzędne przestrzeni Ω .

Wymuszenie m może być funkcją rozłożoną w obszarze V , jako funkcja granicy obszaru Ω_b lub jako funkcja przestrzeni $\Omega / V + \Omega_b /$.

Równanie (1) można zapisać w innej postaci

$$L[u(\bar{x}, t)] = m(\bar{x}, t) \quad (1a)$$

gdzie: L - operatory liniowe,

$m(\bar{x}, t)$ - wymuszenie zdeterminowane, rozłożone w przestrzeni

/ w ogólnym przypadku może zawierać δ -funkcję i. jej pochodne/.

Do równań dołączamy się warunki graniczne /początkowe i brzegowe/

$$L_1[u(x,t)] = u_0(x,t); \bar{x} \in \Omega_b \quad (2)$$

$$L_2[u(x,t)] = u_{00}(\bar{x}); t \geq t_0; \bar{x} \in \Omega \quad (3)$$

gdzie: t_0 - moment startu funkcji wymuszającej,

L_1 - operator liniowy warunków brzegowych,

L_2 - operator liniowy warunków początkowych.

Nieszerowe warunki graniczne można sprowadzić do zerowych przez standaryzację. Wówczas równanie (1) oraz warunki (2) i (3) zapiszemy w postaci

$$L[u(x,t)] = m(x,t) - L' \left\{ [u_{00}(\bar{x},t), u_0(\bar{x}), \delta(\bar{x},t)] \right\}_{\substack{\bar{x} \in \Omega \\ t > t_0}} \quad (4)$$

$$L_1[u(x,t)] = 0; \bar{x} \in \Omega_b, t > t_0 \quad (5a)$$

$$L_2[u(x,t)] = 0; \bar{x} \in \Omega, t = t_0 \quad (5b)$$

gdzie $m(x,t) = L' \{ [u_{00}(\bar{x},t), u_0(\bar{x}), \delta(\bar{x},t)] \} = V(x,t)$ funkcja standaryzująca.

10.3. Modele obiektów o parametrach rozłożonych

Modele matematyczne obiektów /równania różniczkowe lub całkowe/ formułowane są w oparciu o:

- zjawiska przenoszenia,
- zjawiska fluktuacji,
- analizę czasów przebywania,
- dynamikę populacji.

Każdy bilans substancji /masy, pędu, energii/ formułowany jest w oparciu o wzór

$$A_k = W_1 - W_2 + Q_1 - Q_2 \quad (6)$$

gdzie: A - akumulacja w objętości,

W_1, W_2 - wnikanie substancji przez powierzchnie rozgraniczające,

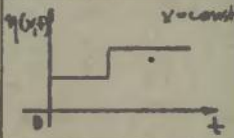
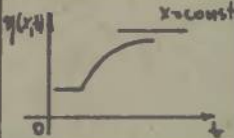
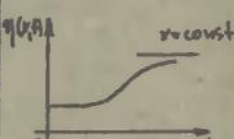
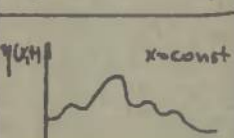
Q_1, Q_2 - wytrącanie i sukcje substancji.

Dla obiektów inżynierii chemicznej nie zawsze równania bilansowe udaje się zapisać w postaci zupełnej, i w obliczeniach praktycznych tworzy się opis przybliżony. Ułatwia się w ten sposób formułowanie warunków granicznych oraz realizację doświadczeń, na podstawie których wyznacza się współczynniki stałe równań różniczkowych.

Modele podstawowe obiektów o parametrach rozłożonych zestawiono w tabelicy 2.

Tabela 2

Modele obiektów o parametrach rozłożonych, jednowymiarowe

Model	Możliwość realizacji	Równanie	Charakterystyka dynamiczna
Idealnego przepływu tłokowego	W kierunku ruchu strumienia zachodzi zmieszanie niedoskonałe, a w kierunku prostopadłym do ruchu - zmieszanie doskonałe	$S \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$	
"Czystej" dyfuzji		$S \frac{\partial u}{\partial t} = S D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	
Dyfuzyjny przepływowy	W kierunku ruchu strumienia zachodzi zmieszanie wzdłużne, a w kierunku poprzecznym do ruchu - zmieszanie doskonałe	$S \frac{\partial u}{\partial t} = S E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial u}{\partial x}$	
Mieszany	Realizuje się z uwzględnieniem obszarów zastoju, strumieni obojętności oraz recyrkulacji		

gdzie: v - prędkość strumienia,

S - parametr przekroju poprzecznego,

D - współczynnik dyfuzji molekularnej,

l - wymiar liniowy,

E - współczynnik mieszania wzdłużnego,

t - czas,

u - zmienna stanu.

Do równań teoretycznych proponowane są trzy modele przepływu:

- model przepływu tłokowego ($E=0$) - każda cząstka przepływającego płynu zachowuje się jak mały, odrębny aparacik i w objętości aparatu przebywa jednakowo długo,
- model przepływu pośredniego ($0 < E < \infty$) - cząstki doprowadzane są równo - miernie i nie ulegają całkowitemu wymieszaniu; stykają się tylko z cząstkami sąsiednimi i opuszczają aparat bezładnie; czas przebywania cząstek w aparacie jest różny,
- model wymieszania doskonałego⁵⁰ ($E = \infty$) - całkowite i natychmiastowe wymieszanie cząstek; stężenie substancji wpływającej z aparatu jest równe średniemu równomiernemu stężeniu substancji w aparacie; pełna homogenizacja fazy; brak obszarów zastojów; obszary bezgradientowe.

Modele przepływu tłokowego oraz modele pośrednie są najczęściej stosowane do opisanego obiektów o parametrach rozłożonych. Model wymieszania doskonałego jest modelem asymptotycznym i służy do aproksymacji modeli złożonych.

Modele matematyczne obiektów o parametrach rozłożonych formułowane są również w oparciu o bilans populacji oraz analizę funkcji przebywania.

Bilans populacji dla dowolnego elementu objętości ma postać

$$A_k = G - Z \quad (6a)$$

gdzie: A_k - akumulacja,

G - generacja,

Z - zużycie.

Jeżeli bilans populacji dla elementu objętości scałkujemy na całą objętość τ , to otrzymamy równanie całkowe

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \psi d\tau = \int_{\tau} (U - S) d\tau \quad (7)$$

gdzie:

ψ - własność /wiek elementów płynu, aktywność, powierzchnie cząstek katalizatora, wymiar kryształów itd./,

U - funkcja powstania,

S - funkcja zaniku,

$\Psi(x, y, z, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ - funkcja rozkładu własności.

Funkcja rozkładu własności spełnia zależność

$$\int \Psi(x, y, z, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) dx dy dz d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n = 1 \quad (8)$$

Stosując wzór Leibniza do równania (7) przy dowolnym doborze, otrzymano nowe równanie

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x \Psi) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y \Psi) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z \Psi) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(v_i \Psi) + S - U = 0 \quad (9)$$

gdzie wielkości v_i oznaczają prędkości zmian /lub kinetykę/ własności.

W wielu aparatach inżynierii chemicznej, gdy nie są wyraźnie znane własności dynamiczne wnętrza aparatu /obszary zastoju, przepływy omijające, obszary o podwyższonej aktywności/ nie można sformułować modelu w postaci równań różniczkowych. Model obiektu tworzy się wówczas w oparciu o pomiary doświadczalne. Model taki może mieć bardzo złożoną strukturę i w obliczeniach praktycznych staje się mało przydatny..

10.4. Przykłady modeli matematycznych obiektów inżynierii chemicznej o parametrach rozłożonych

Wymienniki ciepła, szczególnie rurowe, traktowane są jako obiekty dynamiczne jednowymiarowe o parametrach rozłożonych. Matematyczny opis wymiennika ciepła typu "rura w rurze" przy założeniu, że:

- temperatura jest rozłożona wzdłuż długości,
- ma miejsce proces przewodzenia ciepła wzdłuż ścianki,
- powierzchnia płaszcza nie ma izolacji adiabatycznej,

ma postać równań różniczkowych

$$\frac{\pi}{4} d_w^2 \rho_1 c_{p1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} + G_1 c_{p1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} = \alpha_w \pi d_w (\vartheta_2' - \vartheta_1) \quad (9a)$$

$$\frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_w^2) \left[\rho_2 c_{p2} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} \right] = \alpha_w \pi d_w (\vartheta_1 - \vartheta_2') + \alpha_2 \pi d_2 (\vartheta_2 - \vartheta_2') \quad (9b)$$

$$\frac{\pi}{4} (d_{wp}^2 - d_2^2) \rho_2 c_{p2} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} + G_2 c_{p2} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} = \alpha_2 \pi d_2 (\vartheta_2' - \vartheta_2) + \alpha_{wp} \pi d_{wp} (\vartheta_2' - \vartheta_2) \quad (9c)$$

$$\frac{\pi}{4} (d_{zpr}^2 - d_{wpr}^2) c_{spr} \rho_{pr} \frac{\partial \vartheta_{spr}}{\partial t} = d_{wpr} \pi d_{wpr} (\vartheta_z - \vartheta_{spr}) + d_{zpr} \pi d_{zpr} (\vartheta_0 - \vartheta_{spr}) \quad (9a)$$

gdzie: ϑ - temperatura,

ρ, c, λ - parametry fizyczne medium 1,2 oraz ścianki,

α - współczynnik wnikania ciepła,

d - średnica rury,

ϑ_0 - temperatura otoczenia.

Proces adsorpcji jednego ze składników w mieszaninie ciekłej, z uwzględnieniem efektu wymiany masy i dyfuzji wzdłużnej, można opisać równaniem bilansowym

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} - D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} k_f a (c - c^*) \quad (10)$$

gdzie: c - stężenie adsorbowanego składnika w cieczy,

k - współczynnik wymiany masy /wymiana masy z otoczeniem ziarna/,

ϵ - porowatość frakcji złoża,

v - prędkość przepływu cieczy,

n - średnie stężenie składnika w złożu,

D_L - współczynnik dyfuzji wzdłużnej,

Q - powierzchnia swobodna, odniesiona do jednostki objętości adsorbenta,

c^* - stężenie składnika w równowadze ze stężeniem n w złożu.

Przebieg procesu krystalizacji charakteryzuje się dwoma etapami:

- powstawanie zarodników /jeżeli nie zostały wprowadzone do roztworu/,
- formowanie się kryształów /proces typowo dyfuzyjny z oporem wnikania masy po stronie cieczy/.

Przy założeniu, że kryształy są regularne, wielkość ich jest opisana wymiarem liniowym, a prędkość wzrostu kryształów jest stała, otrzymamy równanie bilansowe fazy stałej /Sherwin, Shinnar, Katz/

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{kr} \frac{\partial f}{\partial x} = WR \delta (x - x_0) - V_s f + V_{s0} \psi \quad (11)$$

gdzie: f - liczba kryształów w jednostce objętości,

v_{kr} - prędkość wzrostu kryształów,

x - wymiar liniowy kryształu /promień/,

W - udział objętościowy substancji rozpuszczonej,

R - prędkość tworzenia się zarodników,

x_0 - promień charakterystyczny zarodników,

ψ - liczba kryształów w jednostce objętości wsadu,

- przepływ objętościowy,
- wydajność objętościowa procesu.

Składniki równania (11) kolejno oznaczają: akumulacja w kryształach o wymiarze x , przepływ do kryształu powodujący jego wzrost, wprowadzenie zarodników krystalizacji o wymiarze x_0 , usuwanie kryształów o wymiarze x z produktem oraz wprowadzenie kryształów o wymiarze x z wprowadzanym do aparatu wsadem.

Podane równania (9), (10) oraz (11) należy traktować jako przykłady modeli matematycznych obiektów inżynierii chemicznej o parametrach rozłożonych. Są one słuszne jedynie dla przyjętych uproszczeń.

10.5. Warunki graniczne

Poszukiwanie rozwiązań ogólnych osądkowych równań różniczkowych jest znacznie trudniejsze niż dla swychajnych równań różniczkowych, a otrzymane rozwiązania ogólne rzadko są wykorzystywane, ponieważ rozwiązania te zawierają zamiast stałych-dowolne funkcje. W zagadnieniach praktycznych rozwiązanie powinno mieć sens fizyczny oraz jednoznacznie spełniać określone warunki graniczne. Warunki te wynikają z opisu obiektu oraz prowadzonego w nim procesu lub postawionego zagadnienia i mają postać relacji różniczkowych.

Zagadnienie graniczne /początkowe i brzegowe/ dla równania różniczkowego jest postawione poprawnie, jeżeli dla określonych warunków stałych istnieje dokładnie jedno rozwiązanie, zależne w sposób ciągły od funkcji określającej te warunki.

Warunki początkowe określa się, podając funkcje opisujące stan obiektu w pewnej stosownie obranej chwili. W przypadku, gdy rozpatruje się stan ustalony obiektu lub stan sprowadzony do ustalonego, problem warunków początkowych nie istnieje.

Warunki brzegowe stawiane są dla obszaru ograniczającego objętość i dotyczą z reguły procesów wnikania. W wielu obiektach inżynierii chemicznej, wobec istnienia warstewki granicznej, w której może występować ruch wirowy, stosowane równania mogą nie spełniać warunków granicznych.

Warunki początkowe /warunki graniczne typu Cauchy'ego/ określone są dla $t=0$ /lub $t=t_0$ / jako odchylenia początkowe i prędkość początkowa

$$u(\bar{x}, t) \Big|_{t=0(t_0)} = u_{00}(\bar{x}) \quad (12)$$

$$u_t(\bar{x}, t) \Big|_{t=0(t_0)} = u_{01}(\bar{x}) \quad (13)$$

gdzie $U_{00}(\bar{x})$ oraz $U_{01}(\bar{x})$ są z góry zadanyymi funkcjami obszaru $\bar{x} \in \Omega$.

Na granicy Ω_b zadawane są warunki brzegowe / w ogólnym przypadku nieustalone, nieliniowe/. Można je przedstawić w postaci trzech rodzajów/Dirichleta, Neumana, Hankela/

$$u(\bar{x}, t) = \alpha(\bar{x}, t) \quad (14a)$$

$$u_n(\bar{x}, t) = \beta(\bar{x}, t) \quad (14b)$$

$$u_n(\bar{x}, t) + \gamma u(\bar{x}, t) = \delta(\bar{x}, t) \quad (14c)$$

gdzie $u_n(\bar{x}, t)$ jest pochodną funkcji $u(\bar{x}, t)$ w kierunku normalnym do powierzchni Ω_b w punkcie $\bar{x} \in \Omega_b$.

Dla obiektów inżynierii chemicznej, warunki graniczne zadaje się przez określenie dla granicy

- parametru stanu,

$$C = C_0; \vartheta = \vartheta_0 \quad (15a)$$

- przepływu masy i ciepła /równania doświadczalne/,

$$N_x|_{x=0} = k(C - C^*); q_x|_{x=0} = \alpha(\vartheta - \vartheta^*) \quad (15b)$$

- prędkości reakcji chemicznej,

$$R = R_0 \quad (15c)$$

- zależności funkcyjnej po obu stronach granicy rozdziału faz,

$$f(C)|_{x=0} = f(C)|_{x=1} \quad (15d)$$

- warunku nieprzenikalności granicy fazy,

$$W_n = 0 \quad (15e)$$

Gdzie: c - stężenie,

ϑ - temperatura,

N - strumień masy,

q - strumień ciepła,

R - szybkość reakcji chemicznej.

Warunki graniczne mogą być:

- jednorodne, tj. takie warunki, które spełnione dla dwóch funkcji $u_1(x,t)$ oraz $u_2(x,t)$ są spełnione dla liniowej kombinacji $c_1 u_1(x,t) + c_2 u_2(x,t)$.
- niejednorodne, tj. takie warunki, że $u(x,t) = u_{00}(x)$ przy $t=0$ /lub $t=t_0$ / oraz $u_t(x,t) = u_{01}(x)$ przy $t=0$ /lub $t=t_0$ /.

Warunki graniczne liniowe oraz ustalone najczęściej zapisywane są w postaci

$$\left. \begin{aligned} u(x,t) \Big|_{t=t_0}^{t=0} &= 0; u_{00}(x) \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0}^{t=0} &= 0; u_{01}(x) \\ \frac{\partial^i u(x,t)}{\partial t^i} \Big|_{t=t_0}^{t=0} &= 0; u_{0i}(x) \end{aligned} \right\} x \in \Omega; 0 < x < L \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x,t) \Big|_{x=x_r}^{x=0} &= 0; u_0(t) \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_r}^{x=0} &= 0; u_{01}(t) \\ \frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x^i} \Big|_{x=x_r}^{x=0} &= 0; u_{0i}(x_r, t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t &\geq 0 \\ 0 &\leq t \leq T \end{aligned} \quad (17)$$

lub w zapisie ogólnym/dla najczęściej spotykanych warunków granicznych/

$$L_1[u(x,t) \Big|_{x=0}] = 0 \quad (18)$$

$$L_1[u(x,t) \Big|_{x=x_r}] = f(t) \quad (19)$$

gdzie: u - parametr fizyczny obiektu /funkcja stanu/,
 $f(t)$ - funkcja źródła zewnętrznego

$$M_1 \leq f(t) \leq M_2 \quad (20)$$

L_1 - operator liniowy warunków brzegowych.

Przykładowo dla równania

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + w \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\alpha}{\rho c_p g} [\partial_p u(x,t) - \partial(x,t)] \quad (21)$$

gdzie: ϑ - temperatura,
 W - prędkość przepływu płynu,
 α - współczynnik wnikania ciepła,
 C_p - ciepło właściwe,
 ρ - gęstość,
 S - wymiar poprzeczny.

w obszarze $0 \leq x \leq L$ oraz $t > 0$ mamy:

- warunki początkowe

$$\vartheta(x, 0) = \vartheta_2(x) \quad (22)$$

- warunki brzegowe

$$\vartheta(0, t) = \vartheta_1(t) \quad (23)$$

- ograniczenia nałożone na funkcję $\vartheta_p(x, t)$

$$\vartheta_{p1} \leq \vartheta_p(x, t) \leq \vartheta_{p2} \quad (24)$$

- ograniczenia nałożone na gradient funkcji $\vartheta_p(x, t)$

$$|\text{grad}_x \vartheta_p(x, t)| = \left| \frac{\partial \vartheta_p(x, t)}{\partial x} \right| \leq \vartheta_p \quad 25$$

10.6. Przegląd metod rozwiązywania równań różniczkowych liniowych cząstkowych, o stałych współczynnikach

Charakter równań różniczkowych cząstkowych /występują co najmniej dwie zmienne/ oraz złożone warunki graniczne stwarzają duże trudności w rozwiązywaniu takich równań. Opracowano wiele metod rozwiązywania, które można ująć w następujące grupy:

- metody analityczne/charakterystyk, szeregów, potencjałów, całkowe, wariacyjne itd /,
- metody różnicowe/iteracyjne, aproksymacyjne, kolejnych przesunięć, operatorowe itd /,
- metody modelowania /elektryczne, analogowe/,
- metody graficzne.

Spośród szeregu indywidualnych metod rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych konkretnej struktury na uwagę zasługują te metody, które dają się łatwo zastosować do zagadnień praktycznych oraz podatne są na zastosowanie maszyn liczących.

Do klasycznych metod rozwiązywania równań cząstkowych, opisujących modele obiektów inżynierii chemicznej o parametrach rozłożonych odnoszą się:

- metoda charakterystyk,
- metoda szeregów,
- metoda funkcji Greena,
- metoda potencjałów,
- metoda przekształceń całkowych,
- metoda sprowadzenia do równań całkowych oraz różniczkowych innego typu,
- metoda wariacyjna,
- metody modelowania.

Metoda charakterystyk oparta jest na rozwiązywaniu pewnego układu równań charakterystycznych /układ równań Cauchy'ego/. Jest to metoda najbardziej efektywna w zastosowaniu do rozwiązywania równań różniczkowych typu hiperbolicznego.

10.6.1. Metoda szeregów

W metodzie szeregów rozwiązanie przedstawia się w postaci nieskończonych szeregów, których wyrazami są pewne funkcje /np. które łatwo realizuje się za pomocą maszyny analogowej/. Do tej metody odnoszą się:

- metoda rozdzielania zmiennych,
- metoda funkcji harmonicznych,
- metoda superpozycji/metoda liniowo niezależnego układu rozwiązań szczególnych/.

Wymienione metody wymagają przy ich realizacji wykonania następujących operacji:

- zbudowanie szeregu obrazującego poszukiwane rozwiązanie,
- wyznaczenia współczynników w rozkładzie funkcji granicznej według wyznaczonych na konturze granicznym wyrazów szeregu,
- zbudowanie poszukiwanego rozwiązania na dowolnych konturach wnętrza obszaru dla dowolnych momentów.

