

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Instytut Inżynierii Chemicznej i Chemii Fizycznej

Stanisław Masiuk

MECHANIKA PŁYNÓW

SZCZECIN 1992

SURNAME AND NAME
SURNAME 1 imie

1005 .10. 21

Lucia Rogozinska

1997-10-28

Amelia English

Tomila 01 MAR 1999

02 LUT. 2000

Dariusz Walczak

17 LUT. 2000

2000 -11- 11

2001 -10- 04

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Instytut Inżynierii Chemicznej i Chemii Fizycznej

Stanisław Masiuk

MECHANIKA PŁYNÓW

SZCZECIN 1992

~~Wydanie 1.0~~

Recenzenci

Mieczysław Paderewski
Józef Zabłocki

Opracowanie redakcyjne

Anna Mariańska



W 117758

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Szczecińskiej
z dnia 1992.02.03

Biblioteka Główna
Politechniki Szczecińskiej
W. 117758



012-117758-00-0

WYDAWNICTWO UCZELNIANE POLITECHNIKI SZCZECIŃSKIEJ

Wyd. II poprawione. Nakł. 150+24 egz. Ark. wyd. 14,5.

Ark. druk. 15,9. Oddano do druku 1992.02.03. Druk

ukończono w lutym 1992 r. Zamówienie nr 33/92.

Cena zł 29 000,- (ale drogie!)

Zakład Poligraficzny Politechniki Szczecińskiej "ZAPOL"

71-065 Szczecin, al. Piastów 42a

SPIS RZECZY

Przedmowa	7
Wykaz ważniejszych oznaczeń	9
1. UKŁADY JEDNOSKŁADNIKOWE JEDNOFAZOWE	
1.1. WSTĘP	
1.1.1. Wprowadzenie	11
1.1.2. Zarys historyczny	11
1.1.3. Element płynu	12
1.1.4. Pole	13
1.1.5. Płyn doskonały i płyn rzeczywisty	14
1.2. CIECZE	
1.2. 1. Podstawowe pojęcia pola prędkości liniowej	14
1.2. 2. Ruch wirowy elementu płynu	17
1.2. 3. Własności ruchu bezwirowego	21
1.2. 4. Deformacja płynu	22
1.2. 5. Zasada zachowania masy. Równanie ciągłości.	26
1.2. 6. Siły działające na płyn	30
1.2. 7. Równanie ruchu	34
1.2. 8. Równanie ruchu cieczy doskonałej	38
1.2. 9. Równanie ruchu cieczy rzeczywistej	39
1.2.10. Równanie zachowania energii	49
1.2.11. Równanie bilansu entropii	59
1.2.12. Warunki graniczne	61
1.2.13. Rodzaje ruchów płynów lepkich	62
1.2.14. Przepływ burzliwy	63
1.2.15. Równanie zachowania masy, pędu i energii ruchu burzliwego	66
1.2.16. Naprężenie tarcia	69
1.2.17. Warstwa przyścienna	73
1.2.18. Równanie Prandtla	73
1.2.19. Równania całkowe warstwy przyściennej	77
1.2.20. Całki równania ruchu	79
1.2.21. Potencjał zespolony	82
1.2.22. Podstawowe twierdzenia mechaniki cieczy	86
1.2.22.1. Działanie sił chwilowych	86
1.2.22.2. Energia kinetyczna ruchu bezwirowego	87
1.2.22.3. Własności dynamiczne wirów	88
1.2.22.4. Twierdzenia dotyczące pól wirowych	89
1.2.23. Ruch falowy cieczy. Energia fal	90
1.2.24. Zjawiska nietypowo występujące podczas ruchu cieczy	91