Różnica pomiędzy metodami polega na sposobie tworzenia wyrazów szeregu. W metodzie rozdzielania zmiennych, jako rozwiązanie szczególne /wyrazy szeregu/ wykorzystuje się iloczyn funkcji dowolnych, z których każda zależy od jednej zmiennej. Zgodnie z tą metodą, rozwiązaniem równania

$$a(t) \frac{d}{dt} u = b(t) \frac{d}{dx} u + cu + f \quad (26)$$

$t \neq 0$

gdzie: $\frac{d}{dt} u, \frac{d}{dx} u$ - operatory zmiennej t oraz x ,

l, r - rząd operatora $\mathcal{L}_t$ oraz $\mathcal{L}_x$,

które po rozpisaniu operatorów przyjmie postać

$$a_0 \frac{\partial^l u(x,t)}{\partial t^l} + a_1 \frac{\partial^{l-1} u(x,t)}{\partial t^{l-1}} + \dots + a_{l-1} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - b_0 \frac{\partial^r u(x,t)}{\partial x^r} - b_1 \frac{\partial^{r-1} u(x,t)}{\partial x^{r-1}} - \dots - b_{r-1} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - c u(x,t) = f(x,t) \quad (27)$$

jest szereg

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(t) \varphi_i(x) \quad (28)$$

Funkcję własną ψ oraz funkcję φ wyznacza się z rozwiązania układu równań

$$\mathcal{L}_t(\psi) + \lambda \psi = f(t) \quad (29)$$

$$\mathcal{L}_x(\varphi) + \lambda \frac{b}{a} \varphi = 0 \quad (30)$$

gdzie $\{\lambda_i\}$ są wartościami własnymi operatora.

Praktycznie przyjmuje się skończoną liczbę szeregu równą N . Popełnia się błąd, ponieważ nie wszystkie współczynniki rozkładu, rozpoczynając od $N+1$, są równe zero. Dokładność aproksymacji ocenia się błędem średniokwadratowym /aproksymacja w sensie metody najmniejszych kwadratów/

$$\sigma_N^2 = \int_a^b \left[F(x) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \right]^2 \varphi(x) dx \quad (31)$$

Gdzie: $F(x)$ - funkcja aproksymowana uogólnionym szeregiem Fouriera,

$\varphi_k(x)$ - funkcja tworząca wielomian ortogonalny,

$\varphi(x)$ - funkcja wagowa,

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_m(x) \varphi(x) dx = \delta_{km} \quad (32)$$

c_k - współczynniki.

Jeżeli wartości własne /lub funkcje własne/ są niezliczalne, to zbudowanie szeregu jest niemożliwe i rozpatruje się analog szeregów - całkę Fouriera

$$F(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega \quad (33)$$

gdzie:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

Otrzymane rozwiązanie w postaci szeregu (28) lub całki niewłaściwej (33) ma sens rozwiązania formalnego i wymaga sprawdzenia sensu fizycznego oraz spełnienia własności granicznych/warunki graniczne, zachowanie się asymptotyczne, holomorficzność/.

Dla równania (27) oraz dwóch zmiennych t i x rozwiązanie poszukuje się dla obszaru

$$\begin{aligned} t &> t_0 \\ x_0 &< x < x_1; \Omega \in [x_0, x_1] \end{aligned} \quad (34)$$

10.6.2. Metoda przekształceń całkowych

Rozwiązanie równań różniczkowych cząstkowych, o stałych współczynnikach metodą przekształceń całkowych sprowadza się do transformacji, wyraz po wyrazie, oryginału równania, z uwzględnieniem warunków granicznych. Po wykonaniu odpowiednich przekształceń algebraicznych w wyniku transformacji odwrotnej otrzymujemy oryginał rozwiązania.

Używane są następujące przekształcenia całkowe/wymieniono najczęściej stosowane/:

- przekształcenie Fouriera /zespolone, kosinus, sinus/,
- przekształcenie Laplace'a,
- przekształcenie Mellina,
- przekształcenia oparte na funkcjach Bessela,
- przekształcenie Gaussa-Weierstrassa,
- przekształcenia oparte na wielomianach ortogonalnych.

Przekształcenie Gaussa-Weierstrassa /Hille/ jest powiązane z przekształceniem Laplace'a i ma zastosowanie do równań z operatorem typu divgrad /równania przewodności cieplnej/. Jądro tego przekształcenia powiązane jest z funkcją Greena. W porównaniu do innych przekształceń, które sprowadzają równania różniczkowe do jednej zmiennej w dziedzinie obrazów, przekształcenie Hille daje bezpośrednio rozwiązanie równania.

Proste i odwrotne przekształcenia Gauss-Weierstrassa określone są całkami

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{(s-t)^2}{4}} ds \quad (35)$$

$$f(t) = \frac{1}{j\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{t+j\infty} F(s) e^{\frac{(s-t)^2}{4}} ds \quad (36)$$

Przekształcenie ortogonalne oparte jest na rozkładzie funkcji w szereg

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \psi_n \quad (37)$$

gdzie: $F(n)$ - współczynniki Fouriera,
 $\{\psi_n\}$ - układ funkcji ortogonalnych.

Przekształcenie (37) jest przekształceniem odwrotnym. Jako funkcje ortogonalne przyjmuje się funkcje własne pewnego samosprzężonego operatora S

$$S = \psi_0 D^{n_1} \psi_1 D^{n_2} \dots D^{n_j} \psi_j \quad (38)$$

gdzie:

n_j - liczby całkowite dodatnie,
 ψ_j - funkcje holomorficzne niezerowe.

Operator S spełnia zależność

$$S\psi_n = \lambda_n \psi_n ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (39)$$

gdzie: λ_n - liczby rzeczywiste /wartości własne operatora S /,
 ψ_n - funkcje własne operatora S /klasyczne wielomiany ortogonalne oraz funkcje innych standardowych układów ortogonalnych/.

Dla dowolnej funkcji f , wobec wzorów (37) oraz (39), otrzymamy

$$S^k f = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \lambda_n^k \psi_n \quad (40)$$

Jeżeli do równania różniczkowego

$$M(S)u = g \quad (41)$$

zastosujemy przekształcenie ortogonalne, to otrzymamy obraz tego równania

$$M(\lambda_n)U(n) = G(n) \quad (42)$$

Dzieląc równanie (42) obustronnie przez $M(\lambda_n) \neq 0$ oraz stosując przekształcenie odwrotne (37), otrzymamy rozwiązanie równania (41)

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(n)}{M(\lambda_n)} \psi_n \quad (43)$$

Przekształcenie ortogonalne wymaga aby równanie różniczkowe cząstkowe przedstawione było w odpowiednim układzie współrzędnych. Tak na przykład, przekształcenie Legendre'a stosuje się do rozwiązania równania Laplace'a, zapisanego we współrzędnych kulistych. Przekształcenie Hankela nadaje się do rozwiązywania równania Laplace'a oraz równania przewodnictwa cieplnego, zapisanych we współrzędnych walowych.

Przedział całkowania, operator S , wartość własną oraz funkcję własną dla różnych przekształceń podano w poniższym zestawieniu:

- przekształcenie Fouriera skończone

$$-\pi, \pi; -jD; n; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jnx}; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (44)$$

- przekształcenie Hermite'a

$$-\infty, \infty; D^2 - x^2 + 1; -2n; \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{[2^n n! \sqrt{\pi}]^{1/2}}; n=0, 1, 2, \dots$$

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^N \frac{(-1)^m 2^m x^{n-2m}}{m! (n-2m)!} \quad (45)$$

$$N = \frac{n}{2}; n - \text{parzyste},$$

$$N = \frac{n-1}{2}; n - \text{nieparzyste}$$

- przekształcenie Legendre'a

$$-1, 1; D(x^2 - 1)D; n(n+1); \sqrt{n+1/2} P_n(x); n=0, 1, 2, \dots$$

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^N \frac{(-1)^m (n)!}{m! (n-2m)!} x^{n-2m} \quad (46)$$

Teorię przekształceń Fouriera jednej zmiennej można rozszerzyć na funkcje wielu zmiennych. Wielowymiarowe / n / transformaty Fouriera proste i odwrotne wyznaczają się ze wzorów

$$F_n(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n f(\bar{x}) e^{-j\bar{\omega} \bar{x}} d\bar{x} \quad (47)$$

$$f(\bar{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n F(\bar{\omega}) e^{j\bar{\omega} \bar{x}} d\bar{\omega} \quad (48)$$

gdzie $\bar{\omega} \bar{x} = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n$.

Jeżeli we wzorze (47) dla dwóch zmiennych x_1 oraz x_2

$$F(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad (49)$$

wprowadzimy współrzędne biegunowe

$$x_1 = \rho \cos \theta; x_2 = \rho \sin \theta; \omega_1 = \omega \cos \varphi; \omega_2 = \omega \sin \varphi$$

to otrzymamy wzór

$$F(\omega, \varphi) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\rho, \theta) e^{-j\rho\omega(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)} \rho d\rho d\theta \quad (50)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$f(\rho, \theta) = j^{-\mu} q(\rho) e^{j\mu\theta} \quad (51)$$

$$\psi = \theta - \varphi \quad (52)$$

do całki (50) otrzymamy wzór

$$F(\omega) = j^{-\mu} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} q(\rho) e^{-j\rho\omega\cos\psi + j\mu\psi} \rho d\rho d\psi \quad (53)$$

Całka wewnętrzna stanowi przekształcenie funkcji Bessela

$$\gamma_{\mu}(\rho, \omega) = \frac{j^{-\mu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\rho\omega\cos\psi + j\mu\psi} d\psi \quad (54)$$

Wobec wzoru (54) otrzymamy nowe przekształcenie /przy zamianie ω na s oraz ρ na x /

$$\chi_{\mu}(s) = 2\pi \int_0^{\infty} x \gamma_{\mu}(x, s) q(x) dx \quad (55)$$

nazywane przekształceniem Hankela rzędu μ /przekształcenie proste/. Odwrotne przekształcenie określa się całką

$$q(x) = \int_0^{\infty} s \gamma_{\mu}(x, s) \chi_{\mu}(s) ds \quad (56)$$

którą można przedstawić w innej postaci

$$f(x, \theta) = j^{\mu} e^{j\mu\theta} \int_0^{\infty} s \gamma_{\mu}(x, s) \chi_{\mu}(s) ds \quad (57)$$

10.6.2.1. Przekształcenie Laplace'a, wielowymiarowe

Jeżeli funkcja $f(\bar{x})$ jest oryginałem obrazu $F(\bar{s})$, to zależność pomiędzy tymi funkcjami można zapisać symbolicznie w postaci

$$f(\bar{x}) \hat{=} F(\bar{s}) \quad (58)$$

Obraz $F(\bar{s})$ wyznacza się ze wzoru /przekształcenie proste/

$$F(s_1, s_2, \dots, s_n) = \int_{E_+^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n s_i x_i\right) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dV_x \quad (59)$$

gdzie: $E_+^n = \underbrace{E_+^1 \dots E_+^1}_n$
 $dV_x = \prod_{i=1}^n dx_i$

Jeżeli obraz $F(\bar{s})$ ma oryginał, to funkcję $f(\bar{x})$ wyznacza się ze wzoru /przekształcenie odwrotne/

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{B_r^n} \exp\left(\sum_{i=1}^n s_i x_i\right) F(s_1, s_2, \dots, s_n) dV_s \quad (60)$$

gdzie: B_r^n - kontur n wymiarowy ($\alpha_i - j\infty; \alpha_i + j\infty; i = \overline{1, n}; \operatorname{Re} s_i = \alpha_i > \alpha_i^0$)

$$dV_s = \prod_{i=1}^n ds_i$$

$\int_{B_r^n}$ - całka n -krotna.

W obliczeniach technicznych najczęściej $n=2$. Wzory (59) oraz (60) przyjmą postacie /wprowadzono oznaczenia: $x_1=x, x_2=t, s_1=s, s_2=p, \alpha_1=\alpha; \alpha_2=\sigma$ /

$$F(p, s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st - px} f(x, t) dx dt \quad (61)$$

$$f(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} e^{st + px} F(p, s) ds dp \quad (62)$$

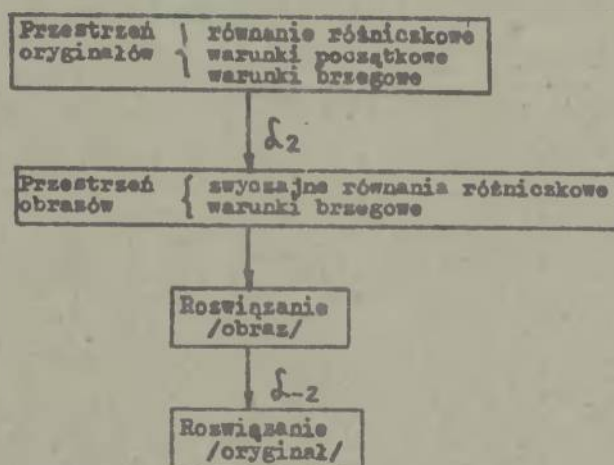
Transformaty Laplace'a pochodnych funkcji $f(x, t)$ określone są następującymi wzorami definicyjnymi:

$$\mathcal{L}_2\left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\right] = s \mathcal{L}_2[f(x, t)] - \mathcal{L}^{(x)}[f(x, 0)] \quad (63)$$

$$\mathcal{L}_2\left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\right] = p \mathcal{L}_2[f(x, t)] - \mathcal{L}^{(t)}[f(x_r, t)] \quad (64)$$

$$\mathcal{L}_2\left[\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}\right] = p^2 \mathcal{L}_2[f(x, t)] - p \mathcal{L}^{(t)}[f(x_r, t)] - \mathcal{L}^{(t)}[f_x(x_r, t)] \quad (65)$$

Rozwiązanie równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach metodą przekształceń całkowych Laplace'a / $\mathcal{L}$ / realizuje się według schematu pokazanego na rysunku 29.



Rys. 29. Rozwiązanie równań cząstkowych metodą przekształceń Laplace'a

Metoda przekształceń Laplace'a ma zastosowanie do równań typu hiperbolicznego oraz parabolicznego. Dla równań typu eliptycznego obraz rozwiązania może nie mieć oryginału.

Własności przekształceń Laplace'a $\mathcal{L}$ zestawiono w tablicy 3.

Tablica 3

Własności przekształcenia

Lp	Oryginał / $f(x_1, x_2)$ /	Obraz / $F(s_1, s_2)$ /
1	$(-x_1)^m (-x_2)^n f(x_1, x_2)$	$\frac{\partial^{m+n}}{\partial s_1^m \partial s_2^n} F(s_1, s_2)$
2	$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x_1^k \partial x_2^l} [(-x_1)^m (-x_2)^n \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}]$	$x_1^k x_2^l \frac{\partial^{m+n}}{\partial s_1^m \partial s_2^n} [s_1 s_2 F(s_1, s_2)]$
3	$(-x_1)^m (-x_2)^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial x_1^m \partial x_2^n} f(x_1, x_2)$	$\frac{\partial^{m+n}}{\partial s_1^m \partial s_2^n} \left[s_1^{m-1} s_2^{n-1} \frac{\partial^2 F(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2} \right]$
4	$\frac{\partial^n}{\partial x_1^n} f(x_1, x_2)$	$s_1^n F(s_1, s_2) - \sum_{\nu=0}^{n-1} s_1^{n-\nu-1} \mathcal{L}^{(x_1)} \left[f_{x_1}^{(\nu)}(0, x_2) \right]$
5	$\frac{\partial^n}{\partial x_2^n} f(x_1, x_2)$	$s_2^n F(s_1, s_2) - \sum_{\nu=0}^{n-1} s_2^{n-\nu-1} \mathcal{L}^{(x_2)} \left[f_{x_2}^{(\nu)}(x_1, 0) \right]$

Id	Oryginał / f x ₁ , x ₂ /	Obraz / F s ₁ , s ₂ /
6	$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x_1^m \partial x_2^n} f(x_1, x_2)$	$s_1^m s_2^n F(s_1, s_2) - \sum_{\nu=0}^{n-1} s_2^{n-\nu-1} \frac{(x_2)}{d} [f_{x_2}^{(\nu)}(x_1, 0)] -$ $- \sum_{\mu=0}^{m-1} s_1^{m-\mu-1} \frac{(x_1)}{d} [f_{x_1}^{(\mu)}(0, x_2)] +$ $+ \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} s_1^{m-\mu-1} s_2^{n-\nu-1} f_{x_1^{\mu} x_2^{\nu}}^{(m+n)}(0, 0)$
7	$f(x_1+a, x_2+b)$	$e^{as_1+bs_2} [F(s_1, s_2) - \int_0^a e^{-s_1 \tau} d \int_0^b [f(\xi, \eta)] d\xi -$ $- \int_0^b s_2 \eta \frac{(x_2)}{d} [f(\tau, \eta)] d\eta + \int_0^a \int_0^b e^{-s_1 \tau - s_2 \eta} f(\tau, \eta) d\tau d\eta]$
8	$f(x_1-a, x_2-b)$	$e^{-as_1-bs_2} F(s_1, s_2) \quad a, b > 0$
9	$e^{-ax_1-bx_2} f(x_1, x_2)$	$F(s_1+a, s_2+b)$
10	$\frac{1}{ab} f(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b})$	$F(as_1, bs_2)$
11	$\frac{f(x_1, x_2)}{x_1 x_2}$	$\int_{s_1}^{\infty} \int_{s_2}^{\infty} F(\lambda, \tau) d\lambda d\tau$
12	$\int_{x_1}^{\infty} \int_{x_2}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{\xi \eta} d\xi d\eta$	$\frac{1}{s_1 s_2} \int_{s_1}^{\infty} \int_{s_2}^{\infty} F(\lambda, \tau) d\lambda d\tau$
13	$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{\xi \eta} d\xi d\eta$	$\frac{1}{s_1 s_2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(\lambda, \tau) d\lambda d\tau$
14	$\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f_1(\xi, \eta) f_2(x_1-\xi, x_2-\eta) d\xi d\eta$	$F_1(s_1, s_2) F_2(s_1, s_2)$
15	$f_1(x_1, x_2) f_2(x_1, x_2)$	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F_1(s-\lambda, s_2) F_2(\lambda, s_2) d\lambda$

Poszukiwanie oryginału rozwiązania, zadanego w obszarze obrazów, realizuje się dwoma sposobami:

- przez zastosowanie operacji $\mathcal{L}^{-2}$ do obrazu /jeżeli dysponujemy tabelą transformat $\mathcal{L}_2$ /,
- przez poszukiwanie oryginału, stosując kolejno operacje $\mathcal{L}^D_{-1}$ oraz $\mathcal{L}^S_{-1}$ /wystarczy znać obszerną tabelę transformat $\mathcal{L}$ /.

Jeżeli równanie

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + u(x,t) = m(x,t) \quad (66)$$

z warunkami granicznymi

$$u(x,t) \Big|_{t=0} = u_{00}(x); u(x,t) \Big|_{x=0} = u_0(t); \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ t \geq 0}} u(x,t) = 0 \quad (67)$$

poddany działaniu operatora $\mathcal{L}_2$ (61), to otrzymamy obraz

$$[sU(p,s) - u_{00}(p)] + v[pU(p,s) - u_0(s)] + U(p,s) = M(p,s) \quad (68)$$

z którego wynika obraz rozwiązania równania (66)

$$U(p,s) = \frac{M(p,s) + u_{00}(p) + u_0(s)}{s + vp + 1} \quad (68a)$$

Zgodnie z zależnością

$$\frac{1}{as + bp + 1} F(p,s) \hat{=} \begin{cases} \frac{1}{a} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{a}} f(t-\tau, x - \frac{b}{a}\tau) d\tau; x > \frac{b}{a}\tau & (69) \\ \frac{1}{b} \int_0^x e^{-\frac{x-\eta}{b}} f(t - \frac{a}{b}\eta, x-\eta) d\eta; x < \frac{b}{a}\tau & (70) \end{cases}$$

oryginałem obrazu (68a) będzie wyrażenie

$$u(x,t) = \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{v}} f(t-\tau, x - v\tau) d\tau + e^{-\frac{x}{v}} u_0(t - \frac{x}{v}) + e^{-\frac{t}{v}} u_{00}(x - vt) \quad (71)$$

Jeżeli równanie

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (72)$$

z warunkami granicznymi

$$u(x,t) \Big|_{t=0} = 0; D u_x(x,t) \Big|_{x=0} = u_0; \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ t \geq 0}} u(x,t) = 0 \quad (73)$$

poddany działaniu przekształcenia $\mathcal{L}_1^{t \rightarrow s}$, to otrzymamy obraz tego równania

$$sU(x,s) - u(x,0) = D \frac{d^2 U(x,s)}{dx^2} \quad (74)$$

Rozwiązaniem równania (74) jest funkcja $U(x,s)$

$$U(x,s) = C_1 \exp\left[\left(\sqrt{\frac{s}{D}}\right)x\right] + C_2 \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{s}{D}}\right)x\right] \quad (75)$$

z warunkami granicznymi

$$\alpha[U_0(t)] = \frac{U_0}{s} \quad (76)$$

$$\alpha\left[\lim_{x \rightarrow \infty} U(x,t)\right] = 0 \quad (77)$$

Wobec zależności (77), stała $C_1 = 0$. Stąd rozwiązanie (75) przyjmuje postać

$$U(x,s) = C_2 \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{s}{D}}\right)x\right] \quad (78)$$

Stałą C_2 wyznacza się z warunku

$$DC_2 \left(-\sqrt{\frac{s}{D}}\right) \left\{ \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{s}{D}}\right)x\right]_{x=0} \right\} = \frac{U_0}{s} \quad (79)$$

jako

$$C_2 = -\left(\frac{U_0}{sD}\right)\left(\frac{D}{s}\right)^{1/2} \quad (80)$$

Uwzględniając zależność (80) w rozwiązaniu (75), otrzymamy

$$U(x,s) = -\frac{U_0}{sD} \left(\frac{D}{s}\right)^{1/2} \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{s}{D}}\right)x\right] \quad (81)$$

Stosując przekształcenie $\alpha^{-1}_{-1} s \rightarrow t$ do zależności (81), otrzymamy oryginalne rozwiązanie równania różniczkowego (72)

$$u(x,t) = -\frac{U_0}{\sqrt{D}} \left[2\left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) - \frac{x}{\sqrt{D}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \right] \quad (82)$$

10.6.3. Rozwiązywanie cząstkowych równań różniczkowych przy w- życiu maszyn cyfrowych oraz analogowych

Spośród metod rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych znaczenie praktyczne mają obecnie metody wykorzystujące maszyny cyfrowe analogowe oraz układy hybrydowe. Maszyny analogowe są stosowane do

równań z jedną zmienną, zaś maszyny cyfrowe do krokowego całkowania czasu. Programowanie zagadnień na maszynę cyfrową, wobec istnienia specjalnych języków maszynowych, translatorów oraz bibliotek programów, jest mniej pracochłonne niż programowanie zagadnień na maszynę analogową.

Elastyczność maszyn cyfrowych jest znaczenie większa niż maszyn analogowych z uwagi na istnienie pamięci i łatwości wymiany programów.

Maszyny cyfrowe są droższe w eksploatacji, nie dają przejrzystej informacji oraz kontakt z maszyną cyfrową jest trudniejszy niż z maszyną analogową. Czas obliczeń na maszynie cyfrowej zależy od rodzaju maszyny, programu i sposobu komunikacji z urządzeniami zewnętrznymi.

Dokładność obliczeń na maszynie analogowej nie przekracza 1-3%, natomiast za pomocą maszyny cyfrowej osiąga się dowolną dokładność.

Maszyny analogowe najlepiej nadają się do obliczeń typu jakościowego, symulacji, sterowania itp.

Zalety poszczególnych maszyn można wykorzystać, tworząc układy analogowo-cyfrowe, zwane układami hybrydowymi. Maszyny mogą pracować równolegle i szeregowo. Maszynę analogową wykorzystuje się do rozwiązywania części układu równań, zawierających szybkie zmiany zmiennych, gdy błąd rozwiązania mało wpływa na ogólną dokładność wyników,

Maszynę cyfrową zaś używa się do rozwiązywania tej części równań, gdzie istnieje sztywne sprzężenie pomiędzy błędem obliczeń a dokładnością rozwiązania lub gdy są operacje logiczne. Maszyna cyfrowa ponadto może służyć jako źródło informacji /pamięć/ lub być użyta do sterowania schematami analogowymi. Możliwość użycia maszyny cyfrowej do analizy statystycznej a maszyny analogowej do analizy dynamicznej wymaga zastosowania jednolitego programowania. W celu przyspieszenia wymiany informacji pomiędzy maszynami racjonalne jest, aby w układzie hybrydowym, w części analogowej, była wyspecjalizowana maszyna cyfrowa ze sterowaniem automatycznym. Miałaby ona za zadanie wykonywanie operacji cyklicznych, korygujących rozwiązanie. Maszyna analogowa wykonywałaby operacje algorytmiczne.

10.7. Charakterystyki dynamiczne

10.7.1. Wstęp

Podstawowymi charakterystykami dynamicznymi obiektów oparametrach rozłożonych, podobnie jak dla obiektów o parametrach skupionych są: charakterystyka impulsowa, charakterystyka skokowa, charakterystyka częstotliwościowa amplitudowo-fazowa oraz funkcja przejścia. Charakterystyki te wyznacza się z równań modelu matematycznego lub modelu

fizycznego oraz z pomiarów doświadczalnych. Charakterystyki dynamiczne, wyznaczone z równań modelowych, mają parametry wyrażone przez geometrię aparatu, własności medium oraz kinetykę procesu. W obliczeniach praktycznych parametrom tym przypisuje się wartości skończone.

Jedynym źródłem określającym wartości parametrów charakterystyk dynamicznych jest pomiar doświadczalny.

Wyznaczenie charakterystyk dynamicznych obiektu, przy zadanych sygnałach wejściowych, sprowadza się do analizy procesu wyjściowego. Aparat matematyczny analizy zależy od postaci sygnału $u(\bar{x}, t)$.

Pomiar sygnału wyjściowego można zrealizować dla:

- ciągłego czasu i dyskretnej przestrzeni $\{u(\frac{t}{T} - k, t)\}$ dla n punktów przestrzeni,
- dyskretnego czasu i dyskretnej przestrzeni $\{u(x_i, t), u[x_i, (k + \frac{t}{T})], \dots, u[x_n, (k + \frac{n-1}{N}T)]\}$.

Przez pomiar wielkości u , ciągłej w czasie w dyskretnych punktach przestrzeni, należy rozumieć pomiar w otoczeniu ϵ punktu pomiarowego. Dla hiperprzestrzeni dwuwymiarowej $\bar{x} \in (x, t)$ otrzymany

$$u_i(x_i, \epsilon, t) = \int_{x_i - \epsilon}^{x_i + \epsilon} q_i(x) u(x, t) dx \quad (83)$$

gdzie: ϵ - otoczenie punktu i na osi x ,

$q_i(x)$ - funkcja wagowa.

Do analizy sygnałów wyjściowych zarejestrowanych analogowo w n punktach przestrzeni stosuje się metody analityczne z uwzględnieniem elementów rachunku interpolacyjnego oraz ekstrapolacyjnego. Jeżeli metody analityczne zawodzą, to stosuje się metody przybliżone. Do najczęściej stosowanych metod przybliżonych numerycznych należy metoda różnicowa /metoda siatek/. Równanie różniczkowe zastępuje się równaniem różnicowym, tj. pole ciągle aproksymuje się funkcjami dyskretnymi przestrzeni oraz czasu. Metoda numeryczna dostosowuje się w sposób naturalny do postaci wyników pomiaru sygnału wyjściowego.

W niektórych zagadnieniach /skomplikowane warunki brzegowe/, bez względu na sposób pomiaru wielkości $u(\bar{x}, t)$, metoda różnicowa jest jedyną praktycznie przydatną metodą. Jest to metoda elementarnie prosta w użyciu, w wyniku działania której otrzymuje się rozwikłany układ równań różnicowych, łatwych do rozwiązywania. Rozwiązanie takie określa zjawisko w przybliżeniu. Otrzymanie dokładnego rozwiązania wymaga dużej liczby żmudnych obliczeń i skomplikowanych programów maszynowych. Obliczenia realizuje się w oparciu o schematy siatkowe. Błąd rozwiązania przybliżonego zależy od liczby punktów schematu /w siatkach prostych wzrost liczby punktów pociąga za sobą jedynie wzrost liczby operacji algebraicznych/. Wybór schematu siatkowego określa dokładność aproksymacji, a prędkość otrzymania tej dokładności

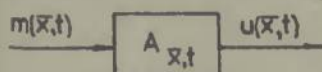
zależy od metody rozwiązywania.

Metoda cyfrowo-analogowa jest najefektywniejszą metodą rozwiązywania dowolnych cząstkowych równań różniczkowych.

10.7.2. Operator modelu

Wymuszenie m /skupione lub rozłożone, sterujące lub zakłócające / wprowadzone do obiektu dynamicznego / przy niedużych amplitudach wymuszenia, wiele obiektów o parametrach rozłożonych można traktować jako obiekty ustalone i liniowe/ wywoła na wyjściu z obiektu sygnał odpowiedzi rozłożony w przestrzeni oraz w czasie /rysunek 30/

Funkcje $u(\bar{x}, t)$ oraz $m(\bar{x}, t)$ powiązane są ze sobą zależnością



$$A_{\bar{x}, t}[u(x', t)] = m(\bar{x}^{\parallel}, t) \quad (84)$$

gdzie: $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ - zmienne / tj. argumenty

przestrzeni wejście -

wyjście/ określone w

obszarach Ω' oraz Ω''

/jeżeli sygnały $m(\bar{x}, t)$

oraz $u(\bar{x}, t)$ określone

są w tym samym obsza-

rze, to $\Omega' = \Omega'' = \Omega$ i $\bar{x}' = \bar{x}'' = \bar{x}$,

Rys. 30. Operator modelu obiektu o parametrach rozłożonych

$m(\bar{x}, t)$ - wymuszenie, które może być zadane w postaci m i t , m i $\bar{x}$ lub m i $\bar{x}, t$,

$A_{\bar{x}, t}$ - operator opisujący statykę i dynamikę obiektu o parametrach rozłożonych.

Operator A , ze względu na operacje matematyczne, składa się z dwóch członów

$$A = A_t + A_{\bar{x}} \quad (85)$$

gdzie:

$$A_t = \sum_{j=0}^m a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} \quad (86)$$

$$A_{\bar{x}} = \sum_{i=0}^n b_i \frac{\partial^i}{\partial \bar{x}^i} \quad (87)$$

Operator A , ze względu na przekształcenie sygnałów, w ogólnym przypadku można przedstawić w postaci

$$A = (A_1, A_2, A_3) \quad (88)$$

gdzie: A_1 - operator przekształcający wielkość wejściową $m(\bar{x}, t)$ w pole wielkości charakteryzujących wewnętrzną strukturę obiektu,

A_2 - operator przekształcający jeden stan struktury wewnętrznej obiektu w stan drugi /np. procesy kinetyczne/,

A_3 - operator przekształcający wielkości charakteryzujące wewnętrzną strukturę obiektu w wielkość wyjściową.

W celu zaprojektowania obiektu należy wyznaczyć, w oparciu o metody modelowania, wszystkie trzy składowe operatory A i wykorzystać część ustaloną.

W celu zaprojektowania układu regulacji wystarczy wyznaczyć operator A z pomiarów procesu wyjściowego przy zadanym sygnale wejściowym.

10.7.3. Charakterystyka impulsowa

Charakterystyka impulsowa jest odpowiednikiem operatora $A_{\bar{x}, t}$ w dziedzinie oryginałów. Wyznacza się ją dwoma sposobami:

- przez rozwiązanie równania niejednorodnego, opisującego dynamikę obiektu z prawą częścią równania w postaci δ -funkcji Diraca o intensywności $m(\bar{x})$ /może być $m(\bar{x}) = 1$ /,
- przez zastosowanie odwrotnego przekształcenia Laplace'a do funkcji przejścia.

Jeżeli do równania (84), zapisanego w postaci

$$A_{\bar{x}} u(\bar{x}) = m(\bar{x}) \quad (89)$$

zastosujemy przekształcenie całkowe odwrotne / gdy operator $A_{\bar{x}}^{-1}$ istnieje/, to otrzymamy rozwiązanie tego równania w dziedzinie oryginałów

$$A_{\bar{x}}^{-1} [A_{\bar{x}} u(\bar{x})] = u(\bar{x}) = A_{\bar{x}}^{-1} * m(\bar{x}) \quad (90)$$

gdzie: $\bar{x} = (\bar{x}, t)$ - punkty czasoprzestrzeni /hiperprzestrzeni czterowymiarowej $\mathbb{R}^4$ / określonej jako $\{\Omega \times [t_p, t_k]\}$.

$A_{\bar{x}}^{-1}$ - operator odwrotny do operatora $A_{\bar{x}}$ / w zagadnieniach praktycznych jest operatorem liniowym całkowym/.

Jeżeli wymuszenie $m(\bar{x})$ działa w skończonej liczbie obszarów K , które można identyfikować punktami ze zmienną intensywnością, to każdy sygnał można zapisać w postaci

$$\lim_{1+\varepsilon \rightarrow 1} \int_{1+\varepsilon} m_{\varepsilon}(\bar{x}') d\bar{x}' = m_K(\bar{x}) \quad (91)$$

gdzie: ε - obszar,

$m_{\varepsilon}(\bar{x})$ - wymuszenie dla obszaru ε .

Wobec zależności (91) sygnał $m(\bar{x})$ można zapisać w postaci

$$m(\bar{x}) = \sum_{k=1}^K m_k(t) \phi_k(\bar{x}) \quad (92)$$

gdzie: $m_k(t)$ - intensywność wymuszenia,

$\phi_k(\bar{x})$ - funkcja charakterystyczna spełniająca warunki ortogonalności /funkcja wagowa jest równa jedności/.

Przy takiej interpretacji sygnału $m(\bar{x})$, funkcję charakterystyczną będzie jednostkowa funkcja Diraca

$$\delta(\bar{x}-\bar{x}') = \begin{cases} 0; & \bar{x} \neq \bar{x}' \\ 1; & \bar{x} = \bar{x}' \end{cases} \quad (93)$$

Stosując własność r wymiarowej $1/r+1$ δ -funkcji do $m(\bar{x})$, otrzymamy całkę spłotu

$$\int_E m(\bar{x}') \delta(\bar{x}-\bar{x}') d\bar{x}' = m(\bar{x}) \quad (94)$$

która dla współrzędnych prostokątnych przyjmuje postać

$$\int_{-\infty}^{\infty(r)} m(\bar{x}') \delta(\bar{x}'-\bar{x}) d\bar{x}' = m(\bar{x}) \quad (95)$$

gdzie: $\delta(\bar{x}'-\bar{x}) = \delta(x'_1-x_1, \dots, x'_n-x_n; t-\bar{t})$

$\int_{-\infty}^{\infty(r)}$ - r wymiarowa całka Duhamela.

Wzór (95) można przedstawić w postaci całki Stieltesa

$$\int_{-\infty}^{\infty(r)} m(\bar{x}') d1(\bar{x}'-\bar{x}) d\bar{x}' = m(\bar{x}) \quad (96)$$

gdzie $1(\bar{x}'-\bar{x})$ oznacza r wymiarową funkcję jednostkową.

Wprowadzając wielkość $m(\bar{x})$ określoną wzorem (94) do równania (90) oraz biorąc pod uwagę fakt, że operator $A_{\bar{x}}^{-1}$ działa tylko na wektor $\bar{x}$, dla zerowych warunków granicznych otrzymamy zależność

$$u(\bar{x}) = \int_E m(\bar{x}') A_{\bar{x}}^{-1} \delta(\bar{x}-\bar{x}') d\bar{x}' \quad (97)$$

Z zależności (97) wynika określenie charakterystyki impulsowej obiektu o parametrach rozłożonych

$$g(\bar{x}\bar{x}', t-\tau) = A_{\bar{x}}^{-1} \delta(\bar{x}-\bar{x}') \quad (98)$$

Charakterystyka impulsowa /funkcja Greena/ wskazuje, jak zmienia się odpowiedź obiektu $u(\bar{x})$ w punkcie $\bar{x}$ jeżeli wymuszeniem $m(\bar{x})$ jest δ -funkcja r wymiarowa różna od zera w punkcie $\bar{x}'$.

Wobec zależności (98) wzór (97) przyjmie postać

$$u(\bar{x}) = \int_E g[\bar{x}, \bar{x}', x^r - (x^r)'] m(\bar{x}') d\bar{x}' \quad (99)$$

Wzór ten, po rozdzieleniu hiperprzestrzeni E na przestrzeń Ω oraz przedział czasu $[t_0, t]$, można zapisać w postaci całki spłotu

$$u(\bar{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_0}^t g(\bar{x}, \bar{x}', t-\tau) m(\bar{x}', \tau) d\bar{x}' d\tau \quad (100)$$

Wzory (99) oraz (100) są rozwiązaniem równania (89) w postaci superpozycji elementarnych rozwiązań $g(\bar{x}, \bar{x}') m(\bar{x}')$ z punktami osobliwymi $x=x'$. Rozwiązanie to można traktować jako wynik działania wymuszeń $\delta(\bar{x}-\bar{x}')\delta(t-\tau)$ w punktach x' oraz w momentach τ o intensywności $m(x, t)$.

Funkcja Greena $g(\bar{x}, \bar{x}', \tau)$ wraz z pochodnymi jest ciągła wewnątrz obszaru Ω poza punktami x' , gdzie znajdują się źródła oraz spełnia jednorodne warunki graniczne wszędzie poza punktami x' . Funkcja Greena w punkcie x' powinna mieć osobliwość charakteryzującą wymuszenie jednostkowe, a więc powinna spełniać warunek

$$\int_{\omega(\bar{x}')} \frac{\partial}{\partial r} g(\bar{x}, \bar{x}', t-\tau) d\omega = 1 \quad (101)$$

gdzie $\omega(\bar{x}')$ oznacza otoczenie punktów x' .

Dla obiektów fizycznie realizowalnych, funkcja Greena przy $t=\tau$ jest równa zero

$$g(\bar{x}, \bar{x}', t-\tau) = 0 \quad (102)$$

oraz spełnia zasadę wzajemności /jeżeli warunki graniczne nie są samosprężne, to funkcja Greena jest niesymetryczna/

$$g(\bar{x}, \bar{x}', t-\tau) = g(\bar{x}', \bar{x}, \tau-t) \quad (103)$$

Dla obiektów, których modele matematyczne opisane są równaniami różniczkowymi o zmiennych współczynnikach, charakterystyka impulsowa ma postać

$$g(\bar{x}, \bar{x}', t-\tau) = g(\bar{x}, t; \bar{x}', \tau) \quad (104)$$

Przykładowo, jeżeli do równania modelu obiektu o parametrach rozłożonych

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u_v \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + ku(x,t) = ku_z(x,t) \quad (105)$$

zastosujemy przekształcenie Laplace'a, to otrzymamy rozwiązanie tego równania w postaci

$$U(p,s) = \frac{-kU_z(p,s) - U_{00}(p) + (Dp - v)U_0(0,s) + DU'_0(0,s)}{Dp^2 - vp - s - k} \quad (106)$$

Funkcje $U_0(0,s)$ oraz $U'_0(0,s)$ określa się z warunków granicznych. Przykładowo, warunki takie mogą być określone równaniami

$$-D \frac{dU(x,s)}{dx} \Big|_{x=0} + vU(0,s) = F(s) \quad (107a)$$

$$D \frac{dU(x,s)}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (107b)$$

Wykonując przekształcenie $d^P \rightarrow x$ równania (106), otrzymamy rozwiązanie

$$U(x,s) = \Psi(x,s) + \left(\frac{DP_1 - v}{2DP_1 - v} e^{P_1 x} + \frac{DP_2 - v}{2DP_2 - v} e^{P_2 x} \right) U_0(0,s) + DU'_0(0,s) \left(\frac{e^{P_1 x}}{2DP_1 - v} + \frac{e^{P_2 x}}{2DP_2 - v} \right) \quad (108)$$

które po wprowadzeniu do zależności (107) daje układ równań, z których wynikają rozwiązania określające funkcje $U_0(0,s)$ oraz $U'_0(0,s)$

$$U_0(0,s) = \frac{\frac{P_1}{2DP_1 - v} e^{P_1 L} + \frac{P_2}{2DP_2 - v} e^{P_2 L} + \Psi(L,s)}{P_1 \frac{DP_1}{2DP_1 - v} e^{P_1 L} + P_2 \frac{DP_2}{2DP_2 - v} e^{P_2 L}} \quad (109)$$

$$U'_0(0,s) = \frac{F(s)}{D} - \frac{v}{D} \left[\frac{\frac{P_1}{2DP_1 - v} e^{P_1 L} + \frac{P_2}{2DP_2 - v} e^{P_2 L} + \Psi'(L,s)}{P_1 \frac{DP_1}{2DP_1 - v} e^{P_1 L} + P_2 \frac{DP_2}{2DP_2 - v} e^{P_2 L}} \right] \quad (110)$$

gdzie

$$\Psi'(L,s) = \frac{d}{dx} \left\{ d^P \rightarrow x \left[\frac{-kM(p,s) - U_{00}(p,0)}{Dp^2 - vp - s - k} \right] \right\}_{x=L}$$

Zadając funkcje $f(t) = \delta(t)$, $u_z(x,t) = \delta(t)$ i określając funkcję $u_{00}(x,0)$ z równania (105) dla stanu ustalonego oraz stosując przekształcenie $d^s \rightarrow t$ otrzymamy postać analityczną charakterystyki impulsowej $G_m(x,t)$.

Dla zerowych warunków początkowych, obrazem charakterystyki impulsowej będzie wyrażenie

$$G_m(p,s) = \frac{k}{-Dp^2 + vp + s + k} \quad (111)$$

Oryginał funkcji $G_m(p, s)$, a więc charakterystykę impulsową $g(x, t)$ wyznacza się ze wzoru (111) przez:

- całkowanie na płaszczyźnie Gaussa,
- stosowanie wzorów z tablic transformacji,
- rozkład na ułamki proste,
- rozwinięcie asymptotyczne $/s \rightarrow \infty$ /.

Stosując przekształcenie odwrotne do wyrażenia (111), otrzymamy

$$G_m(p, t) = k e^{-(Dp^2 + vp + k)} \quad (112)$$

Wykonując dalej przekształcenie $\mathcal{L} p \rightarrow x$ oraz stosując twierdzenie Borella do obrazów, otrzymamy oryginał jednej ze składowych funkcji $g(x, t)$, a mianowicie funkcję $g_m(x, t)$

$$g_m(x, t) = \int_0^x \frac{k e^{-k\xi}}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \delta(\xi - vt) d\xi = \frac{k e^{-kt}}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}} \quad (112a)$$

10.7.4. Funkcja przejścia

Funkcja przejścia zawiera w sobie całą informację o dynamice obiektu. Pozwala ona określić charakterystykę impulsową, wyznaczyć procesy przejściowe oraz zbadać stabilność i jakość procesów regulacji. Funkcja przejścia, wyznaczona z równań modelowych, ma zwykle postać skomplikowaną, utrudniającą opracowanie układów regulacji. Dlatego w zagadnieniach praktycznych model matematyczny obiektu sprowadza się do typowych równań fizyki matematycznej, a wyznaczone funkcje przejścia budowane są w postaci kombinacji elementarnych funkcji przejścia.