1.2.24.1. Kawitacja	91
1.2.24.2. Uderzenie hydrauliczne	92
1.2.25. Opory przepływu	93
1.2.26. Podobieństwo procesów fizycznych w mechanice płynów	95
1.3. GAZY	
1.3. 1. Podstawowe własności gazu	98
1.3. 2. Podstawowe równania termodynamiczne	100
1.3. 3. Pełny układ równań ruchu gazu ściśliwego, lepkiego i przewodzącego ciepło	102
1.3. 4. Dodatkowe funkcje niezależne	106
1.3. 5. Układ uproszczonych równań ruchu gazu	107
1.3. 6. Równanie Bernoulliego	109
1.3. 7. Przepływ gazu płaski ustalony	110
1.3. 8. Prędkość dźwięku	113
1.3. 9. Parametry krytyczne gazu	114
1.3.10. Funkcje mechaniki gazów	117
1.3.11. Wzory izentropowe	118
1.3.12. Podstawowe równania kinetyki gazu	120
1.3.13. Współczynniki aerodynamiczne	123
1.3.14. Podobieństwo aerodynamiczne procesów fizycznych	124
1.3.15. Zakresy przepływu gazu	127
1.3.15.1. Uwarstwiony przepływ gazu	130
1.3.15.2. Przepływ burzliwy gazu	137
1.3.15.3. Dźwiękowy i naddźwiękowy przepływ gazu.	139
1.3.15.3.1. Prędkość przemieszczania się i prędkość rozchodzenia się powierz- chni nieciągłości	140
1.3.15.3.2. Rozchodzenie się słabych nieciąg- łości	141
1.3.15.3.3. Rozchodzenie się silnych nieciąg- łości	143
1.3.16. Uogólnione równanie Hugoniota	149
1.4. STATYKA PŁYNÓW	
1.4.1. Równanie równowagi	151
1.4.2. Ciśnienie statyczne	153
1.4.3. Warunki dla sił masowych	154
1.4.4. Powierzchnie ekwipotencjalne	155
1.4.5. Parcie płynu na powierzchnie ciał stałych	156
1.4.6. Prawo Archimidesa	158
1.4.7. Równowaga ciał zanurzonych	159

2. UKŁADY WIELOSKŁADNIKOWE ORAZ WIELOFAZOWE

2.1. WSTĘP

2.1.1. Wprowadzenie	160
2.1.2. Zarys historyczny	163

2.2. UKŁADY JEDNOFAZOWE WIELOSKŁADNIKOWE

2.2.1. Wstęp	165
2.2.2. Parametry fizyczne mieszaniny	165
2.2.2.1. Parametry fizyczne mieszanin gazowych	165
2.2.2.2. Parametry fizyczne mieszanin ciekłych	169
2.2.3. Równania mechaniki mieszanin jednofazowych	169
2.2.3.1. Równanie bilansu masy	169
2.2.3.2. Równanie bilansu pędu	175
2.2.3.3. Równanie bilansu energii	177
2.2.3.4. Równanie bilansu entropii	182
2.2.4. Równanie bilansu masy dla przepływu burzliwego	184

2.3. UKŁADY WIELOFAZOWE

2.3.1. Parametry fizykochemiczne układów wielo- fazowych	185
2.3.2. Średnia średnica elementów fazy dysper- syjnej	193
2.3.3. Ruch cząstki nielastycznej	195
2.3.4. Ruch elementu deformowalnego	201
2.3.5. Zjawiska towarzyszące ruchowi skupisk elementów fazy rozproszonej	205
2.3.6. Równania mechaniki układów wielofazowych	205
2.3.6.1. Równania mechaniki płynu jednoskład- nikowego z przemianą fazową	205
2.3.6.2. Homogeniczne mieszaniny wieloskład- nikowe z przemianą fazową	208
2.3.6.3. Równania mechaniki układów dysper- syjnych	215
2.3.6.3.1. Układy dyspersyjne jako miesza- niny heterogeniczne	215
2.3.6.3.2. Równania w mikroskali mechaniki k-tej fazy mieszaniny hetero- genicznej	216
2.3.6.3.3. Równania w mikroskali mechaniki na granicy rozdziału faz	217
2.3.6.3.4. Równania w makroskali mechaniki układów dyspersyjnych	222

3. MECHANIKA PŁYNÓW W POLU ELEKTROMAGNETYCZNYM

3.1. Wstęp	225
3.2. Zarys historyczny	227

3.3.	Podstawowe równania pola elektromagnetycznego . .	228
3.4.	Potencjał skalarowy i potencjał wektorowy pola elektromagnetycznego	230
3.5.	Unoszenie pola magnetycznego płynem dobrze przewodzącym prąd elektryczny	232
3.6.	Siła pola elektromagnetycznego	233
3.6.1.	Wstęp	233
3.6.2.	Siła pola elektrycznego	234
3.6.3.	Siła pola magnetycznego	237
3.7.	Elektrohydrodynamika	241
3.8.	Magnetohydrodynamika	243
3.9.	Elektromagnetohydrodynamika	244
3.10.	Uproszczone równania ruchu płynu w polu elektromagnetycznym	247
3.11.	Elektromagnetohydrostatyka	248
	Bibliografia	251
	Skorowidz rzeczowy	253

PRZEDMOWA

"Mechanika płynów" jest skryptem przeznaczonym dla studentów specjalności Inżynieria Chemiczna na Wydziale Technologii i Inżynierii Chemicznej Politechniki Szczecińskiej.