Funkcja przejścia równa jest stosunkowi transformat sygnału wyjściowego oraz sygnału wejściowego, a więc przekształcenie Laplace'a jest podstawowym aparatem matematycznym stosowanym w procesie wyznaczenia funkcji przejścia

$$W(\bar{p}, s) = \frac{U(\bar{p}, s)}{M(\bar{p}, s)} \quad (113)$$

gdzie: $W(\bar{p}, s)$ - funkcja przejścia,

$U(\bar{p}, s)$ - transformata Laplace'a sygnału wyjściowego,

$M(\bar{p}, s)$ - transformata sygnału wejściowego.

Jeżeli do równania (99), przy zerowych warunkach początkowych, zastosuje się przekształcenie Laplace'a $\mathcal{L} t \rightarrow s$, to otrzymamy następującą zależność

$$U(\bar{x}, s) = \int_{\Sigma} G(\bar{x}, \bar{x}', s) M(\bar{x}', s) d\bar{x}'; \quad s \in S \quad (114)$$

w której obraz funkcji Greena nazywany jest funkcją przejścia obiektu o parametrach rozłożonych /dla wymuszenia zewnętrznego/

$$G(\bar{x}, \bar{x}', s) = W(\bar{x}, \bar{x}', s) \quad (115)$$

Z zależności (98) oraz (115) wynika, że funkcja przejścia jest rozwiązaniem równania operatorowego

$$W(\bar{x}, \bar{x}', s) = [A^{-1}]^* \delta(\bar{x} - \bar{x}') \quad (116)$$

gdzie $[A^{-1}]^*$ jest operatorem otrzymanym z operatora A^{-1} przez zamianę d/dt na s .

Dla funkcji przejścia

$$W(\bar{p}, s) = \left(\frac{U(\bar{p}, s)}{M(\bar{p}, s)} \text{ lub } \frac{U(\bar{p}, s)}{M(s)} \right) \quad (117)$$

obrazem charakterystyki impulsowej będzie wyrażenie

$$G(\bar{p}, s) = U(\bar{p}, s) \left| \begin{array}{l} m(\bar{x}, t) = \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(t - \tau) \\ m(t) = \delta(t - \tau) \end{array} \right. \quad (118)$$

W wyniku zastosowania przekształcenia Laplace'a do obrazu $G(s, p)$ (118), otrzymamy oryginał charakterystyki impulsowej

$$g(\bar{x}, t) = \int_{-1}^{s \rightarrow t} \left\{ \int_{-3}^{\bar{p} \rightarrow \bar{x}} [G(\bar{p}, s)] \right\} \quad (119)$$

Dla przestrzeni jednowymiarowej, wzór (119) przyjmie postać /stosuje się przekształcenie Laplace'a, odwrotne najpierw względem jednej zmiennej, a później względem zmiennej drugiej/

$$g(x, t) = \int_{-1}^{s \rightarrow t} \left\{ \int_{-1}^{p \rightarrow x} [G(p, s)] = \frac{L[x, F_1(s)]}{N[x, F_2(s)]} e^{F(s)x} \right\} \quad (120)$$

Funkcja przejścia obiektów o parametrach rozłożonych jest podstawową charakterystyką dynamiczną, stosowaną w badaniach układów regulacji automatycznej metodami modelowania strukturalnego. Funkcję przejścia $W(\bar{p}, s)$ można aproksymować kombinacją elementarnych członów o parametrach rozłożonych

$$W(\bar{p}, s) = \prod_i \tilde{W}_i / \sum_i W_i(\bar{p}, s) \quad (121)$$

Zastępczą funkcję przejścia typu $W(\bar{x}, s)$ wyznacza się z liniowych równań całkowych.

10.7.5. Charakterystyka częstotliwościowa

Dla obiektów o parametrach rozłożonych istnieje analog charakterystyki częstotliwościowej. Charakterystykę tę wyznacza się z odpowiedzi obiektu na wymuszenie impulsowe przy zastosowaniu przekształcenia Fouriera.

Jeżeli zastosujemy przekształcenie Fouriera do δ -funkcji

$$\delta(\bar{x} - \bar{x}') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n e^{-j\omega_i(x_i' - x_i)} d\omega_1 \dots d\omega_n \quad (122)$$

i wprowadzimy otrzymaną zależność do wzoru (98), to otrzymamy zależność $(\bar{x} = (\bar{x}_1, t))$

$$g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) = A \bar{x} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n e^{-j\omega_i(x_i' - x_i)} d\omega_1 \dots d\omega_n \right\} \quad (123)$$

którą można zapisać w postaci równoważnej

$$g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^n e^{-j\omega_i(x_i' - x_i)}}{a_{1,1}(j\omega_1) + a_{1,2}(j\omega_1) + \dots} d\omega_1 \dots d\omega_n \quad (124)$$

Mianownik wyrażenia podcałkowego zależności (124) jest odwrotnością analogu charakterystyki częstotliwościowej amplitudowo-fazowej obiektu o parametrach rozłożonych.

Dysponując charakterystyką impulsową, przez zastosowanie przekształcenia Fouriera można otrzymać charakterystykę częstotliwościową

$$W(x, j\omega) = \mathcal{F}^{t \rightarrow j\omega} g(x, t) \quad (125)$$

Charakterystykę tę podobnie jak funkcję przejścia, można aproksymować kombinacją elementarnych charakterystyk $W_i(x, j\omega)$

$$W(x, j\omega) = \prod_i W_i(x, j\omega) \quad (126)$$

Taka aproksymacja w znacznym stopniu zachowuje wpływ parametrów konstrukcyjnych obiektu na jego własności dynamiczne.

W tablicy 4 zamieszczono podstawowe człony dynamiczne o parametrach rozłożonych wraz z podaniem funkcji przejścia oraz charakterystyk częstotliwościowych amplitudowo-fazowych.

Tablica 4

Charakterystyki dynamiczne wybranych elementarnych członów dynamicznych o funkcji przejścia $W_1(x,s)$

I_p	$W(x,s)$	$Re W(x,\omega)$	$Im W(x,\omega)$	$M(x,\omega)$	$\varphi(x,\omega)$
1	$e^{-\frac{(s+k)x}{v}}$	$\frac{e^{-\frac{kx}{v}}}{k^2+\omega^2} \left(k \cos \frac{\omega x}{v} - \omega \sin \frac{\omega x}{v} \right)$	$\frac{e^{-\frac{kx}{v}}}{k^2+\omega^2} \left(\omega \sin \frac{\omega x}{v} + k \cos \frac{\omega x}{v} \right)$	$\frac{e^{-\frac{kx}{v}}}{\sqrt{k^2+\omega^2}}$	$\arctg \left[\frac{1+\frac{k}{\omega} \operatorname{tg} \frac{\omega x}{v}}{\frac{k}{\omega} - \operatorname{tg} \frac{\omega x}{v}} \right]$
2	$e^{\left(\frac{v}{2D} - \sqrt{\frac{s}{2D}}\right)x}$	$e^{\left(\frac{v}{2D} - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right)x} \cdot \cos \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x$	$e^{\left(\frac{v}{2D} - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right)x} \cdot \sin \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x$	$e^{\left(\frac{v}{2D} - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right)x}$	$-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} x$
3	$\frac{s^2(k_1+k_2)}{e^{\frac{s_2(k_1+k_2)x}{v(s+k_2)}}}$	$e^{-\frac{k_1\omega^2 x}{v(k_1^2+\omega^2)}} \cdot \cos \frac{\omega x}{v} \left(\frac{k_1 k_2}{k_2^2+\omega^2} + 1 \right)$	$e^{-\frac{k_1\omega^2 x}{v(k_1^2+\omega^2)}} \cdot \sin \frac{\omega x}{v} \left(\frac{k_1 k_2}{k_2^2+\omega^2} + 1 \right)$	$e^{-\frac{k_1\omega^2 x}{v(k_1^2+\omega^2)}}$	$-\frac{\omega x}{v} \left(\frac{k_1 k_2}{k_2^2+\omega^2} + 1 \right)$
4	$\frac{e^{-\sqrt{s}x}}{\sqrt{s}}$	$\frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}}{\sqrt{2\omega}} \left(\cos \sqrt{\frac{\omega}{2}} x - \sin \sqrt{\frac{\omega}{2}} x \right)$	$\frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}}{\sqrt{2\omega}} \left(\cos \sqrt{\frac{\omega}{2}} x + \sin \sqrt{\frac{\omega}{2}} x \right)$	$\frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}}{\sqrt{\omega}}$	$\arctg \left(\frac{1+\operatorname{tg} \sqrt{\frac{\omega}{2}} x}{1-\operatorname{tg} \sqrt{\frac{\omega}{2}} x} \right)$

Przy przejściu z funkcji $W_1(x,s)$ do charakterystyki częstotliwościowej korzysta się ze wzorów

$$\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}; \quad \sqrt{-j} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \quad (127)$$

Praktycznie najwygodniej jest operować charakterystykami logarytmicznymi częstotliwościowymi. Charakterystyki te, są powiązane z charakterystyką częstotliwościową amplitudowo-fazową następującą relacją

$$\ln W(x,j\omega) = \ln A(x,\omega) + j\varphi(x,\omega) \quad (128)$$

przy czym, charakterystyka logarytmiczna modułu wyraża się w decybe-

lach

$$L(x, \omega) = 20 \lg A(x, \omega) \quad (129)$$

a logarytmiczna charakterystyka fazowa wyraża się radianach lub stopniach.

Przykładowo, dla funkcji przejścia

$$W(x, s) = e^{-\frac{x}{v}s} \cdot e^{-\frac{as}{1+as}} \quad (130)$$

otrzymamy:

- charakterystykę częstotliwościową

$$W(x, j\omega) = A(x, \omega) e^{j\varphi(x, \omega)} = e^{-\frac{(a\omega)^2}{1+(a\omega)^2}} \cdot e^{-j\left(\frac{x}{v}\omega + \frac{a\omega}{1+(a\omega)^2}\right)} \quad (131)$$

- charakterystykę częstotliwościową amplitudową

$$L(x, \omega) = -20 \cdot 0,4343 x \cdot \frac{(a\omega)^2}{1+(a\omega)^2} \quad (132)$$

- charakterystykę fazową częstotliwościową

$$\varphi(x, \omega) = -\left[\frac{x}{v}\omega + \frac{a\omega}{1+(a\omega)^2}\right] \quad (133)$$

Analitycznie charakterystykę częstotliwościową wyznacza się przez:

- zastosowanie do równań dynamiki zespolonego przekształcenia Fouriera,
- przejście z równań zadanych w dziedzinie czasu na równania w dziedzinie częstotliwości uogólnionej oraz podstawienie $s = j\omega$ i rozdzielenie równań na układ dwóch równań, powiązanych ze sobą,
- rozwiązanie równań dynamiki w dziedzinie częstotliwości s oraz podstawienie $s = j\omega$ do otrzymanej funkcji przejścia.

Przykładowo, dla równania różniczkowego

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial t \partial x^i} = \delta(t) \quad (134)$$

z zerowymi warunkami granicznymi mamy układy równań

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i \operatorname{Re}[W(x, j\omega)]}{dx^i} = 1 \quad (135)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i \operatorname{Im}[W(x, j\omega)]}{dx^i} = 0 \quad (136)$$

10.8. Wyznaczenie charakterystyki impulsowej

Charakterystykę impulsową obiektu o parametrach rozłożonych wyznacza się doświadczalnie z pomiarów aktywnych lub pasywnych. W przypadku pomiarów aktywnych, obiekt dynamiczny wyprowadza się ze stanu ustalonego sztucznie generowanym sygnałem wymuszającym zdeterminowanym. W zależności od typu wymuszenia, otrzymamy odpowiednie charakterystyki dynamiczne. Jeżeli sygnałem jest skok jednostkowy, to otrzymamy charakterystykę skokową. Z odpowiedzi na sygnał typu funkcji harmonicznej wyznacza się charakterystykę częstotliwościową. W metodzie pasywnej nie wprowadza się sygnału sztucznie generowanego, lecz wykorzystuje się fluktuacje naturalne sygnału wejściowego oraz wyjściowego w czasie normalnej eksploatacji obiektu dynamicznego. Metoda ta operuje charakterystykami statystycznymi.

Poziom energetyczny wymuszeń sztucznych zależy od czułości elementów pomiarowych oraz inercyjności obiektu. Wyższa czułość elementu pomiarowego i mała bezwładność obiektu badanego pozwalają wprowadzić wymuszenie o małej amplitudzie, co zapewnia mniejsze odchylenie od własności liniowych. Mała amplituda ponadto pozwala analizować obiekt w obszarze jego stabilnej pracy. W obiektach stabilnych, proces przejściowy przebiega jednakowo we wszystkich elementach modelu równolegle połączonych.

Jeżeli sygnałem wymuszającym jest δ -funkcja

$$m(\bar{x}, t) = \delta(\bar{x}, t) \quad (137)$$

to zgodnie ze wzorem (100) odpowiedzią obiektu na takie wymuszenie jest charakterystyka impulsowa

$$u(\bar{x}, t) = g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) \quad (138)$$

Charakterystyka impulsowa spełnia równanie różniczkowe standaryzowane oraz warunki graniczne jednorodne a warunki początkowe zerowe

$$A_{\bar{x}, t} g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) = \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(t - \tau) \quad (139)$$

$$L_1[g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau)] = 0; \bar{x} \in \Omega, t > t_0 \quad (140)$$

$$L_2[g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau)] = 0; \bar{x} \in \Omega, t = t_0 \quad (141)$$

Pseudofunkcję $\delta(\bar{x}, t)$ jest trudno zrealizować fizycznie, i praktycznie przyjmuje się, że jest to wymuszenie małą ilością substancji /stężenie, inert, temperatura/ wstrzykniętej do obiektu w określonym punkcie $\bar{x}_0$, w momencie $t=0$

$$m(\bar{x}, t) = Q(t) \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad (142)$$

gdzie $Q(t)$ oznacza prędkość wstrzyknięcia substancji.

Jeżeli impuls śladowy został wstrzyknięty do strumienia płynu, to na skutek ruchu płynu oraz procesu dyfuzji ślad zostaje rozmyty i odpowiedź obiektu będzie scharakteryzowana, podobnie jak funkcja przypadkowa, swoimi momentami. Analiza matematyczna sprowadza się do rozkładu charakterystyki impulsowej w szereg momentów powiązanych interpretacją geometryczną z krzywą doświadczalną odpowiedzi impulsowej.

Używane są inne typy sygnałów wymuszających, takie jak skok jednostkowy lub sygnał w kształcie trapeza oraz trójkąta. Praktycznie najłatwiej realizuje się wymuszenie typu skoku jednostkowego z czołem liniowo narastającym. W wielu przypadkach szybkość narastania czoła sygnału jest znacznie większa od szybkości narastania procesu przejściowego. Praktycznie uważa się, że jest to wymuszenie typu skoku jednostkowego, a otrzymaną charakterystykę traktuje się jako charakterystykę skokową.

Wprowadzenie do obiektu wymuszenia impulsowego jest ekonomiczne, jednak informacje dynamiczne zawarte w stosunkowo krótkiej rejestracji mogą być obciążone dużym błędem.

Jeżeli obiekt pozwala na przeprowadzenie długotrwałych doświadczeń, nie ma ograniczeń co do ilości substancji wymuszających oraz dysponujemy odpowiednią aparaturą formującą falę sinusoidalną i rejestrującą odpowiedź czasową, to można wyczerpująco zbadać dynamikę obiektu przez bezpośredni pomiar charakterystyki częstotliwościowej amplitudowo-fazowej. Na sygnał wejściowy harmoniczny obiekt dynamiczny odpowiada drganiami harmonicznymi o tej samej częstotliwości, co sygnał wejściowy, lecz z amplitudą i przesunięciem fazowym zależnymi od czasu i częstotliwości. Z biegiem czasu składowa przejściowa procesu drgającego zanika i ustalają się drgania o stałej amplitudzie, przy czym stosunek amplitud i przesunięcie fazowe, dla ustalonego punktu przestrzeni, zależą tylko od częstotliwości ω . Dla obiektu jednowymiarowego, długość ustalona jest równa długości lub wysokości aparatu.

Zależność funkcji $A(\omega)$ oraz $\varphi(\omega)$ od częstotliwości ω jest silna dla niskich wartości. Ze wzrostem częstotliwości stosunek amplitud A_{wyj}/A_{wej} maleje. Dla częstotliwości powyżej progowej

pomiar jest utrudniony lub wręcz niemożliwy, ponieważ zmiany sygnału wyjściowego znajdują się w strefie nieczułości przyrządu pomiarowego. Obiekt nie reaguje na wymuszenie, a więc staje się filtrem dolno-przepustowym.

Przedział częstotliwości $0 \leq \omega \leq \omega_{pr}$ nazywa się przedziałem częstotliwości istotnych i najczęściej jest zawarty w granicach zmian $0 \leq \omega \leq 0,02$ Hz, a więc w tym obszarze analiza własności dynamicznych obiektów inżynierii chemicznej ma sens. Przedział częstotliwości istotnych zależy od bezwładności obiektu. Im większa jest inercyjność obiektu, tym niższa jest częstotliwość progowa.

W instalacjach przemysłowych, wobec dużej bezwładności, pomiar bezpośredni charakterystyk częstotliwościowych metodą jednej częstotliwości zajmuje zbyt dużo czasu. Zaleca się w tych przypadkach stosować metodę wielu częstotliwości /wymuszenie typu fali prostokątnej/. Pomiar trwa krócej lecz opracowania wyników jest znacznie trudniejsze niż dla wymuszenia harmonicznego.

10.9. Wyznaczenie sygnału wyjściowego z obiektu dynamicznego

Obiekty liniowe o parametrach rozłożonych spełniają zasadę superpozycji, i odpowiedź na dowolne wymuszenie wyznacza się przy użyciu całki Duhamela, z funkcją Greena jako jądrem

$$u(\bar{x}, t) = \int_{t_0}^t \int_{\Omega} q(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) m(\bar{x}', \tau) d\bar{x}' d\tau \quad (143)$$

Całka (143) dotyczy modelu z zerowymi warunkami granicznymi oraz wymuszeniem zewnętrznym typu $m(\bar{x}, t)$.

Gdy warunki początkowe i brzegowe są niezerowe, na obiekt działa wymuszenie skupione w przestrzeni i rozłożone w czasie oraz wymuszenie rozłożone w przestrzeni i w czasie, to wzór (143) przyjmuje postać

$$u(\bar{x}, t) = \int_{t_0}^t \int_{\Omega} q_m(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) m(\bar{x}', \tau) d\bar{x}' d\tau + \int_{t_0}^t q_m'(\bar{x}, t - \tau) m'(\tau) d\tau + \\ + \int_{\Omega_b} q_{u_{00}}(\bar{x}, \bar{x}', t_0) u_{00}(\bar{x}') d\bar{x}' + \\ + \int_{t_0}^t \int_{\Omega_b} q_{u_0}(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) u_0(\bar{x}', \tau) d\bar{x}' d\tau \quad (144)$$

gdzie: $m(\bar{x}', \tau)$, $m(\tau)$, $u_{00}(\bar{x}')$, $u_0(\bar{x}', \tau)$ - wymuszenie rozłożone i skupione /sterowanie/, warunki początkowe i brzegowe,

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) | \bar{x} \in \Omega \\ \bar{x}' = (x_1', x_2', x_3') | \bar{x}' \in \Omega \\ (t, \tau) \in [t_0, t]$$

$g_m, g'_m, g_{u_{00}}, g_{u_0}$ - charakterystyka impulsowa dla wymuszenia skupionego i rozłożonego warunków początkowych i brzegowych.