Liczba godzin dydaktycznych przewidziana w programie studiów na wykłady i ćwiczenia audytoryjne z przedmiotu mechanika płynów jest następująca:

- wykłady 48 godz.,
- ćwiczenia audytoryjne 16 godz.

W skrypcie omówiono zagadnienia mechaniki płynów jednoskładnikowych oraz wieloskładnikowych, jednofazowych oraz wielofazowych. Omówiono również zagadnienia wpływu pola elektromagnetycznego na zachowanie się płynów.

Dla każdego rodzaju płynu sformułowano całkowe i różniczkowe równania bilansu masy, pędu oraz energii. Podano również postacie uproszczone tych równań, które mogą być stosowane w modelowaniu i obliczeniach aparatów technologii chemicznej. Omówiono i wyjaśniono szereg zjawisk natury nietypowej występujących w procesie ruchu płynu.

Równania i wzory przedstawiono w postaci zwartej przez użycie zapisu wektorowego i tensorowego. W nielicznych przypadkach, dla dodatkowego wyjaśnienia natury fizycznej składników równań, przedstawiono je we współrzędnych prostokątnych, walcowych lub kulistych.

Zrozumienie zagadnień omawianych w skrypcie wymaga od studentów minimalnego zasobu wiedzy technicznej. Przyjęto pewne założenia dotyczące poziomu przygotowania czytelników w zakresie matematyki, mechaniki ogólnej, fizyki oraz termodynamiki. Założono w szczególności:

- | | |
|---------------------------------|--|
| a/ w zakresie matematyki | - znajomość algebry i analizy wektorów, teorii pola, algebry tensorów oraz elementarnych wiadomości z teorii funkcji analitycznych i równań różniczkowych, |
| b/ w zakresie mechaniki ogólnej | - znajomość podstaw kinematyki i |

c/ w zakresie fizyki i
termodynamiki

dynamiki punktu materialnego oraz
ciała stałego,

- znajomość podstawowych pojęć oraz
praw.

Podczas opracowania skryptu korzystano z prac wielu autorów, jednak wobec dużej liczby tych prac w bibliografii zestawiono jedynie najważniejsze prace źródłowe natury swartej.

Skrypt spełni swoje zadanie, jeżeli jego treść będzie dla czytelnika bodźcem do samodzielnego i bardziej dociekliwego zbadania współczesnych problemów mechaniki płynów. Źródłem informacji są następujące czasopisma:

Applied Mechanics,
Archive for Rational Mechanics and Analysis,
Izvestja Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Zhidkosti i Gasa,
Journal of Applied Physics,
Mechanika,
Mechanical Engineering,
Mechanics and Applied Mathematics,
Physicochemical Hydrodynamics,
Prikladnaja Mekhanika,
The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics,
Referativnyj Zhurnal. Mekhanika,
Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

A	- praca
$\vec{A}$	- potencjał-wektor elektryczny
A_m	- energia pola magnetycznego
$\vec{A}$	- praca sił międzyfazowych
$\vec{D}$	- indukcja pola elektrycznego
d	- średnica elementu fazy rozproszonej
$\vec{E}$	- natężenie pola elektrycznego
e	- energia całkowita właściwa
$\vec{F}$	- siła masowa
$\vec{F}_e$	- siła elektryczna
$\vec{F}_m$	- siła magnetyczna
$\vec{F}_{em}$	- siła elektromagnetyczna
$\vec{F}_E$	- siła napięcia powierzchniowego
$\vec{G}$	- strumień masowy
$\vec{H}$	- natężenie pola magnetycznego
i	- entalpia właściwa
$\vec{J}$	- gęstość prądu elektrycznego
$\vec{j}$	- strumień masowy dyfuzyjny
M	- moment siły
M	- tensor naprężeń momentowych
m	- masa
N	- liczba elementów fazy rozproszonej; liczba składników
P	- tensor ciśnienia
p	- ciśnienie
p_m	- ciśnienie magnetyczne
Q	- energia wewnętrznych i zewnętrznych oddziaływań
Q_{em}	- ciepło Joule'a
$\vec{q}$	- strumień energii cieplnej
q_t	- wymiana ciepła międzyfazowa
$\vec{r}$	- promień wodzący punkt materialny /promień-wektor/
S	- powierzchnia
S	- tensor naprężeń sprężystych
S_s	- tensor naprężeń sprężystych dla suspensji
S_e	- tensor naprężeń elektrycznych
S_m	- tensor naprężeń magnetycznych
s	- entropia właściwa
T	- tensor prędkości deformacji
T	- temperatura
t	- czas
u	- energia wewnętrzna właściwa
u_Σ	- energia wewnętrzna Σ - fazy