Wykorzystując równania (139), (140), (141) oraz (4), otrzymamy inną postać wzoru (144)

$$u(\bar{x}, t) = \int_{t_0}^t \int_{\Omega} g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) [m(\bar{x}', \tau) - L \{ [m_b(\bar{x}', \tau), u_0(\bar{x}', \tau), \delta(\bar{x}', \tau)] \}] d\bar{x}' d\tau \quad (144a)$$

W zagadnieniach praktycznych sygnałem wymuszającym najczęściej jest funkcja $m(t)$. Stąd, dla nieszerowych warunków początkowych $u_{00}(\bar{x}) \neq 0$ i zerowych warunków brzegowych $u_0(t) = 0$, całka (144) przyjmie postać

$$u(\bar{x}, t) = \int_{t_0}^t g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) m(\tau) d\tau + \int_{\Omega_b} g_{u_{00}}(\bar{x}, \bar{x}', t_0) u_{00}(\bar{x}') d\bar{x}' \quad (145)$$

Funkcja Greena $g_{u_{00}}(\bar{x}, \bar{x}', t_0)$ jest procesem wyjściowym wywołanym wymuszeniem $u_{00}(\bar{x})$ w postaci δ -funkcji różnej od zera w punkcie $\bar{x}'$, tj.

$$u(\bar{x}, t) = g_{u_{00}}(\bar{x}, \bar{x}', t_0) \Big|_{u_{00}(\bar{x}) = \delta(\bar{x} - \bar{x}')} \quad (146)$$

Dla przestrzeni jednowymiarowej oraz wymuszenia rozłożonego i zerowych warunków granicznych otrzymamy całkę spłotu

$$u(x, t) = \int_0^L dx' \int_{t_0(0)}^t g(x - x', t - \tau) m(x', \tau) d\tau \quad (147)$$

którą można zapisać w postaci równoważnej

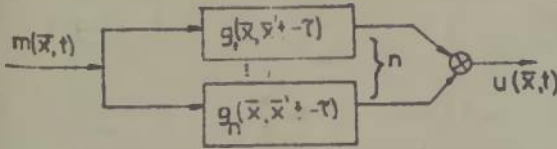
$$u(x, t) = \int_0^L dx' \int_{t_0}^t g(x', \tau) m(x - x', t - \tau) d\tau \quad (147a)$$

10.10. Schematy strukturalne z członami dynamicznymi rozłożonymi

10.10.1. Połączenie równoległe i szeregowo osłonów dynamicznych rozłożonych

Model elementarnego członu dynamicznego rozłożonego opisany jest operatorem $A_{\bar{x}, t}$, który zgodnie z zależnością (84) wiąże ze sobą sygnał wejściowy $m(\bar{x}, t)$ oraz wyjściowy $u(\bar{x}, t)$. Operatorowi $A_{\bar{x}, t}$ w dziedzinie oryginałów odpowiada charakterystyka impulsowa $g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau)$.

a w dziedzinie obrazów-funkcja przejścia $W(\bar{x}, \bar{x}', s)$ lub charakterystyka częstotliwościowa $W(\bar{x}, \bar{x}', j\omega)$.



Rys. 31. Połączenie równoległe członów rozłożonych

Podobnie jak w przypadku członów elementarnych o parametrach skupionych, członów o parametrach rozłożonych można łączyć równoległe oraz szeregowo.

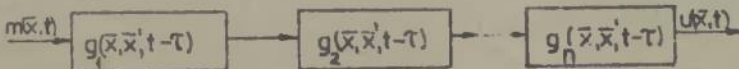
Charakterystyka impulsowa oraz, zastępcza funkcja przejścia elementów połączonych równoległe /rysunek 31/ jest

równa sumie charakterystyk dynamicznych poszczególnych członów

$$g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) = \sum_{i=1}^n g_i(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) \quad (148a)$$

$$W(\bar{x}, \bar{x}', s) = \sum_{i=1}^n W_i(\bar{x}, \bar{x}', s) \quad (148b)$$

W przypadku połączenia szeregowego /rysunek 32/, charakterystykę impulsową oraz funkcję przejścia zastępcze wyznacza się z zależności



Rys. 32. Połączenie szeregowe członów rozłożonych

$$g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t g_n(\bar{x}, \bar{x}_1, t, \tau_1) g_{n-1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \tau_1, \tau_2) \dots g_1(\bar{x}_{n-1}, \bar{x}', \tau_{n-1}, \tau) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{n-1} d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} \quad (149a)$$

$$W(\bar{x}, \bar{x}', s) = \int \dots \int_{\Omega_{n-1}} W_n(\bar{x}, \bar{s}, s) W_{n-1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, s) \dots W_1(\bar{x}_{n-1}, \bar{x}', s) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{n-1} \quad (149b)$$

10.10.2. Czołony rozłożony: wzmacniający, różniczkujący oraz całkujący

Czołony wzmacniający realizuje operację mnożenia sygnału wejściowego przez stały współczynnik k

$$u(\bar{x}, t) = \int_{t_0}^t \int_{\Omega} k \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(t - \tau) m(\bar{x}', \tau) d\bar{x}' d\tau \quad (150)$$

Charakterystyka impulsowa oraz funkcja przejścia takiego czołownika określone są wzorami

$$g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) = k \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(t - \tau) \quad (151a)$$

$$W(\bar{x}, \bar{x}', s) = k \delta(\bar{x} - \bar{x}') \quad (151b)$$

Sygnały: wyjściowy oraz wejściowy czołownika rozłożonego różniczkującego powiązane są ze sobą zależnością

$$u(\bar{x}, t) = \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \delta^{(n)}(\bar{x} - \bar{x}') \delta'(t) m(\bar{x}', \tau) d\bar{x}' d\tau \quad (152)$$

Ze wzoru (152) wynika określenie charakterystyki impulsowej czołownika różniczkującego

$$g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) = \delta^{(n)}(\bar{x} - \bar{x}') \delta'(t - \tau) \quad (153a)$$

oraz odpowiadająca jej funkcja przejścia

$$W(\bar{x}, \bar{x}', s) = \delta^{(n)}(\bar{x} - \bar{x}') \quad (153b)$$

Zależność pomiędzy sygnałem $u(\bar{x}, t)$ oraz sygnałem $m(\bar{x}, t)$ czołownika całkującego ma postać

$$u(\bar{x}, t) = \int_{t_0}^t \int_{\Omega} 1(\bar{x} - \bar{x}') m(\bar{x}', \tau) d\bar{x}' d\tau \quad (154)$$

Ze wzoru (154) wynika określenie charakterystyki impulsowej czołownika całkującego

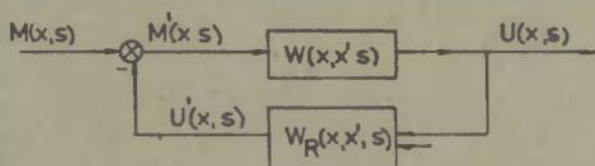
$$g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) = 1(\bar{x} - \bar{x}') \delta(t - \tau) \quad (155a)$$

oraz odpowiadająca jej funkcja przejścia

$$W(\bar{x}, \bar{x}', s) = 1(\bar{x} - \bar{x}') \quad (155b)$$

10.10.3. Obiekty o parametrach rozłożonych, objęte sprzężeniem zwrotnym

Podstawowym elementem algebry schematów blokowych jest sprzężenie zwrotne. Teoria sprzężenia zwrotnego jest opracowana dla obiektów o parametrach skupionych. Nie można ją w zupełności przenieść na obiekty o parametrach rozłożonych, ponieważ zastępcza funkcja przejścia szeregowego połączenia takich obiektów zależy od kolejności ich występowania w kaskadzie. Zastępczą funkcję przejścia wyznacza się z



Rys. 33. Obiekt o parametrach rozłożonych objęty sprzężeniem zwrotnym

układu równań całkowych liniowych. Mając taką funkcję, można wyznaczyć proces przejściowy, a tym samym określić jakość regulacji automatycznej obiektu o parametrach rozłożonych.

Analogiem sprzężenia zwrotnego dla obiektów o parametrach rozłożonych jest po-

łączenie według schematu blokowego pokazanego na rysunku 33.

Funkcję przejścia regulatora o parametrach rozłożonych można przybliżyć funkcją przejścia obiektu o parametrach skupionych, mającą własność wybiórczą, tj.

$$W_R(x, x', s) = \delta(x - x_0) W_R(s) \delta(x' - x'_0) \quad (156a)$$

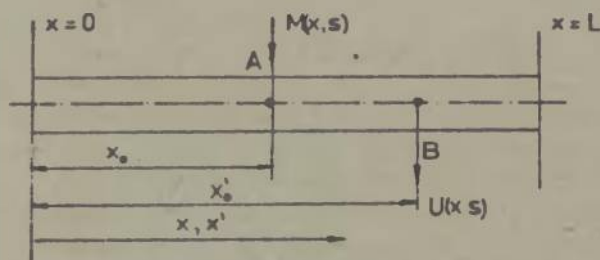
gdzie: $W_R(s)$ - funkcja przejścia regulatora o parametrach skupionych,
 $\delta(x - x_0) \delta(x' - x'_0)$ - funkcja przejścia bloków x i x' , realizujących przejście od obiektu o parametrach skupionych do obiektu o parametrach rozłożonych i odwrotnie,

x_0, x'_0 - realizuje się według schematu pokazanego na rysunku 34.

Na schemacie tym punkt A oznacza miejsce ustawienie elementu wykonawczego regulatora $x = x_0$, a punkt B oznacza miejsce ustawienia czujnika, z którego odczytuje się informację o stanie obiektu.

Stosując postępowanie podobne jak dla obiektów o parametrach skupionych, otrzymamy relacje

$$M'(\bar{x}, s) = M(\bar{x}, s) + U(\bar{x}, s) \quad (156b)$$



Rys. 34. Rozmieszczenie punktów x_0 oraz x'_0 na długości $[0, L]$

$$U(\bar{x}, s) = \int_{\Omega} G(\bar{x}, \bar{x}', s) M'(\bar{x}', s) d\bar{x}' \quad (156c)$$

$$U'(\bar{x}, s) = \int_{\Omega} G_R(\bar{x}', \bar{x}, s) U(\bar{x}, s) d\bar{x} \quad (156d)$$

$$U(\bar{x}, s) = \int_{\Omega} G(\bar{x}, \bar{x}', s) M'(\bar{x}', s) d\bar{x}' + \int_{\Omega} G(\bar{x}, \bar{x}', s) \left[\int_{\Omega} G_R(\bar{x}', \bar{x}, s) U(\bar{x}, s) d\bar{x} \right] d\bar{x}' \quad (156e)$$

$$\int_{\Omega} G(\bar{x}, \bar{x}', s) G_R(\bar{x}', \bar{x}, s) d\bar{x}' = G_0(\bar{x}, \bar{x}, s) \quad (156f)$$

gdzie: $\bar{x}, \bar{x}', \bar{x}$ - argumenty przestrzeni ($\bar{x} \in \Omega, \bar{x}' \in \Omega'$),

$G_0(\bar{x}, \bar{x}, s)$ - funkcja przejścia pętli otwartej ($s \in S$).

Funkcję przejścia sprzężenia zwrotnego określa się z relacji

$$W_z(\bar{x}, \bar{x}', s) = \frac{U(\bar{x}, s)}{M(\bar{x}, s)} \quad (156g)$$

Jeżeli założymy, że $m(\bar{x}, t) = \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(t - \tau)$ i uwzględnimy to we wzorze (154), to otrzymamy

$$W_z(\bar{x}, \bar{x}', s) = \int_{\Omega} W_0(\bar{x}, \bar{x}', s) W_z(\bar{x}', \bar{x}, s) d\bar{x} = W(\bar{x}, \bar{x}', s) \quad (157)$$

Dla przestrzeni jednowymiarowej przy ustalonym x' , równanie (157) przyjmie postać równania Fredholma drugiego rodzaju /równanie liniowe całkowe/ względem poszukiwanej funkcji przejścia pętli zamkniętej $W_z(\bar{x}, \bar{x}', s)$.

Na analogii do klasycznego sprzężenia zwrotnego/obiekty o parametrach skupionych/ równanie (157) można rozwiązać względem funkcji $W_z(x, x', s)$ /dla przestrzeni jednowymiarowej/

$$\frac{U(x,s)}{M(x,s)} = W_z(x,x',s) = \frac{W(x,x',s)}{\delta(x-x') - W_0(x,x',s)} \quad (157a)$$

Wielkość $\delta(x-x')$ we wzorze (157a) spełnia rolę jedności i jest jądrem operatora jednostkowego.

Klasyczne sprzężenie zwrotne może nie nadawać się do regulacji automatycznej obiektów o parametrach rozłożonych, ponieważ, wobec istnienia opóźnienia transportowego, na wyjściu otrzymamy za słabą odpowiedź dla zapewnienia regulacji efektywnej. Odpowiedź na wymuszenie narasta z biegiem czasu i akcja regulacji może rozwijać się w ścisłym powiązaniu z procesem przejściowym pętli otwartej. Lepszą jakość regulacji uzyskuje się przez zastosowanie kompensacji dynamicznej, sterowania według mierzonego stanu obiektu lub przez zastosowanie oddziaływań z wyprzedzeniem. W przypadku regulacji według mierzonego stanu, ważnym problemem jest właściwe umiejscowienie czujnika pomiarowego.

10.11. Aproxymacja charakterystyk dynamicznych

10.11.1. Wstęp

Charakterystyki dynamiczne obiektów o parametrach rozłożonych opisane są skomplikowanymi funkcjami analitycznymi i w obliczeniach praktycznych aproksymuje się je funkcjami prostymi. Dokładność przybliżenia zależy od użytego sposobu aproksymacji. Aproxymacja może bazować na więzi pomiędzy modelem matematycznym i obiektem fizycznie realizowalnym. Istnieje określona granica przybliżenia, wynikająca z samych równań modelu matematycznego, w którym zawarte są niedokładności oraz uproszczenia. Granica ta wyznacza obszar dopuszczalnej zgodności modelu i obiektu, poza którym żadne poprawianie, w ramach starego modelu, do niczego nie doprowadza bez sformułowania nowego modelu matematycznego i trud poszukiwania dokładnej aproksymacji jest stracony.

Aproxymacyjna charakterystyka dynamiczna powinna zawierać w swoich współczynnikach parametry fizyczne modelu.

Aproxymację można zrealizować następującymi sposobami:

- obiekt rozpatruje się jako kombinację elementarnych członów, a charakterystyki dynamiczne zmieniają się skokowo względnie zmiennej przestrzennej,
- obiekt rozpatruje się jako całość, a charakterystyki dynamiczne są ciągle względnie zmiennej przestrzennej / lub rozpatruje się przekrój końcowy aparatu/.

W zależności od tego, jaką charakterystyką operujemy do aproksy-

macji, wybieramy jedną z poniżej podanych metod:

- metoda aproksymacji asymptotycznej,
- metodą kombinacji elementarnych członów dynamicznych o parametrach rozłożonych,
- metoda rozkładu charakterystyki dynamicznej w szereg,
- metoda aproksymacji wyrażeniem typu ułamka wymiernego,
- metoda powierzchni,
- metoda kombinacji elementarnych członów dynamicznych o parametrach skupionych,
- metoda charakterystyk logarytmicznych częstotliwościowych,
- metoda zgodności w punktach charakterystycznych,
- metoda aproksymacji funkcjami ortogonalnymi,
- metoda aproksymacji wariancyjnej.

Zagadnienie aproksymacji charakterystyk dynamicznych jest dwójakiego rodzaju. Jeżeli charakterystyki te można wyznaczyć analitycznie, wówczas aproksymacja ma na celu uproszczenie postaci złożonej charakterystyki dynamicznej. Jako kryterium może być funkcjonal typu

$$\int_0^{\infty} [f(\bar{x}, t) - f^{**}(\bar{x}, t)]^k dt = \min \quad (158)$$

gdzie: $f(\bar{x}, t)$ - charakterystyka dynamiczna dokładna,
 $f^{**}(\bar{x}, t)$ - charakterystyka dynamiczna przybliżona.

Jeżeli wyznaczenie charakterystyk dynamicznych dla złożonych warunków granicznych jest trudne, to aproksymacja sprowadza się do formowania charakterystyk przybliżonych, w oparciu o rozwiązania równań algebraicznych lub równań różniczkowych zwyczajnych.

10.11.2. Rozkład charakterystyk dynamicznych w szereg

Metoda rozkładu funkcji w szereg w otoczeniu punktu jest najprostszą metodą wyznaczenia aproksymacyjnej charakterystyki dynamicznej. Wadą metody jest trudność określenia liczby wyrazów szeregu, zapewniającą określoną dokładność dynamiczną oraz statyczną aproksymacji. Ze wzrostem liczby wyrazów szeregu wzrasta stopień złożoności obliczeń n^2 .

Charakterystykę impulsową $g(\bar{x}, t)$ można rozłożyć w szereg absolutnie i równomiernie zbieżny według układu funkcji ortogonalnych $\{\psi_k(\bar{x})\}$, przy czym spełniona jest relacja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} [g(\bar{x}, \bar{x}', t - \tau) - \sum_{k=1}^n \psi_k(t - \tau) \psi_k(\bar{x}) \psi_k(\bar{x}')]^2 d\tau = 0 \quad (159)$$

gdzie: $\{\psi_k(\bar{x})\}$ - układ funkcji ortogonalnych,

$\psi_k(t-T)$ - funkcja czasu /funkcja wykładnicza/,
 $\bar{x}$ - element hiperprzestrzeni $\bar{E}^n$.

Funkcję ψ_k określa się z rozkładu ortogonalnego δ -funkcji /postać ogólna/

$$\delta(\bar{x}-\bar{x}') = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\bar{x}) \psi_k(\bar{x}') \quad (160)$$

gdzie funkcje ψ_k są wielomianami ortogonalnymi lub funkcjami trygonometrycznymi, względnie wykładniczymi.

Charakterystykę impulsową można również aproksymować sumą

$$g(\bar{x}, \bar{x}', t-T) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(\bar{x}) e^{-\lambda_k(t-T)} \quad (161)$$

gdzie: λ_k - wartość własna operatora $A_{\bar{x}, t}$,
 ψ_k - funkcja własna operatora $A_{\bar{x}, t}$,
 c_k - współczynnik.

Współczynniki c_k wyznacza się z warunków początkowych funkcji Greena oraz ortogonalności funkcji własnych

$$c_k = \frac{1}{\|\psi_k\|_{\Omega}^2} \int_{\Omega} g(\bar{x}, \bar{x}, 0) \psi_k(\bar{x}) d\bar{x} \quad (162)$$

Wzór (162) można zapisać w innej, równoważnej postaci

$$c_k = \frac{1}{\|\psi_k\|_{\Omega}^2} \int_{\Omega} \delta(\bar{x}, 0) \psi_k(\bar{x}) d\bar{x} \quad (163)$$

Ze wzorów (161), (162) oraz (163) wynika następująca postać aproksymacyjna charakterystyki impulsowej /szereg Fouriera/

$$g(\bar{x}, \bar{x}', t-T) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(\bar{x}) \psi_k(\bar{x}')}{\|\psi_k\|^2} e^{-\lambda_k(t-T)} \quad (164)$$

Praktycznie we wzorze (164) przyjmuje się skończoną liczbę wyrazów.

W obliczeniach układów regulacji często zachodzi potrzeba aproksymacji transcendentnej funkcji przejścia, w określonych obszarach częstotliwości pracy obiektu. Aproksymacji dokonuje się w obszarze dużych i małych częstotliwości.

Dla wielu obiektów inżynierii chemicznej funkcja przejścia ma postać

$$W(x, s) = \frac{U(x, s)}{M(0, s)} = \frac{L(s)}{N(s)} \exp \left\{ -\frac{A^{(m)}(s)}{B^{(m)}(s)} x \right\} \quad (165)$$

gdzie: $L(s), N(s), A^{(m)}(s), B^{(m)}(s)$ - wielomiany operatorowe,
 $m = \sum n$.

Aproksymacja funkcji przejścia zadanej w postaci (165) sprowadza się do rozkładu w szereg wyrażenia $\exp \left\{ -\frac{A(s)}{B(s)} x \right\}$. Przyjmując $n < \infty$, otrzymamy szereg

$$e^{-\frac{A(s)}{B(s)} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{A(s)}{B(s)} x \right]^k \frac{1}{k!} \quad (166)$$

Wówczas aproksymacyjna funkcja przejścia ma postać

$$W^{**}(x, s) = \frac{L(s)}{N(s)} + \frac{L(s)}{N(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A(s)}{B(s)} x \right]^k \frac{1}{k!} \quad (167)$$

Ze wzrostem liczby wyrazów szeregu (166) maleje błąd aproksymacji.

W celu rozkładu wyrażenia $\exp \left\{ -\frac{A(s)}{B(s)} x \right\}$ w otoczeniu punktu $s \rightarrow \infty$ w szeregu Taylora należy wprowadzić zamiast s $\frac{1}{q}$. Otrzymamy szereg

$$e^{-\frac{A(q)}{B(q)} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{A(q)}{B(q)} x \right]^k \frac{1}{k!} \quad (168)$$

Przykładowo, dla funkcji $\exp \left\{ -\frac{k}{a+s} x \right\}$ otrzymamy szereg

$$e^{-\frac{kx}{a+s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{kx}{a+s} \right]^k \frac{1}{k!} \quad (169)$$

Jeżeli funkcję przejścia $W(\bar{x}, s)$ można przedstawić w postaci iloczynu części regularnego oraz części typu $\exp \left\{ -\frac{k}{a+s} x \right\}$

$$W(x, s) = W_1(s) \cdot \exp \left\{ -\frac{A(s)}{B(s)} x \right\} = W_1(s) W_2(x, s) \quad (170)$$

to aproksymuje się tylko funkcję $W_2(\bar{x}, s)$. Używając ciągu funkcji ortogonalnych otrzymamy wyrażenie /dla dowolnego x /

$$W_2^{**}(x, s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \psi(s) \quad (171)$$

gdzie: c_i - współczynniki stałe,

$\psi(s)$ - funkcja ortogonalna.