V	- objętość
$\dot{V}$	- strumień objętości
$w(a)$	- potencjał zespolony
$\bar{W}$	- energia elektryczna
$\bar{w}$	- prędkość ruchu postępowego
x	- udział masowy
x_v	- udział objętościowy
Γ	- cyrkulacja prędkości
$\dot{\gamma}$	- prędkość odkształcenia
ϵ	- tensor dielektryczny
ϵ	- przenikalność dielektryczna
ϵ	- energia ruchu pulsacyjnego
χ	- wykładnik adiabaty Poissona
θ	- odkształcenie postaciowe
λ	- współczynnik przewodnictwa cieplnego
μ_m	- tensor przenikalności magnetycznej
μ_m	- przenikalność magnetyczna
$\bar{\mu}_m$	- wektor naprężeń momentowych
μ	- współczynnik lepkości
μ_m	- lepkość magnetyczna
$\bar{\Pi}$	- wektor Poyntinga
ρ	- gęstość
ρ_e	- gęstość objętościowa ładunku elektrycznego
ρ_m	- gęstość ładunków magnetycznych
σ_m	- powierzchnia nieciągłości
Σ	- powierzchnia międzyfazowa
σ	- przewodność elektryczna
ϕ	- napięcie powierzchniowe
$\bar{\tau}_m$	- wektor naprężeń powierzchniowych
Φ	- strumień magnetyczny
ϕ	- potencjał pola prędkości
ϕ	- potencjał siły masowej
ϕ	- potencjał elektryczny
γ	- strumień elektryczny
γ	- potencjał prądu
ω	- prędkość kątowa elementu płynu; prędkość spinowa
Ω	- prędkość kątowa ruchu wirowego
Ω	- tensor prędkości spinowej

1. UKŁADY JEDNOSKŁADNIKOWE JEDNOFAZOWE

1.1. WSTĘP

1.1.1. Wprowadzenie

Mechanika płynów bada makroskopowe zjawiska ruchu i równowagi płynów oraz wzajemne siłowe oddziaływanie płynów i ciał stałych znajdujących się w płynie lub ograniczających płyn.

Przez pojęcie płyn rozumiemy ciało materialne /ciecz, gaz/ mające cechę niezdolności utrzymania kształtu. Ciecz pod działaniem naprężenia deformuje się /płynie/ tak długo, jak długo działa siła. Wielkość deformacji zależy od siły i czasu jej działania. Gaz może istnieć tylko w stanie naprężonym, tj. może mieć objętość tak długo, jak długo działa siła. Ciecz może mieć powierzchnię swobodną. Gaz nie ma powierzchni swobodnej i zajmuje całą objętość pojemności ograniczającej gaz.

1.1.2. Zarys historyczny

Mechanika płynów jest jedną z najstarszych nauk, która obecnie rozwija się dynamicznie dzięki zastosowaniu modelowania maszyn matematycznych oraz doskonaleniu analizującego aparatu matematycznego.

We wcześniejszych etapach rozwoju mechaniki płynów, wyniki doświadczeń trudno było uogólnić, natomiast w późniejszych etapach teoretyczne uogólnienia nie dawały się doprowadzić do ścisłych rozwiązań przydatnych do obliczeń technicznych. Pomimo, że obecnie przeprowadzane są doświadczenia symulacyjne i zastosowany jest doskonały aparat matematyczny, który pozwala opisać analitycznie niezwykle skomplikowane zjawiska, to w wielu przypadkach nie uzyskujemy zadowalających, fizycznie realizowalnych rozwiązań. Stosowane są rozwiązania przybliżone i przybliżone metody obliczeń, wymagające doświadczalnego sprawdzania. Doświadczenia laboratoryjne w mechanice płynów służą do pierwotnego zbadania zjawiska. Jest to ważny etap podczas budowania modelu obliczeniowego.

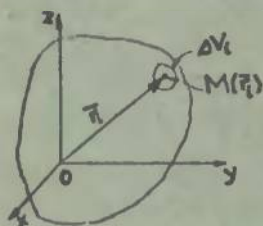
W czasach historycznych bodźcem do rozwoju mechaniki płynów były zagadnienia praktyczne. Wielu wybitnych naukowców tworzyło mechanikę płynów. Do XVII wieku w większości poruszane były problemy oporu przepływu i statyki płynów /Arystoteles, Archimedes, Leonardo da Vinci,

Newton, Stevin, Galileusz, Pascal/. Prace Eulera, Bernoulliego i Lagrange'a dotyczące ruchu płynu i zagadnień energetycznych podczas ruchu płynu, dały początek ściślejszej nowej dyscyplinie nazwanej przez Bernoulliego "Hydrodynamiką". Wiek XIX przynosi dalszy rozwój mechaniki płynów. Poruszane są problemy ruchu płynów lepkich i zagadnienia aerodynamiki /Navier, Poiseon, Saint Venant, Hagen, Poiseuille, Helmholtz, Reynolds, Prandtl/. W XX wieku mechanika płynów stała się jedną z najważniejszych dyscyplin naukowych. Do jej rozwoju przyczyniło się wielu zasłużonych naukowców badających przepływy układów homo- i heterofazowych, oddziaływania pola elektromagnetycznego na poruszający się płyn, zagadnienia stabilności ruchu i inne problemy związane z mechaniką płynów /Kármán, Kolmogorow, Prandtl, Robertson, Betehelotz, Żukowski, Chandrasekhar, Czapiygin, Corrsin, Rotta, Bosworth, Neumark, Wiloszyński, Kocsin, Peebles, Golubiew, Abramowicz, Liepmann, Eck, Rosko, Einstein, Mallock, Minnaert, Hughens, Brenner, Cowling, Ferraro, Alfven, Biermann, Elasser, Hoyle, Lindquist, Schütter, Lehnert, Parker, Kippenhahn, Bernard, Orr, Taylor, Heisenberg, Tietjens, Schlichting, Tolmien i inni/.

1.1.3. Element płynu

Istnieją dwa nurty: teoretyczny i doświadczalny, wyjaśniające zachowanie się płynów, przy czym oba one wyprzedzają się wzajemnie. W badaniach teoretycznych mechanika płynów posługuje się modelem płynu. Jest to wyabstrahowany model badanego zjawiska powstały w wyniku pominięcia istotnych cech zjawiska, a zachowaniu tych cech, które o jego przebiegu decydują. Adekwatność modelu z realnym płynem dokonuje się przez porównanie wyników pomiarów doświadczalnych z wynikami obliczonymi na podstawie przyjętego modelu. Przy rozwiązywaniu różnych zagadnień mechaniki płynów efektywny dobór modelu wymaga znajomości rzeczywistych własności płynów. Od stopnia uwzględnienia tych własności zależy fizyczna realizacja wyników obliczeń. Podczas formułowa-

nia praw ruchu i równowagi płynów mechanika płynów operuje elementem płynu. Jest to objętość ΔV , której wymiary liniowe są wielkościami małymi wyższego rzędu w porównaniu z wymiarami liniowymi ciała stałego znajdującego się w płynie i jednocześnie są wielkościami wyższego rzędu od wymiarów molekularno-kinetycznych. Element płynu określony jest relacją wiążącą objętość i -tego elementu płynu w modelu ośrodka ciągłego z punktem materialnym jako i -tą cząstką dyskretnego modelu płynu



Rys. 1. Element płynu

Relację tę można napisać w postaci

$$M_i(\vec{r}) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \Delta V_i(\vec{r}_i) \quad (1)$$

gdzie: M_i - punkt materialny /i-ta cząstka/,

$\vec{r}_i$ - promień wodzący i-tą cząstkę określoną jako punkt materialny M w przestrzeni $\vec{r}$,

ΔV_i - objętość i-tego elementu płynu.

Element płynu może być dowolnie mały $\Delta V \rightarrow 0$ i zachowywać wszystkie makroskopowe własności fizyczne płynu. Warunek ten pozwala traktować płyny jako ośrodki ciągłe lub dyskretne. Ciecze i gazy traktowane są jako materialne układy kontinualne. Zakres stosowania modelu ośrodka ciągłego określa nierówność

$$\frac{l}{L} < 1 \quad (2)$$

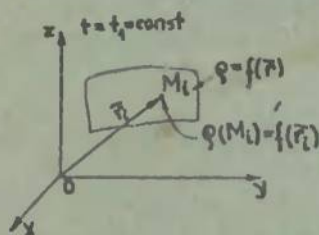
gdzie: l - wymiar molekularno-kinetyczny,

L - odległość, na której zmieniają się istotnie własności makroskopowe.