Współczynniki c_i są nieznanymi parametrami, od wyboru których, przy zadanej liczbie wyrazów ciągu, zależy dokładność aproksymacji. Współczynniki te wyznacza się z zależności

$$c_i = \frac{1}{i!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^i}{ds^i} \left\{ W_2(x, s) \psi(s) \left[\frac{s}{\psi(s)} \right]^{i+1} \right\} \quad (172)$$

Przy rozkładzie funkcji przejścia w otoczeniu $s \rightarrow a$, wzór (172) przyjmie postać

$$c_i = \frac{1}{i!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^i}{ds^i} \left\{ W_2(x, s) \psi(s) \left[\frac{s-a}{\psi(s)} \right]^{i+1} \right\} \quad (173)$$

Jeżeli aproksymacji dokonujemy przy użyciu funkcji Laguerre a funkcją wagową $q(t) = \exp(-t)$, to wzór (171) przyjme postać

$$W_2^{vv}(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \left(\frac{s}{s+1}\right)^i \quad (174)$$

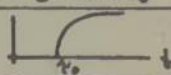
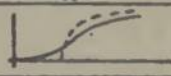
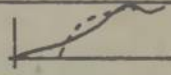
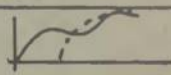
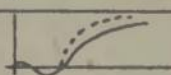
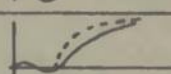
Uwzględniając wzory (171) oraz (172) w zależności (170), otrzymamy następującą postać aproksymacyjnej funkcji przejścia

$$W^{vv}(x,s) = W_1(s) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^i}{ds^i} [W_2(x,s)(s+1)^{i-1}]_{i=0,1,\dots} \quad (175)$$

Inne ważniejsze formy aproksymacyjne wyrażenia typu $\exp\{ \}$ zestawiono w tabelicy 5.

Tabela 5

Postacie aproksymacyjne wyrażenia $\exp\{ \}$

Lp	Aproksymacja	Obraz graficzny
1	$\exp(-sT_0)$	
2	$\left(\frac{1}{1 + \frac{T_0}{n}s}\right)^n$	
3	$\frac{sT_0 + \frac{(sT_0)^2}{2!} + \dots + \frac{(sT_0)^n}{n!}}{1!}$	
4	$\left[\frac{1}{1 + \frac{sT_0}{n} + \frac{(bsT_0)^2}{n}} \right]^n, n \leq b \leq \infty$	
5	$\left[\frac{1 - \frac{sT_0}{n} + \frac{s^2(bT_0)^2}{n^2}}{1 + \frac{sT_0}{n} + \frac{s^2(bT_0)^2}{n^2}} \right]^n$	
6	$\frac{12 - 6T_0s + T_0^2s^2}{12 + 6T_0s + T_0^2s^2}$	

10.11.3. Aproksymacja oparta na kryteriach całkowych

Metoda rozkładu funkcji transcendentnej w szereg daje dobre przybliżenie jedynie w otoczeniu jednego lub dwóch punktów / $t=0$ lub / oraz $t=\infty$ /. Do aproksymacji charakterystyk dynamicznych w przedziale $0 < t < \infty$ wykorzystuje się własności kryteriów całkowych, stosowanych do oceny procesów przejściowych /kryteria ITEA /.

Kryterium całkowe oparte jest na porównaniu charakterystyki skokowej $\eta(x,t)$ wyznaczonej dokładnie z charakterystyką skokową

aproxymacyjną. Dla $x = \text{const}$ najlepszą aproxymację otrzymamy jeżeli

$$J = \int_0^{\infty} \Delta \eta(\bar{x}, t) dt = \min \quad (176)$$

gdzie: J - funkcjonal liniowy,

$$\Delta \eta(\bar{x}, t) = \eta(\bar{x}, t) - \eta^{**}(\text{const}, t) \quad (177)$$

$\eta(\bar{x}, t)$ - charakterystyka skokowa obiektu o parametrach rozłożonych określona dokładnie,

$\eta^{**}(t)|_{x=\text{const}}$ charakterystyka skokowa aproxymująca.

Jeżeli funkcje $\eta(x, t)$ i $\eta^{**}(\text{const}, t)$ oraz ich pochodne są ciągłe, to ze wzoru (176) wynika równość

$$\left. \frac{d}{ds} H(\bar{x}, s) \right|_{s \rightarrow 0} = \left. \frac{d}{ds} H^{**}(\text{const}, s) \right|_{s \rightarrow 0} \quad (178)$$

Zależność ta słuszna jest dla dowolnej wartości $x = \text{const}$ oraz spełnia warunki

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s H(\bar{x}, s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s H^{**}(\text{const}, s) \quad (179)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s H(\bar{x}, s) = \lim_{s \rightarrow 0} s H^{**}(\text{const}, s) \quad (180)$$

W oparciu o wzory (179) oraz (180) wyznacza się wartości charakterystyki skokowej dla $t=0$ oraz $t=\infty$. Otrzymujemy zależności

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s H^{**}(\text{const}, s) \hat{=} \lim_{t \rightarrow 0} \eta(\bar{x}, t) |_{\bar{x} = \text{const}} \quad (181)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s H^{**}(\text{const}, s) \hat{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(\bar{x}, t) |_{\bar{x} = \text{const}} \quad (182)$$

Postać charakterystyki skokowej $\eta^{**}(\text{const}, t)$ wybiera się z warunku zgodności wartości charakterystyki $\eta(x, t)$ oraz funkcji $\eta^{**}(\text{const}, t)$ w kilku wybranych punktach, jak na przykład, $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ oraz $t = t_p$, gdzie t_p jest punktem przegięcia charakterystyki skokowej rzeczywistej. Jeżeli jest brak zgodności pomiędzy wartościami charakterystyki skokowej dokładnej i aproxymowanej, to wprowadza się opóźnienie transportowe lub zwiększa się rzędowość inercyjności funkcji przejścia aproxymacyjnej $W^{**}(\bar{x}, s)$.

Ponieważ

$$H(\bar{x}, s) = \frac{W(\bar{x}, s)}{s} \quad (183)$$

to mamy najlepszą aproxymację funkcji przejścia $W(\bar{x}, s)$, jeżeli zapewnimy minimalną wartość różnicy

$$\Delta_W(\text{const}, s) = W(\bar{x}, s) - W(\bar{x}_r, s) \quad (184)$$

w zakresie zmiennych

$$\begin{aligned} 0 < s < \infty \\ 0 < \bar{x} < \bar{x}_r \end{aligned} \quad (185)$$

Z minimalizacji różnicy (186) oraz zgodności wartości funkcji przejścia dokładnej i aproksymacyjnej wynikają, dla $\bar{x} = \text{const}$, następujące warunki aproksymacji:

$$\begin{aligned} W(\bar{x}, 0) &= W(0) \\ W'(\bar{x}, 0) &= W'(0) \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} W(\bar{x}, s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} W(s) \end{aligned} \quad (186)$$

Z teorii równań różniczkowych wynika, że jeżeli w obszarze (185) dwie funkcje analityczne $W(\bar{x}, s)$ oraz $W(s)$ mają te same wartości w punkcie granicznym $s=0$ oraz w kilku punktach, to funkcje takie w tym obszarze są równe. W procesie aproksymacji należy ponadto zbadać zachowanie się funkcji przy $\bar{x} = \text{const}$, w otoczeniu $s \rightarrow \infty$.

Otrzymamy dla $i=1, n$ dodatkowe warunki

$$\begin{aligned} W^{(i)}(\bar{x}, \infty) &= 0 \\ W^{(i)}(\text{const}, \infty) &= 0 \end{aligned} \quad (187)$$

Metoda aproksymacji, oparta na kryteriach całkowych, jest szczególnie przydatna jeżeli znamy dokładną postać funkcji przejścia. Metoda ta operuje prostym schematem obliczeniowym oraz daje absolutną zgodność wartości charakterystyk dynamicznych w punktach $s \rightarrow 0$ oraz $s \rightarrow \infty$. Wadą metody jest niemożliwość przewidywania postaci funkcji przejścia w obszarze $0 < s < \infty$. Ponadto, błąd aproksymacji jest nierównomierny w całym obszarze przejściowym, ponieważ aproksymację realizuje się w oparciu o zgodność powierzchni.

10.11.4. Aproksymacja funkcji przejścia obiektu o parametrach rozłożonych funkcją przejścia lub kombinacją funkcji przejścia obiektów o parametrach skupionych

Aproksymacja tego typu sprowadza się do zastąpienie obiektu dynamicznego o parametrach rozłożonych /przy ustalonym $x, n, p, x=L/\text{fikcyjnym}$ obiektem dynamicznym o parametrach skupionych. Uproszczenie takie jest wygodne do obliczeń praktycznych. Jako kryterium przybliżenia aproksymacyjnego przyjmuje się minimalną wartość funkcjonału

$$\int_0^{\infty} |u(x,t) - u^{**}(x,t)|^k dt = \min \quad (188)$$

Do aproksymacji używa się funkcji przejścia członu inercyjnego pierwszego rzędu lub kaskady takich członów oraz kombinacji funkcji przejścia członów inercyjnych i członu czystego opóźnienia /niekiedy dodaje się dodatkowo człon całkujący/. Stałe czasowe, opóźnienie transportowe oraz współczynnik wzmocnienia wyznacza się doświadczalnie albo określa się teoretycznie na podstawie opisu obiektu równaniami różniczkowymi zwyczajnymi.

Jako formy aproksymacyjne mogą być przyjęte następujące funkcje przejścia /człon dynamiczny o takich funkcjach przejścia można uważać za elementarne/

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1} \quad (189)$$

$$W(s) = k \frac{T_1 s + 1}{Ts+1} \quad (190)$$

$$W(s) = k \left(\frac{1}{Ts+1} \right)^n \quad (191)$$

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (192)$$

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1} e^{-s\tau_0} \quad (193)$$

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-s\tau_0} \quad (194)$$

$$W(s) = \frac{k}{(Ts+1)^n} e^{-s\tau_0} \quad (195)$$

$$W(s) = k \left[k_1 + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{T_i s + 1} \right] e^{-s\tau_0} \quad (196)$$

$$W(s) = k \frac{b_1 s + 1}{Ts+1} \cdot e^{-s\tau_0} \quad (197)$$

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(Ts+1)^n} e^{-s\tau_0} \quad (198)$$

gdzie: k - współczynnik wzmocnienia obiektu,
 T_0 - opóźnienie transportowe,
 T, T_1, T_2 - stałe czasowe.

Jeżeli funkcję przejścia $W(x, s)$ dla $x=x_r$ aproksymuje się wyrażeniem (190), to współczynniki k, T_1 oraz T_2 wyznacza się z warunków (178), (179) oraz (180), w których zamiast charakterystyki skokowej używa się funkcji przejścia. Otrzymamy następujące relacje:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W(x, s) = \lim_{s \rightarrow 0} k \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = k \quad (199)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W(x, s) = \lim_{s \rightarrow \infty} k \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = k \frac{T_1}{T_2} \quad (200)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} W(x, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} k \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = k(T_1 - T_2) \quad (201)$$

10.11.5. Aproksymacje funkcji przejścia wielomianami ortogonalnymi

Jeżeli struktura równań różniczkowych cząstkowych pozwala na łatwe wyznaczenie transcendentnej funkcji przejścia, to dla $x=x_r$ funkcję taką aproksymuje się np. wielomianem Laguerre

$$W^{**}(x, s) \Big|_{x=x_r} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{s}{s+\alpha} \right)^n \quad (202)$$

Współczynniki stałe c_n oraz α wyznacza się ze wzorów

$$c_n = \frac{1}{n!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} [W(x_r, s) (s+\alpha)^{n-1}] \quad (203)$$

$$\alpha = \frac{c_0}{\frac{d}{ds} W(x_r, s) \Big|_{s \rightarrow 0}} \quad (204)$$

Wprowadzając wzory określające współczynniki c_n oraz α do zależności (202), otrzymamy następującą postać aproksymacyjną funkcji przejścia $W(x, s) \Big|_{x=x_r}$

$$W^{**}(x_r, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} [W(x_r, s) (s+\alpha)^{n-1}] \left(\frac{s}{s+\alpha} \right)^n \quad (205)$$

Dla $n=1$ wzór (205) przyjmuje postać

$$W^{**}(x_r, s) = C_0 + W'(0) \quad (206)$$

Dla $n=2$ współczynnik C_2 wyznacza się z zależności

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2}{ds^2} [W(x_r, s)(s+\alpha)] = \frac{4}{2} [2W'(0) + \alpha W''(0)] \quad (207)$$

i wzór (205) przyjmuje postać

$$W^{**}(x_r, s) = C_0 + W'(0) \frac{s}{s+\alpha} + \frac{4}{2} [2W'(0) + \alpha W''(0)] \left(\frac{s}{s+\alpha} \right)^2 \quad (208)$$

W celu polepszenia jakości aproksymacji używa się nie jednej funkcji Laguerre'a (202) lecz iloczynem funkcji

$$W^{**}(x_r, s) = W_1(s) W_2(s) \quad (209)$$

gdzie: $W_1(s)$ - funkcja Laguerre'a,

$W_2(s)$ - funkcja ułankowo wymierna

$$W_2(s) = \left(\frac{1}{s+\beta} \right)^N \quad (210)$$

Wykorzystując wzory (202) oraz (210), otrzymany aproksymację funkcji przejścia

$$W^{**}(x_r, s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{s}{s+\alpha} \right)^n \left(\frac{1}{s+\beta} \right)^m \quad (211)$$

gdzie c_n , α oraz β są współczynnikami stałymi, podlegającymi wyznaczeniu.

Współczynnik c_n wyznacza się ze wzoru wyprowadzonego w oparciu o wzór (172)

$$c_n = \frac{1}{n!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} [W(x_r, s)(\alpha\beta - s^2) \left(\frac{1}{s+\alpha} \cdot \frac{1}{s+\beta} \right)^{1-n}] \quad (212)$$

Współczynnik β określa się z zależności

$$\beta = \left[\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2}{ds^2} W(x_r, s) \right]^{-1} \quad (213)$$

Uwzględniając wzory (212) oraz (213) w zależności (211), otrzymany następującą postać aproksymacyjną funkcji przejścia $W(x_r, s)$

$$W^{**}(x_r, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} [W(x_r, s)(\alpha\beta - s^2) \left(\frac{1}{s+\alpha} \cdot \frac{1}{s+\beta} \right)^{1-n}] \left(\frac{s}{s+\alpha} \right)^n \left(\frac{s}{s+\beta} \right)^m \quad (214)$$

We wzorze (209) zamiast funkcji $W_2(s)$ można użyć wielomian ortogonalnego.

10.11.6. Srowadzenie równań różniczkowych cząstkowych do równań różniczkowych zwyczajnych, w obszarze współrzędnej x

Dla układu równań różniczkowych cząstkowych złożonej struktury, gdy jest trudne lub praktycznie niemożliwe wyznaczenie funkcji przejścia, stosuje się aproksymację funkcji stanu w obszarze argumentu x szeregiem potęgowym lub wielomianem ortogonalnym.

Równanie różniczkowe cząstkowe poddaje się przekształceniu Laplace'a $s \rightarrow \lambda$, w wyniku czego otrzymuje się równanie różniczkowe z nowymi współczynnikami oraz funkcją stanu w postaci transformaty $U(x, s)$. Następnie funkcję tę rozkłada się w szereg potęgowy względem zmiennej s , ze współczynnikami zależnymi od argumentu x

$$U(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J^n(x) s^n \quad (215)$$

Funkcje $J^n(x)$ jako kryteria całkowe oceny n -tego rzędu wyznaczają się ze wzoru

$$J^n(x) = (-1)^n \frac{1}{n!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n}{ds^n} U(x, s) \quad (216)$$

który można zapisać w postaci równoważnej

$$J^n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^n \frac{\partial}{\partial t} U(x, t) dt \quad (217)$$

Uwzględniając współczynniki (217) we wzorze (215), różniczkując n razy względem s równanie różniczkowe z funkcją stanu $U(x, s)$ oraz przechodząc do granicy $s \rightarrow 0$, otrzymamy układ równań różniczkowych zwyczajnych, łatwych do rozwiązania.

Funkcję $U(x, s)$ można również przedstawić w postaci szeregu ortogonalnego

$$U(x, s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_n(x) \left(\frac{s}{s+\alpha} \right)^n \quad (218)$$

10.11.7. Aproksymacja charakterystyk dynamicznych metodą wariacyjną

Metody aproksymacji wariacyjnej oparte są na wyborze, ze zbioru

charakterystyk skokowych, takiej charakterystyki, która minimalizuje funkcjonal typu

$$J = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [\eta(x,t) - \eta^{**}(x,t)] dt dx = \min \quad (219)$$

lub typu

$$J = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [\eta(x,t) - \eta^{**}(x,t)]^2 dx dt = \min \quad (220)$$

Jeżeli funkcja aproksymująca ma postać

$$\eta^{**}(x,t) = \sum_{i=1}^n c_i(x) \psi_i(t) \quad (221)$$

gdzie: c_i - współczynniki,

$\psi_i(t)$ - funkcje zadane /np. zbudowane w oparciu o wielomiany ortogonalne/.

to, po wprowadzeniu funkcji (221) do funkcjonału (219) lub (220), otrzymamy funkcję współczynnika c_i

$$J = J(c_i) \quad (222)$$

W celu wyznaczenia współczynników minimalizujących funkcjonal, należy rozwiązać układ równań

$$\frac{\partial J}{\partial c_i} = 0 ; i = \overline{1, n} \quad (223)$$

Funkcjonały (219) oraz (220) można uprościć, jeżeli porównamy nie charakterystyki skokowe w punktach przestrzeni a powierzchnie w momentach t . Powierzchnie te są określone całką

$$\eta_p(t) = \int_0^l \eta(x,t) dx \quad (224)$$

wówczas funkcjonały mają postacie

$$J = \int_0^{\infty} [\eta_p(t) - \eta_p^{**}(t)] dt \quad (225)$$

$$J = \int_0^{\infty} [\eta_p(t) - \eta_p^{**}(t)]^2 dt \quad (226)$$

10.12. Równania różniczkowe cząstkowe, warunki graniczne, funkcje standaryzujące, charakterystyki impulsowe oraz funkcje przejścia

W literaturze /Butkowskij/ zebrane są różne równania różniczkowe cząstkowe oraz podane są odpowiadające im charakterystyki dynamiczne. Poniżej podano kilka najprostszych przypadków równań, opisujących modele uproszczone obiektów inżynierii chemicznej

$$1. a \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + b \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + cu(x,t) = m(x,t)$$

$$u(y,0) = u_{00}(x); u(0,t) = u_0(t)$$

$$-\infty < x < \infty; t \geq 0; a \neq 0; b \neq 0$$

$$v(x,t) = m(x,t) + au_{00}(x)\delta(t) - b\delta(x)u_0(t)$$

$$g(x,x',t) = \frac{1}{b} \exp\left[-\frac{c}{b}(x-x')\right] \delta\left(t - \frac{a}{b}(x-x')\right) \begin{cases} 1(x-x'); x' > 0 \\ -1(x-x'); x' < 0 \end{cases}$$

$$W(x,x',s) = \frac{1}{b} \exp\left[-\frac{as+c}{b}(x-x')\right] \begin{cases} 1(x-x'); x' > 0 \\ -1(x-x'); x' < 0 \end{cases}$$

$$2. a \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + b \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + cu(x,t) = m(x,t)$$

$$u(x,0) = u_{00}(x); u(0,t) = u_0(t)$$

$$x \geq 0; t \geq 0; a > 0; b > 0; c > 0$$

$$v(x,t) = m(x,t) + au_{00}(x)\delta(t) + b\delta(x)u_0(t)$$

$$g(x,x',t) = 1(x-x') \exp\left[-\frac{c}{b}(x-x')\right] \delta(bt - a(x-x'))$$

$$W(x,x',s) = 1(x-x') \exp\left[-\frac{as+c}{b}(x-x')\right]$$

$$3. a \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + b \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + cu(x,t) = m(x,t)$$

$$u(x,0) = u_{00}(x); u(l,t) = u_0(t)$$

$$x \leq l; t \geq 0; a \neq 0; b \neq 0$$

$$v(x,t) = m(x,t) + au_{00}(x)\delta(t) - b\delta(l-x)u_0(t)$$

$$g(x,x',t) = -\frac{1}{b} 1(x'-x) \exp\left[-\frac{c}{b}(x-x')\right] \delta\left[t - \frac{a}{b}(x-x')\right]$$

$$W(x,x',s) = -\frac{1}{b} 1(x'-x) \exp\left[-\frac{as+c}{b}(x-x')\right]$$

$$4. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t)$$

$$u(x,0) = u_{00}(x); u(0,t) = u_0'(t); u(l,t) = u_0''(t)$$

$$0 \leq x \leq l; t \geq 0; a \neq 0$$

$$v(x,t) = m(x,t) + u_{00}(x) \delta(t) + a^2 \delta'(x) u_0'(t) + a^2 \delta'(l-x) u_0''(t)$$

$$g(x, x', t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x'}{l} \exp \left[- \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t \right]$$

$$W(x, x', s) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x'}{l}}{s + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2}$$

$$5. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + bu(x,t) = m(x,t)$$

$$u(x,0) = u_{00}(x); \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u_0'(t); \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = u_0''(t)$$

$$0 \leq x \leq l; t \geq 0; a \neq 0$$

$$v(x,t) = m(x,t) + u_{00}(x) \delta(t) - a^2 \delta(x) u_0'(t) + a^2 \delta(l-x) u_0''(t)$$

$$g(x, x', t) = \frac{\exp(-bt)}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[- \frac{(x-x'+2nl)^2}{4a^2 t} \right] + \exp \left[- \frac{(x+x'+2nl)^2}{4a^2 t} \right] \right\}$$

$$g(x, x', t) = \frac{\exp(-bt)}{l} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x'}{l} \exp \left(- \frac{n^2 a^2 \pi^2}{l^2} t \right) \right]$$

$$W(x, x', s) = \frac{1}{l(s+b)} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x'}{l}}{s+b + \frac{n^2 a^2 \pi^2}{l^2}}$$

$$6. \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} - a^2 \left[\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} \right] = m(x,y,z,t)$$

$$u(x,y,z,0) = u_{00}(x,y,z); \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,0,t) = u_0'(x,y,t); u(x,y,l,t) = u_0''(x,y,t)$$

$$-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty; 0 < z < l; t \geq 0; a > 0$$

$$v(x,y,z,t) = m(x,y,z,t) + u_{00}(x,y,z) \delta(t) + a^2 \delta(z) u_0'(x,y,t) - a^2 \delta'(l-z) u_0''(x,y,t)$$

$$g(x,y,z, x', y', z', t) = \frac{\exp \left[- \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4a^2 t} \right]}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left\{ \exp \left[- \frac{(z-z'+2nl)^2}{4a^2 t} \right] - \exp \left[- \frac{(z+z'+2nl)^2}{4a^2 t} \right] \right\}$$

$$W(x,y,z, x', y', z', s) = \frac{1}{4a^2 \pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{R_1} \exp \left(-R_1 \frac{\sqrt{s}}{a} \right) - \frac{1}{R_2} \exp \left(-R_2 \frac{\sqrt{s}}{a} \right) \right]$$

$$R_1 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'+2nl)^2$$

$$R_2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'+2nl)^2$$

10.13. Optymalizacja obiektów dynamicznych o parametrach rozłożonych

10.13.1. Wstęp

Często, zaprojektowany i wykonany aparat nie stanowi rozwiązania idealnego. Realizacja praktyczna układu regulacji pracą takiego aparatu jest zagadnieniem inżynierskim, i nie zawsze zaprojektowany układ jest układem optymalnym. W procesie eksploatacji aparatu zachodzi potrzeba wykonania przeróbek oraz zmian nastaw na regulatorach. Po omacku poszukuje się dróg polepszenia wskaźników technologicznych i technicznych procesu przebiegającego w aparacie. Dłatego ostatnim etapem badania dynamiki obiektu powinna być jego optymalizacja.