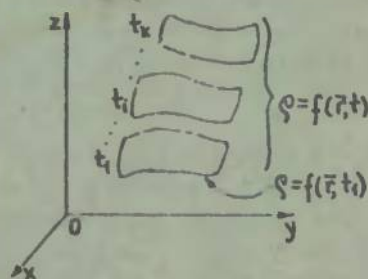
Płyny wieloskładnikowe traktowane są jako układy wielokontinualne lub wielofazowe. Pojęcie elementu płynu nadal obowiązuje, z tym że występują dodatkowe zjawiska zależne od wzajemnego oddziaływania elementów otoczenia oraz od położenia elementu płynu w przestrzeni przepływu. W układach heterofazowych pojęcie "element płynu" odnosi się do fazy ciągłej, którą jest ciecz lub gaz.

1.1.4. Pole

Zgodnie z relacją (1) element płynu ΔV traktuje się jako punkt materialny /twór geometryczny nie mający objętości a obdarzony masą/, a własności makroskopowe płynu określone są jako funkcje punktu M_i i traktowane są jako pola. Pole jest to obszar, w którym wielkość fizyczna charakteryzująca ruch płynu jest funkcją ciągłą punktu / dla



Rys. 2. Pole ustalone



Rys. 3. Pole nieustalone

każdego punktu określona wartość własności/. Modelu ośrodka ciągłego nie stosuje się do gazów silnie rozrzedzonych, a pole własności domaga się nieciągłości przy dużych prędkościach ruchu gazu. Rozróżnimy pole skalarowe /gęstości ρ , temperatury T , ciśnienia statycznego p /, wektorowe /prędkości $\vec{w}$, przyspieszenia $\vec{a}$, siły $\vec{F}$ / oraz pole tensorowe prędkości deformacji $\mathbf{T}$ i naprężeń sprężystych $\mathbf{S}$. Wielkość fizyczna w każdym punkcie pola może nie zależeć od czasu /pole jednorodne ustalone/, zależeć od czasu /pole jednorodne nieustalone/ lub zależeć od czasu, a nie zależeć od przestrzeni /pole jednorodne ustalone/.

Podobnie jak ciągła objętość płynu zestawiona jest z elementami ΔV , również czas może mieć, podczas analizy zjawisk mechaniki płynów, naturę dyskretną, a więc składać się z elementów $\Delta t \rightarrow 0$, tj. momentów nie mających trwania.

1.1.5. Płyn doskonały i płyn rzeczywisty

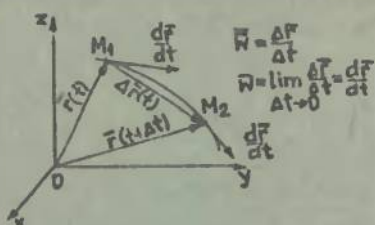
Istotną własnością różniącą płyn doskonały od płynu rzeczywistego jest zdolność przeniesienia przez płyn rzeczywisty naprężeń stycznych. Własność tę nazwano lepkością. W idealnym przypadku dla płynu newtonowskiego zależność pomiędzy naprężeniem stycznym a spadkiem prędkości przepływu wzdłuż grubości warstwy płynu jest liniowa. Współczynnik proporcjonalności nazwano współczynnikiem lepkości. Wynika stąd wniosek, że przy gradiencie prędkości równym jednostki miarą lepkości jest naprężenie styczne, a więc występowanie lepkości tłumaczy się tarcie wewnętrzne płynu. Płyn doskonały nie ma tej zdolności, a więc jest płynem nielepkim. W płynach nielepkich, gdy element płynu $\Delta V \rightarrow 0$ w pewnym momencie $\Delta t \rightarrow 0$ nie ulega odkształceniu, ruch i równowagę określa się jak dla ciała stałego /ruch środka masy oraz prędkość kątowna dookoła osi przechodzącej przez środek masy/. W myśl takiej zasady /zasada zeszywnienia Stevina/ oddziaływanie całej masy "niezeszywnionego" płynu na objętość "zeszywnioną" można traktować jako działanie siły zewnętrznej. W układach wielofazowych zasadę zeszywnienia można stosować do kropli cieczy lub pęcherzyków gazu rozpuszczonych w ściśniętej fazie ciągłej.

1.2. CIECZE

1.2.1. Podstawowe pojęcia pola prędkości liniowej

Ruch elementu płynu jako najmniejszej jego cząstki w przestrzeni $\vec{r}$ opisuje się ruchem wektora prędkości liniowej $\vec{w}$. Elementy płynu mogą

poruszać się w sposób uporządkowany tworząc przepływ warstwowy. W innych warunkach elementy płynu mogą wykazywać ruch poprzeczny względem ruchu głównego. Występują duże zmiany prędkości oraz nieuporządkowanie w zmianach prędkości. Tworzy się przepływ burzliwy. W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że niezależnie od charakteru przepływu, prędkości lokalne cieczy są holomorficznymi funkcjami przestrzeni $\vec{r}$ i czasu t . W nielicznych przypadkach mogą występować nieciągłości prędkości.



Rys. 4. Lokalna $\vec{w}$ i średnia $\vec{w}$ prędkość punktu M

Równanie ruchu i-tego elementu płynu ma postać

$$\vec{r}(t) = A_i \vec{w}_i(\vec{r}, t) \quad (3)$$

gdzie: A_i - prawo ruchu,

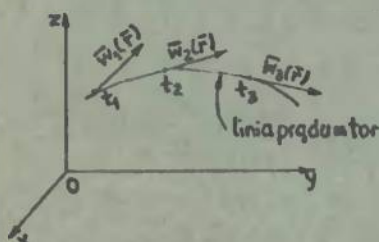
$\vec{w}_i$ - prędkość i-tego elementu płynu.

Wektorowe linie pola prędkości nazywane są w mechanice płynów liniami prądu. Linia prądu jest to krzywa, której wektor prędkości $\vec{w}$ w każdym punkcie przestrzeni przepływu i w każdym momencie czasu ma kierunek stycznej. Równanie linii prądu ma postać

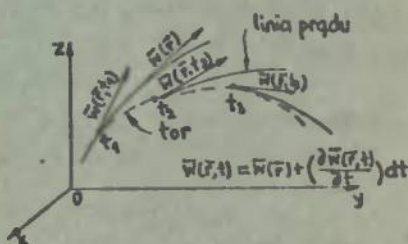
$$\vec{w} \times d\vec{l} = 0 \quad (4)$$

gdzie $d\vec{l}$ - element linii prądu.

W ruchu ustalonym kształt linii prądu nie zmienia się z czasem.



Rys. 5. Ruch ustalony



Rys. 6. Ruch nieustalony

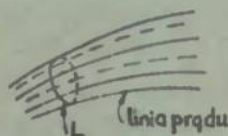
W ruchu nieustalonym albo linie prądu w różnych momentach czasu mają różny kształt, albo przy zachowaniu kształtu linii prądu zmienia się prędkość lokalna płynu. Linia, wzdłuż której porusza się element płynu, nazywana jest torem elementu płynu, traktowanego jako punkt materialny. W ruchu ustalonym torem elementu płynu jest linia prądu.

Stąd wynika wniosek, że w każdej chwili przez każdy punkt pola prędkości przechodzi tylko jedna linia prądu i jeden tor/wyjątkiem są punkty spiętrzenia, gdzie $\vec{w}=0$ /. W ruchu nieustalonym odcinek toru elementu płynu znajdującego się w danym punkcie przestrzeni $\vec{r}$ jest styczny do chwilowej linii prądu. Równanie toru ma postać

$$d\vec{s} = \vec{w} \cdot dt \quad (5)$$

gdzie $d\vec{s}$ - element toru / w ruchu ustalonym $d\vec{r}=d\vec{s}$ /.

Powierzchnia prądu utworzona z linii prądu przecinających kontur zamknięty L , nie będący linią prądu, nazywana jest rurką prądu. Rurkę prądu, w dowolnym przekroju poprzecznym, której rozkład prędkości można traktować jako jednorodny, nazywamy strugą. Każda struga o wymiarze poprzecznym rzędu elementu płynu spełnia postulat jednorodności rozkładu prędkości. Podczas zwiększenia konturu zamkniętego tworzącego rurkę prądu w dowolnym przekroju poprzecznym może zaistnieć niejednorodny rozkład prędkości. Taką rurkę prądu nazywamy strumieniem. Zaniejszenie konturu do punktu redukuje rurkę prądu do linii prądu. Dochodzimy w ten sposób do rurkowego modelu przepływu płynu.



Rys. 7. Rurka prądu

Strumieniem objętościowym $\dot{V}$ strugi jest strumień prędkości przenikającej przez przekrój poprzeczny strugi

$$\dot{V} = \int_S \vec{w} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{w} \vec{n} dS = \int_S w_n dS = \int_S w \cdot dS_n \quad (6)$$

gdzie: dS - przekrój poprzeczny rurki prądu,
 S - przekrój poprzeczny strugi.

Z równania (6) wynika, że wielkość $\dot{V}$ oznacza objętość płynu przepływającego w jednostce czasu przez nieruchomą powierzchnię S , przy czym oznaczamy przez $+\dot{V}$ strumień objętościowy wypływający z powierzchni S , a przez $-\dot{V}$ strumień objętościowy wpływający na powierzchnię S . Mnożąc wyrażenie podcałkowe równania (6) przez ρ otrzymamy strumień masowy strugi

$$\dot{G} = \int_S \rho \cdot \vec{w} \cdot d\vec{S} \quad (7)$$

gdzie ρ - gęstość płynu.