Przy opracowaniu zagadnień optymalizacji rozróżniamy trzy etapy postępowania:

- formułowanie zagadnień optymalizacji,
- określenie warunków optymalnych,
- realizacja optymalnych warunków w praktyce.

Projektowany aparat /układ regulacji/ powinien spełniać pewne konkretne wymagania techniczne, wyrażone dowolną charakterystyką. Oznaczką rozwiązania optymalnego obiektu dynamicznego jest otrzymanie wartości ekstremalnej funkcji celu /kryterium optymalności/. Jest to najczęściej wielkość wyjściowa, której znaczenie bierze się za podstawę oceny pracy aparatu przy doborze jego optymalnych wskaźników technologicznych.

Wielkość wyjściowa, traktowana jako funkcja celu, powinna spełniać pewne określone warunki:

- powinna być charakterystyką liczbową,
- ocena jakości powinna zmieniać się monotonicznie wraz ze zmianą kryterium optymalizacji.

Śród wskaźników procesowych wybiera się wskaźnik główny, którego spełnienie w procesie optymalizacji pociąga za sobą spełnienie w sposób zadawalający pozostałych wskaźników.

Najbardziej umotywowanym i najlepiej opracowanym kryterium optymalizacji jest kryterium ekonomiczne /zysk maksymalny, koszty własne, rentowność itd./, któremu w operacjach obliczeniowych nadaje się postać matematyczną.

Funkcją celu może być wydajność aparatu, czystość produktu /ocena liczbowa/, stopień przemiany, prędkość reakcji, energia, prędkość przepływu itd. Funkcję celu określa się w oparciu o następujące podstawowe zasady:

- jednoznaczności,
- zgodności z procesem,

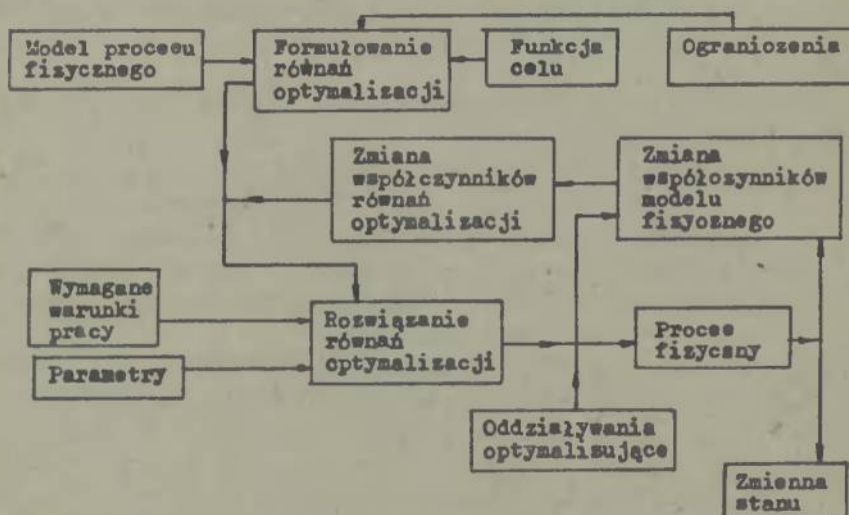
- sterowalności /wyrażenie przez oddziaływania optymalizujące, kontrolowane przez maszyny liczące/,
- orientacji na zysk,
- należytej postaci /posiadać ekstremum/.

Optymalizację funkcji celu realizuje się przy pewnych nałożonych z góry ograniczeniach. Ograniczenia te są powiązane z dynamiką obiektu i stanowią ważną własność procesu optymalizacji. Wyrażają one kompromis pomiędzy sprzecznymi wymaganiami i dotyczą funkcji stanu oraz oddziaływań optymalizujących. Ograniczenia są sformułowane w postaci równości lub nierówności, określających zakres zmian parametrów i mogą być uważane jako rozszerzenie modelu procesu fizycznego. Wyróżniamy ograniczenia sztywne /nie należy ich naruszać/ oraz ograniczenia elastyczne /można przekraczać w otoczeniu wartości/.

Oddziaływania optymalizujące są to wielkości wejściowe, za pomocą których oddziałujemy na obiekt dynamiczny w procesie optymalizacji jego pracy. Oddziaływaniami takimi mogą być również wartości graniczne funkcji stanu lub kombinacja tych funkcji z pochodnymi określonymi na granicy obszaru. Stanowią one więc wynik działania pewnych operatorów nad funkcjami charakteryzującymi stan analizowanego obiektu dynamicznego.

Proces optymalizacji /teoria/ sprowadza się do rozwiązywania równań sformułowanych w oparciu o proces fizyczny przy użyciu aparatu analizy funkcyjnej.

Algorytm realizacji problemu optymalizacji pokazano na rysunku 35.



Rys. 35. Schemat algorytmu procesu optymalizacji

10.13.2. Formułowanie zagadnień optymalizacji

W przypadku ogólnym model matematyczny obiektu dynamicznego wiąże, w postaci zależności matematycznej wielkość wejściową, oddziaływanie optymalizujące, parametry stanu oraz wielkości przypadkowe niezależne i nieoptymalizujące. Funkcja celu dla takiego modelu ma postać

$$K_{opt} = K(m, m^*, u, z) \quad (227)$$

gdzie: K - kryterium optymalizacji,

m - oddziaływanie optymalizujące,

m^* - wielkość kontrolowana lecz nie będąca oddziaływaniem optymalizującym /ustalona/,

u - funkcja stanu,

z - zakłócenie.

Przedstawiona w ten sposób funkcja celu nie może być poddana procesowi optymalizacji, ponieważ jest wielkością przypadkową /w takim przypadku jako funkcję celu przyjmuje się dowolną charakterystykę statystyczną/.

W większości przypadków praktycznych obiekty są odizolowane od oddziaływań otoczenia lub poziom energetyczny zakłócenia jest pomijalnie mały i we wzorze (227) nie uwzględnia się zakłócenia z . Otrzymamy kryterium (227) w nowej postaci

$$K_{opt} = K(m, m^*, u) \quad (228)$$

Ważnym problemem, podczas formułowania funkcji celu, jest określenie aktualnej funkcji rozkładu parametrów stanu oraz wymagań odnośnie żądanego stanu optymalnego. Właściwe sformułowanie matematyczne postawionego zagadnienia jest problemem trudnym, a poprawne ustalenie wymagań w znacznym stopniu ułatwia rozwiązanie problemu optymalizacji.

Funkcję $u(\bar{x}, t)$ można wyznaczyć doświadczalnie lecz jest to przedsięwzięcie trudne, a czasami niemożliwe do zrealizowania praktycznego. Dlatego można ograniczyć się wyznaczeniem pola w oparciu o pomiary wielkości u w ustalonych miejscach w aparacie. Jeżeli dysponujemy modelem matematycznym, to doświadczenie jest potrzebne jedynie do wyznaczenie wartości stałych w równaniu modelowym.

Zagadnienie optymalizacji sprowadza się do ekstremalizacji funkcjonalu /minimalizacja lub maksymalizacja/

$$J = \int [u(\bar{x}, t), u_{\bar{x}}(\bar{x}, t), u_t(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t)] \quad (229)$$

$u \in U$
 $m \in M$

gdzie: J - funkcjonal,
 U, M - ograniczenia.

Dla funkcji stanu, określonej charakterystyką całkową

$$U(\bar{x}, t) = \int_E q(\bar{x}, t) m(\bar{x}, t) d\bar{x} \quad (230)$$

optymalne oddziaływanie optymalizujące, minimalizujące funkcjonal (229),
 wynika z rozwiązania kryterium całkowego

$$J = \int_E P[u(\bar{x}, t), u_{\bar{x}}(\bar{x}, t), u_t(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t)] d\bar{x} \quad (231)$$

gdzie: $(\bar{x}, t) \in E_1$ - dla funkcji $m(\bar{x}, t)$,
 $(\bar{x}, t) \in E$ - dla funkcji $u(\bar{x}, t)$.

Charakterystyka P we wzorze (231) w większości przypadków praktycznych jest kryterium błędu.

Jeżeli celem jest osiągnięcie przez obiekt dynamiczny zadanego stanu w każdym punkcie obszaru Ω i każdym momencie t , to wzór (231) przyjmie postać

$$J = \int_0^{t_k} \int_{\Omega} |u_{opt}(\bar{x}, t) - u(\bar{x}, t)|^k d\bar{x} dt \quad (232)$$

gdzie: $u_{opt}(\bar{x}, t)$ - zadany stan obiektu,
 k - liczba stała / przy $k=2$ funkcjonal buduje się w oparciu o miarę kwadratową błędu/.

Przy uwzględnieniu oddziaływań $m(\bar{x}, t)$ oraz $m_0(\bar{x}, t)$, funkcjonal (232) przyjmie postać / kryterium błędu średniokwadratowego i kryterium mocy/

$$J = \int_0^t \int_{\Omega} [u_{opt}(\bar{x}, t) - u(\bar{x}, t)]^2 d\bar{x} dt + \alpha^2 \int_0^{t_k} \int_{\Omega_1} m^2(\bar{x}, t) d\bar{x} dt + \beta^2 \int_0^{t_k} \int_{\Omega_b} m_b^2(\bar{x}, t) d\bar{x} dt \quad (233)$$

gdzie: α, β - stałe,
 $m_b(\bar{x}, t)$ - wymuszenie warunkami granicznymi.

Jeżeli zagadnienie optymalizacji sprowadza się do osiągnięcia najmniejszego odchylenia funkcji stanu w obszarze Ω od zadanego stanu w momencie $t=T$, to funkcjonal (232) przyjmie postać

$$J = \int_{\Omega} [u_{opt}(\bar{x}, T) - u(\bar{x}, T)]^k d\bar{x} \quad (234)$$

Funkcjonal (231) został zbudowany dla jednej funkcji stanu i dla jednego oddziaływania optymalizującego. Teoria optymalizacji stanowi

umotywowaną podstawę do utworzenia funkcjonału dla obiektów z wieloma zmiennymi w obszarach $\bar{U} \in U$ oraz $\bar{M} \in M$.

10.13.3. Metody rozwiązywania zagadnień optymalizacji

Efektywność rozwiązywania zagadnień optymalizacji zależy od wybranej metody matematycznej, która powinna dać największą objętość informacji przy minimalnym czasie obliczenia. Wybór metody zależy od postawionego kryterium optymalizacji oraz od stopnia złożoności równań modelu matematycznego obiektu dynamicznego. Należy pamiętać, że większą część metod uogólnionych opracowano dla obiektów o parametrach ekupionych, i przy przeniesieniu na obiekty o parametrach rozłożonych dostosowywano je do zagadnień konkretnych.

Istnieje wiele metod ekstremalizacji funkcjonału (231). Do najważniejszych zalicza się:

- metody klasyczne badania funkcji,
- metoda mnożników Lagrange'a,
- rachunek wariacyjny,
- programowanie dynamiczne,
- zasada maksimum.

10.13.3.1. Metoda klasyczna badania ekstremum funkcji

Metoda klasyczna badania ekstremum funkcji ma zastosowanie w przypadku, gdy funkcja celu jest zadana w postaci analitycznej. Tak dla funkcji celu (228) warunkiem koniecznym istnienia ekstremum w punkcie ξ^0 jest spełnienie równości /rozwiązanie określa punkt ξ^0 /

$$\left. \frac{\partial K}{\partial \xi} \right|_{\xi^0} = 0 \quad (235)$$

gdzie $\xi = (m, u)$.

W punkcie ξ^0 funkcja celu może mieć wartość maksymalną lub minimalną w zależności od znaku przyrostu ∂K , określonego z rozkładu funkcji (228) w szeregu Taylora w otoczeniu punktu

$$\begin{aligned} \partial K = K(\xi) - K(\xi^0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial K^i(\xi^0)}{\partial \xi_i} \partial \xi_i + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \partial \xi_i \right]^2 K(\xi^0) + \text{człony wyższego rzędu niż 2} \end{aligned} \quad (236)$$

Po odrzuceniu członu pierwszego rzędu i członów rzędu wyższego niż dwa otrzymamy prostszą postać zależności (236)

$$\partial K \approx \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} \partial \xi_i \right]^2 K(\xi^0) \leq 0 \quad (237)$$

Jeżeli forma kwadratowa (237) jest ujemna, to kryterium optymalności w punkcie ξ^0 na maksimum. Dla dodatniej formy kwadratowej w punkcie ξ^0 funkcja celu ma minimum.

Układ równań, określających ekstremum, jest układem równań nieliniowych i do ich rozwiązania stosowane są maszyny cyfrowe. W punkcie ξ^0 zlokalizowane jest ekstremum wewnętrzne.

10.13.3.2. Metoda mnożników nieokreślonych Lagrange'a

Wprowadzenie ograniczeń na zmienne niezależne znacznie utrudnia proces poszukiwania optimum funkcji celu. Utrudnienia wynikają z faktu, że maksymalne wartości tej funkcji można otrzymać nie w punkcie ξ^0 lecz na granicach obszaru. Ponadto algorytmy obliczeniowe powinny być formułowane z uwzględnieniem ruchu wzdłuż granicy obszaru.

Ograniczenia mogą mieć postać równości lub nierówności i dotyczą funkcji stanu, oddziaływań optymalizujących lub obu tych wielkości.

Jeżeli ograniczenia mają postać równości

$$\varphi[u(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t)] = 0 \quad (238)$$

to w punkcie optymalności wektory gradientów funkcji celu oraz funkcji ograniczeń są kolinearne ze współczynnikiem proporcjonalności λ . Warunek konieczny i dostateczny istnienia optimum można wyznaczyć analitycznie, jeżeli zagadnienie optymalizacji z ograniczeniami (238) sprowadzimy do zagadnienia bez ograniczeń. Osiąga się to przez wprowadzenie mnożników Lagrange'a. Otrzymany funkcjonal L nazywa się funkcją Lagrange'a

$$L[u(\bar{x}, t), u_{\bar{x}}(\bar{x}, t), u_t(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t), \lambda(\bar{x}, t)] = J[u(\bar{x}, t), u_{\bar{x}}(\bar{x}, t), u_t(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t)] + \sum_{j=1}^n \lambda_j(\bar{x}, t) \varphi_j[u(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t)] \quad (239)$$

gdzie $\lambda_j(\bar{x}, t)$ jest funkcją mającą sens mnożników nieokreślonych Lagrange'a.

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji celu (231) przy nałożonych ograniczeniach (238), jest równość zera pochodnych cząstkowych funkcji L względem zmiennych u, m oraz λ

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial J}{\partial u} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} = 0 \quad (240)$$

$$\frac{\partial L}{\partial m} - \frac{\partial J}{\partial m} + \sum_{j=0}^n \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial m} = 0 \quad (241)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} - \varphi(u, m) = 0; i = \overline{1, n} \quad (242)$$

Mnożniki Lagrange'a λ mają poza znaczeniem obliczeniowym również sens ekonomiczny. Charakteryzują one prędkość zmian wartości ekstremalnej funkcji celu w zależności od zmian wielkości ograniczającej. Jeżeli funkcją celu jest koszt dla stanu procesu u_{opt} a funkcja reprezentuje oszczędności surowców, to λ ma sens ceny surowca.

W przypadku ograniczeń słabych

$$\varphi(u, m) \geq 0 \quad (243)$$

optymalizuje się nową funkcję związaną z naruszeniem ograniczeń.

Funkcja ta ma następujące własności:

- w przeważającej części obszaru określonego ograniczeniami funkcja ta jest równa funkcji minimalizowanej,
- funkcja wystarczająco szybko wzrasta przy przejściu poza granice obszaru dopuszczalnego.

Nowa funkcja L , uwzględniająca ograniczenia, przyjmuje postać

$$L[u(\bar{x}, t), u_{\bar{x}}(\bar{x}, t), u_t(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t)] = J[u(\bar{x}, t), u_{\bar{x}}(\bar{x}, t), u_t(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t)] + kH[u(\bar{x}, t), u_{\bar{x}}(\bar{x}, t), u_t(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t)] \quad (244)$$

$$\text{gdzie: } H[u, m] = \sum_{j=1}^n [\varphi_j^*(u, m)]^2 \quad (245)$$

$$\varphi_j^*(u, m) = \begin{cases} \varphi_j(u, m); & \varphi_j(u, m) < 0 \\ 0; & \varphi_j(u, m) \geq 0 \end{cases} \quad (246)$$

k - stała.

Stałą k wyznacza się z warunku

$$k \left| \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi} \right| \gg \left| \frac{\partial J(\xi)}{\partial \xi} \right| \quad (247)$$

10.13.3.3. Metoda wariacyjna

W zagadnieniach optymalizacji, z funkcją celu zadaną w postaci

funkcjonału /dla przestrzeni jednowymiarowej/

$$J = \int_{t_0}^{t_k} \int_0^L L[u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t), m(x,t), \lambda(x,t)] dx dt \quad (248)$$

wartości optymalne u_{opt} , m_{opt} oraz λ_{opt} wyznacza się w oparciu o rachunek wariacyjny. Zagadnienie optymalizacji sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego Eulera-Lagrange'a. Równanie to otrzymuje się z warunku

$$\delta J = 0 \quad (249)$$

spełnionego dla wszystkich możliwych wariacji $u(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_t(x,t)$, $m(x,t)$ oraz $\lambda(x,t)$ funkcji określonych na granicach całkowania. Warunki graniczne stanowią część nieodłączną rachunku wariacyjnego i dowolna zmiana ich powoduje zmianę postaci funkcji realizującej ekstremalną wartość funkcyjonału.

Wariację funkcyjonału (248) określa zależność

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_k} \int_0^L [\delta L[u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t), m(x,t), \lambda(x,t)]] dx dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_k} \int_0^L [\delta L[u(x,t) + \epsilon \delta u(x,t), u_x(x,t) + \epsilon \delta u_x(x,t), u_t(x,t) + \epsilon \delta u_t(x,t), \\ &\quad m(x,t) + \epsilon \delta m(x,t), \lambda(x,t) + \epsilon \delta \lambda(x,t)] - L[u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t), m(x,t), \lambda(x,t)]] dx dt \quad (250) \end{aligned}$$

Zakładając, że funkcyjonał J ocenia się członem pierwszego rzędu w rozkładzie wariacji δJ w szereg Taylora dokoła ϵ w przestrzeni funkcyjonalnej, otrzymany zależność

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\epsilon} &= \int_{t_0}^{t_k} \int_0^L \left[\frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial m} \delta m + \frac{\partial L}{\partial \lambda} \delta \lambda - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u \right) \right] dx dt + \int_0^L \left(\frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u \right) \Big|_{t_0}^{t_k} dx \quad (251) \end{aligned}$$

Zobac warunku (249), przy $\epsilon \rightarrow 0$, każdy ze składników równania (251) niezależnie dąży do zera. Stąd otrzymamy układ równań określających $u_{opt}(x,t)$, $m_{opt}(x,t)$ oraz $\lambda_{opt}(x,t)$

$$\frac{\partial L}{\partial m} = 0 \quad (252)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (253)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) = 0 \quad (254)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u_t} \right) \Big|_{t_0}^{t_k} = 0 \quad (255)$$

Równanie (254) nazywane jest równaniem Eulera-Lagrange'a i jest równaniem nieliniowym skomplikowanej postaci, nie zawsze dającej się rozwiązać analitycznie. W zagadnieniach praktycznych rozwiązanie realizuje się metodami numerycznymi, metodą rozkładu w szereg funkcji ortogonalnych lub stosuje się aproksymację odcinkami liniową.

Równanie (254) zapewnia tylko warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału i należy to ekstremum sprawdzić. Korzysta się z warunku Lagrange'a na drugą pochodną wariancji funkcjonału

$$\frac{\partial^2 J}{\partial m^2} > 0 \quad / \text{minimum funkcjonału} / \quad (256)$$

10.13.3.4. Metoda programowania dynamicznego

W przypadku obiektów wielostopniowych lub dających się sprowadzić do wielostopniowych /kaskada reaktorów, wielostopniowe wymienniki ciepła, kolumny, ekstraktory itd./ rozwiązanie zagadnień optymalizacji realizuje się metodą programowania dynamicznego.

Rozdzielając obiekt o parametrach rozłożonych na małe elementy, otrzymamy, udyskretnioną odpowiednią liczbą stopni, postać kaskadową takiego obiektu. Model matematyczny ciągły aproksymowany jest równoważnym układem równań różniczkowych, wiążących ze sobą stopnie oddległe od siebie o przedział kwantowania. Kryterium optymalności w takim przypadku jest addytywną funkcją kryteriów optymalności poszczególnych stopni

$$P = \sum_{i=0}^N K_i \quad (257)$$

gdzie: N - liczba stopni,

K_i - funkcja celu i-tego stopnia,

P - funkcja celu obiektu.

Addytywność nie jest warunkiem koniecznym do rozwiązania zagadnień optymalizacji metodą programowania dynamicznego, lecz upraszczają się w ten sposób pewne etapy rozwiązania. Metoda ta zamienia skomplikowane rozwiązanie zagadnień optymalizacji pewną liczbą zagadnień prostych. Wielostopniowy obiekt jest analizowany przez wielokrotne stosowanie równania funkcjonalnego tego samego typu.

W celu sformułowania równania funkcjonalnego, powinno być znane:

- równanie stanu i -tego elementu

$$u^i = F^i(u^{i-1}, m^i) \quad (258)$$

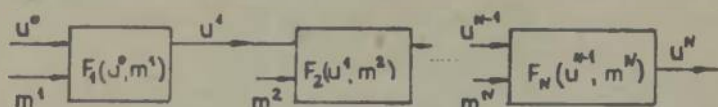
- ograniczenia

$$u \in U; m \in M \quad (259)$$

- wartości zmiennej stanu u^0 oraz u^N .

Wówczas zagadnienie optymalizacji formuluje się następująco: ze zbioru oddziaływań należy wybrać takie oddziaływanie, które przy zadanej wartości u^0 na wejściu do pierwszego elementu pozwala osiągnąć zadaną wartość u^N zmiennej wyjściowej ostatniego, N -tego, elementu, i to w taki sposób, że funkcja celu osiąga wartość ekstremalną.

Schemat blokowy procesu wieloetapowego pokazano na rysunku 36.



Rys. 36. Schemat blokowy procesu wieloetapowego

Zagadnienie optymalizacji rozwiązuje się najłatwiej dla ostatniego, N -tego elementu, ponieważ uwzględnia się tylko nieokreśloność elementu $N-1$ -ego. Po określeniu oddziaływania optymalizującego m^N , przechodzi się do wyboru oddziaływania m^{N-1} , przy którym funkcja celu dwóch ostatnich elementów osiąga ekstremum. Po zoptymalizowaniu ostatniego elementu, analizuje się wyjście $N-2$ -ego elementu. Postępowanie obliczeniowe kontynuuje się aż do optymalizacji całkowitej, tj. aż do momentu, gdy sygnałem wejściowym jest u^0 .

Procedura obliczeniowa zagadnienia optymalizacji rozpoczyna się od N -tego elementu, dla którego wyznaczono maksymalną wartość funkcji celu

$$P_i^*(u^{N-1}) = \max_{\substack{u^{N-1} \in U \\ m^N \in M}} \{K_N(u^{N-1}, m^N)\} \quad (260)$$

Z zależności (260) wyznacza się oddziaływanie optymalizujące

$$m^N = f_N(u^{N-1}) \quad (261)$$

Dla wyznaczonego m^N ustala się zależność

$$u^N = g_N(u^{N-1}, m^N) \quad (262)$$

Dla znanej wartości maksymalnej funkcji celu /suma optymalizacji elementu N oraz $N-1$ /

$$P_2^*(u^{N-2}) = \max_{\substack{u^{N-2} \in U \\ m^{N-1} \in M}} \{K_{N-1}(u^{N-2}, m^{N-1}) + P_1^*(u^{N-1})\} \quad (263)$$

analogicznie do wzorów (261) oraz (262), otrzymamy zależności

$$m^{N-1} = f_{N-1}(u^{N-2}) \quad (264)$$

$$u^{N-1} = g_{N-1}(u^{N-2}, m^{N-1}) \quad (265)$$

Wprowadzając wielkość u^{N-1} określoną wzorem (265) do równania (263) otrzymamy inną postać tego równania

$$P_2^*(u^{N-2}) = \max_{\substack{u^{N-2} \in U \\ m^{N-1} \in M}} \{K_{N-1}(u^{N-2}, m^{N-1}) + P_1^*[g_{N-1}(u^{N-2}, m^{N-1})]\} \quad (266)$$

Powtarzając operacje obliczeniowe, otrzymamy zależność dla $N-i$ -tego elementu

$$P_i^*(u^{N-i}) = \max_{\substack{u^{N-i} \in U \\ m^{N-i+1} \in M}} \{K_{N-i+1}(u^{N-i}, m^{N-i+1}) + P_{i-1}^*[g_{N-i+1}(u^{N-i}, m^{N-i+1})]\} \quad (267)$$

która jest podstawowym równaniem funkcjonalnym programowania dynamicznego /równanie Bellmana/.

Równanie (267) w połączeniu z równaniem (258) oraz ograniczeniami (259) daje pełny układ równań, z których wyznacza się oddziaływanie optymalne

$$\begin{aligned} m^1 &= f_1(u^0); u^1 = g_1(u^0, m^1) \\ m^2 &= f_2(u^1); u^2 = g_2(u^1, m^2) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (268)$$

Złożoność problemu obliczeniowego wzrasta wraz ze wzrostem liczby elementów. W celu uproszczenia obliczeń praktycznie przyjmuje się $N=4+5$.

10.13.3.5. Zasada maksimum

Jeżeli oddziaływania optymalizujące nie są funkcjami ciągłymi, a ograniczenia mają postać nierówności (243), to do rozwiązywania zagadnień optymalizacji używa się metody zwanej zasadą maksimum Pontryagina. Tworzy się funkcję pomocniczą /funkcja Hamiltona/, która jest równa iloczynowi skalarowemu funkcji pomocniczej $\lambda(\bar{x}, t)$ oraz funkcji stanu obiektu dynamicznego

$$\begin{aligned} H[\lambda(\bar{x}, t), u(\bar{x}, t), u_{\bar{x}}(\bar{x}, t), u_t(\bar{x}, t)] = \\ = \lambda_0 \gamma [u(\bar{x}, t), u_{\bar{x}}(\bar{x}, t), u_t(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t)] + \\ + \sum_{i=1}^n \lambda_i(\bar{x}, t) F_i[u(\bar{x}, t), u_{\bar{x}}(\bar{x}, t), u_t(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t)] \quad (269) \end{aligned}$$

gdzie: λ_0 - stała określana z kryterium optymalizacji,

$H[]$ - funkcja Hamiltona,

$\lambda(\bar{x}, t)$ - funkcja pomocnicza,

$F_i[]$ - funkcja stanu obiektu.

Pomocniczą funkcję $\lambda(\bar{x}, t)$ wyznacza się z rozwiązania układu równań cząstkowych

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial u} - (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial \bar{x}_i} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \left[\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_i} \right]} \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]} \right\} \quad (270)$$

Dla rozwiązania niezerowego warunkiem optymalności funkcji celu jest osiągnięcie maksymalnej wartości funkcji H , przy $m(\bar{x}, t) = m_{opt}(\bar{x}, t)$, $u(\bar{x}, t) = u_{opt}(\bar{x}, t)$ oraz $\lambda(\bar{x}, t) = \lambda_{opt}(\bar{x}, t)$, tj. spełnienie równości

$$\begin{aligned} \max_{m \in M} H[\lambda_{opt}(\bar{x}, t), u_{opt}(\bar{x}, t), u_{\bar{x}opt}(\bar{x}, t), u_{topt}(\bar{x}, t), m(\bar{x}, t)] = \\ = H[\lambda_{opt}(\bar{x}, t), u_{opt}(\bar{x}, t), u_{\bar{x}opt}(\bar{x}, t), u_{topt}(\bar{x}, t), m_{opt}(\bar{x}, t)] \geq 0 \quad (271) \end{aligned}$$

W obliczeniach praktycznych zasada maksimum określa konieczny i dostateczny warunek optymalności. Jeżeli wyznaczono optymalne oddziaływanie optymalizujące, to ono jest rzeczywiście optymalne i nie ma potrzeby dodatkowego sprawdzenia osiągnięcia warunku optymalności.

Jeżeli zagadnienie optymalizacji zadane jest nieliniową funkcją celu oraz nałożone są ograniczenia nieliniowe, to do rozwiązania problemu optymalizacji stosuje się metodę programowania nieliniowego. Metoda ta, wraz z omawianymi metodami, stanowi podstawę do zbudowania optymalizatorów, stosowanych w bezpośrednim sterowaniu procesów technologicznych.



LITERATURA

1. Zadeh L.A., Desoer C.A.: Linear system theory, McGraw-Hill, N.Y., 1963.
2. Sołodownikow W.W.: Dynamika statystyczna liniowych układów sterowania automatycznego, WNT, Warszawa, 1964.
3. Tou L.T.: Modern control theory, McGraw-Hill Book Comp. Inc., N.Y., S.F., T., L., 1964.
4. Wang P.K.C.: Control of distributed parameter systems, in Advances in control systems, v.1 /Ed. by C.T. Leonides/, Academic Press, N.Y., 1964.
5. Emeljanov S.V.: Sistemy avtomatičeskogo upravlenija s peremennoj strukturoj, Nauka, M., 1967.
6. Gelb A., Vander Valde W.E.: Multiple-input describing functions and nonlinear system design, McGraw-Hill Book Comp. Inc., N.Y., 1968.
7. Butkovskij A.G.: Distributed control systems, Am. Elsevier P. Comp., N.Y., 1969.
8. Kotjuk A.F., Cvetkov E.I.: Spektralnyj i korrelacjonnyj analiz nestacionarnych slučajnych processov, Izd. Standartov, M., 1969.
9. Mitchell A.R.: Computational methods in partial differential equations, Wiley, N.Y., 1969.
10. Von Rosenberg D.W.: Methods for numerical solution of partial differential equations, Am. Elsevier P. Comp., N.Y., 1969.
11. Aström K.J.: Introduction to stochastic control theory, Academic Press, N.Y., 1970.
12. D'Angelo H.: Linear time-varying systems: analysis and synthesis, Allyn and Bacon, Boston, 1970.
13. Himmelblau D.M.: Process analysis by statistical methods, Wiley, N.Y., 1970.
14. Jazwinski A.H.: Stochastic process and filtering theory, Academic Press, N.Y., 1970.
15. Rosin M.F.: Statističeskaja dinamika i teorija effektivnosti sistem upravlenija, Mašinostroenie, M., 1970.
16. Phillipson G.A.: Identification distributed parameter systems, Am. Elsevier P. Comp., N.Y., 1971.
17. Moiseev N.N.: Čislennye metody v teorii optimalnych sistem, Nauka, M., 1971.
18. Sage A.P., Melsa J.L.: System identification, Academic Press, N.Y., 1971.
19. Solodov A.W., Patrov F.S.: Linejnye avtomatičeskije sistemy s peremennymi parametrami, Nauka, M., 1971.
20. Director S.W., Rohrer R.A.: Introduction to systems theory, McGraw-

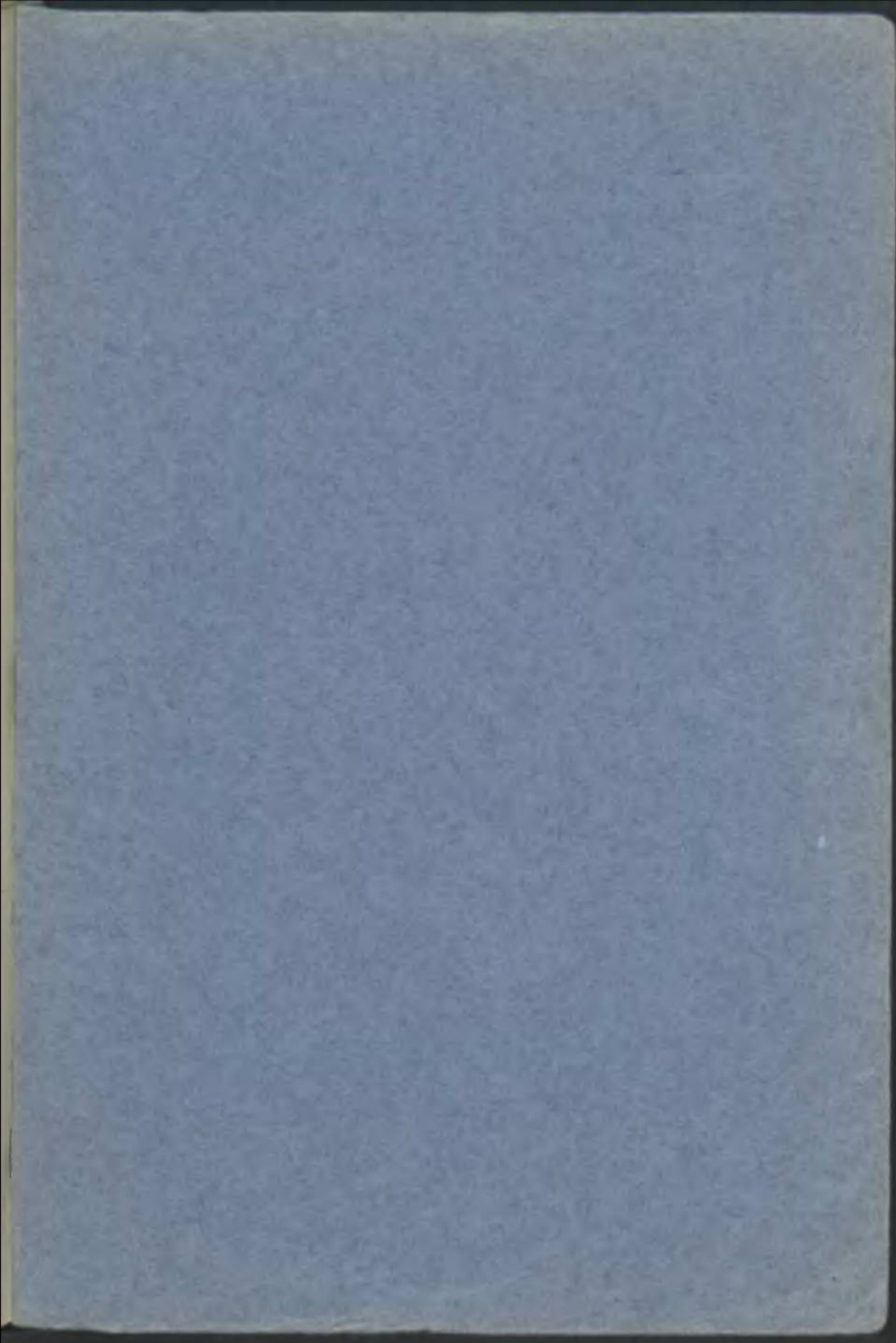
- Hill Book Comp., N.Y., 1972.
21. Tichonov A.V., Samarskiy A.A.: *Uravneniya matematičeskoj fiziki*, Nauka, M., 1972.
 22. McGarty T.P.: *Stochastic systems and state estimation*, Wiley, N.Y., 1973.
 23. Goodson R.E., Polis M.P.: *Identification of parameters in distributed systems*, ASME Monogr., 1974.
 24. Seinfeld J.H., Lapidus L.: *Mathematical methods in chemical engineering*, v. 3, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N. Jersey, 1974.
 25. Evlanov L.G., Konstantinov V.M.: *Sistemy so slučajnymi parametrami*, Nauka, M., 1976.
 26. Butkovskij A.G.: *Metody upravljenja sistemami s raspredelennymi parametrami*, Nauka, M., 1975.
 27. Fisher D.G., Seborg D.E.: *Multivariable computer control*, Am. Elsevier p. Comp., N.Y., 1976.
 28. Solodov A.W.: *Metody teorii sistem v zadačach neprerivnoj linejnoj filtraoci*, Nauka, M., 1976.
 29. Possard A.J.: *Multivariable system control*, North-Holland, Amsterdam, 1977.
 30. Owens D.H.: *Feedback and multivariable systems*, Peter peregrinus LTD, 1978.
 31. Shinnars S.M.: *Modern control system theory and Application*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1978.
 32. Butkovskij A.G.: *Charakteristiki sistem c raspredelennymi parametrami*, Nauka, M., 1979.
 33. Ray W.H.: *Advanced process control*, McGraw-Hill Book Comp., N.Y., 1981.
 34. Kaczorek T.: *Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych*, WNT, Warszawa, 1983.
 35. Åström K.J., Wittenmark B.: *Computer controlled systems*, Prentice/Hall International Inc., N.Y., 1984.
 36. Bose N.K.: *Multidimensional systems theory*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht/Boston/Lancaster, 1984.
 37. Banks S.P.: *Control systems engineering*, Prentice-Hall International /UK/ Ltd., 1986.
 38. Krasovskij A.A. /red./: *Spravočnik po teorii avtomaticheskogo upravljenja*, Nauka, M., 1987.
 39. Masiuk S.: *Mechanika płynów*, Wyd. PS, Szczecin, 1988.
 40. Masiuk S.: *Dynamika procesowa I*, Wyd. PS, Szczecin, 1989.

SKOROWIDZ RZECZOWY

- całka spłotu 66
- charakterystyka impulsowa
 - filtru 82
- charakterystyka impulsowa
 - układu optymalnego 85
- diagonalizacja 106
- dyspersja 22
- dyspersja błędna 84
- filtr ortogonalny 169
- funkcja autokorelacyjna 25
- funkcja celu 229
- funkcja charakterystyczna 19
- funkcja Greena 200
- funkcja Hamiltona 240
- funkcja korelacyjna
 - unormowana 28
- funkcja Lagrange'a 235
- funkcja odcinkami prosta 63
- funkcja rozkładu
 - prawdopodobieństwa 14
- funkcja standaryzująca 227
- funkcja wagowa 36
- funkcja zespolona przypadkowa 35
- klasy wymuszonych przypadkowych 64
- kryterium doboru 95
- liczba trafień 48
- macierz fundamentalna 118
- macierz funkcji przejścia 121
- macierz jednostkowa 104
- macierz operatora 128
- macierz przejścia stanów 111
- macierz współczynników
 - rozszerzona 103
- macierz Wronskiego 143
- metryka wektora 167
- miara estymacji 52
- mnożnik Lagrange'a 233
- momenty początkowe 19
- model macierowo-wektorowy 101
- model skalarowy 100
- nadsieja matematyczna 21
- norma wektora 167
- obiekt stabilny w przedziale
 - czasu 154
- obiekt stochastyczny 89
- obiekt wielowymiarowy 127
- obraz graficzny funkcji
 - korelacyjnej 23
- obszar całkowania 72
- ograniczenia 234
- operator liniowy całkowy 198
- operator uśredniania 13
- opóźnienie transportowe 219
- proces stochastyczny normalny 18
- proces stochastyczny
 - quasi-ustalony 44
- proces stochastyczny singularny 43
- przejście graniczne 50
- przedział częstotliwości
 - istotnych 209
- przedział korelacji 26
- przekształcenie Fouriera 76, 188
- przekształcenie Laplace'a 189
- przekształcenie niezupełne 74
- sprzężenie zwrotne 213
- strumień impulsów 65
- symbol Kroneckera 104
- symbol oznaczający główny argument,
 - względem którego rozwija się
 - proces 139
- szum biały wielowymiarowy 104
- szum parametryczny 159
- średnia moc procesu 32
- transpozycja 105
- układ dynamiczny 98
- układ fundamentalny 77, 80

uśrednienie po czasie 33	widma mocy chwilowe 30,58
uśrednienie po zbiorze 33	własność ergodyczności
warunek ortogonalności 61,62	bieżącej 37
warunek realizacji fizycznej 136	wymuszenie rozłożone 197
wektor stanu początkowego 110	zasada uogólniona 34
widmo bieżące 30	zbieżność probabilistyczna 36





Biblioteka Główna
Politechniki Szczecińskiej

W. 127486



012-127486-02-0