Prawa rządzące ruchem płynu są formułowane w dwojaki sposób, w zależności od sposobu prowadzenia analizy ruchu płynu. W pierwszym przypadku analizuje się wybrany w polu prędkości płynu nieruchomy obszar

kontrolny utworzony z punktów przestrzeni nie zmieniających się w czasie. Przez obszar ten będą przepływały coraz to inne elementy płynu



Rys. 8. Strumień objętościowy

nu jako punkty materialne. Jest to analiza lokalna ruchu płynu / metoda Eulera/. W drugim przypadku rozpatruje się w polu prędkości płynu obszar płynny zmieniający swoje położenie z biegiem czasu, natomiast tworzą go te same elementy płynu. Jest to analiza węd-

rowna ruchu płynu /metoda Lagrange'a/. W zależności od stosowanej analizy ruchu płynu rozróżniamy odmienny zapis pochodnych prędkości /przyśpieszenie liniowe/ płynu:

- jeżeli rozpatrywana objętość płynu jest nieruchoma, to

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \quad (8)$$

- jeżeli rozpatrywana objętość płynu porusza się z prędkością płynu, to

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + (\bar{w} \cdot \text{grad}) \bar{w} \quad (9)$$

- jeżeli rozpatrywana objętość zamykająca płyn porusza się z prędkością $\bar{w}_s$ różną od prędkości płynu $\bar{w}$, to

$$\frac{D\bar{w}}{Dt} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + (\bar{w} \cdot \text{grad}) \bar{w}_s \quad (10)$$

gdzie: $\frac{D}{Dt}$ - pochodna pełna,
 $\frac{d}{dt}$ - pochodna substancjalna/pochodna w kierunku ruchu/, określa ona zmiany zachodzące w tym samym elemencie płynu ograniczonym objętością V ,

$\frac{\partial}{\partial t}$ - pochodna lokalna, określa zmiany zachodzące z upływem czasu w stałym punkcie przestrzeni/dla ruchu ustalonego pochodna ta traci sens/,

$(\bar{w} \cdot \text{grad}) \bar{w}_s$ - pochodna konwekcyjna, określa zmiany związane z przesunięciem objętości V z prędkością $\bar{w}_s$ w inne położenie.

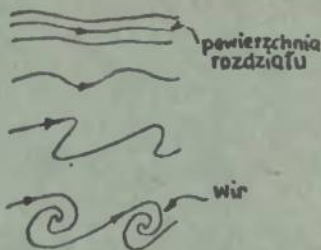
1.2.2. Ruch wirowy elementu płynu

Jeżeli podczas ruchu płynu pole prędkości liniowej generuje pole prędkości kątowej $\bar{\Omega}$, to taki ruch płynu nazywamy wirowy. Zwrót wektora $\bar{\Omega}$ będzie taki, by trójka nieskoplanarnych wektorów $\bar{\Omega}, \bar{r}, \bar{w}$ miała orientację taką, jak przyjęty układ współrzędnych. Powstanie ruchu wirowego, zgodnie z teorią Prandtla, wiąże się ze zjawiskiem rozpadania się warstwy rozdziału lub ze zjawiskiem oderwania się warstwy gra-



W 117758

nicznej od powierzchni. Zetknięcie się strumieni o różnych prędkościach na granicy styku wywołuje jak gdyby skok prędkości. Tworzą się obzary z zamkniętymi liniami prądu i wirowością różną od zera. Powstające powierzchnie rozdziału zakrzywiają się tworząc wiry unoszone przepływem. Główną przyczyną powstania wirów jest lepkość płynu. Struktura ruchu wirowego płynów rzeczywistych /lepkich/ jest złożona. W niektórych przypadkach tworzą się duże, wizualnie obserwowalne wiry. W innych przypadkach prawie cały obszar przepływu wypełniony jest równomiernie rozłożonymi, niewidocznymi wirami elementarnymi; tylko w pewnych obszarach powstają duże widoczne wiry.



Rys. 9. Tworzenie się wiru według teorii Prandtla

Pole prędkości kątowej $\vec{\Omega}$ charakteryzujące ruch wirowy określa się jako

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{w}$$

(11)

gdzie $\vec{\Omega}$ - prędkość kątowa.

Rotacja pola wektorowego nie jest polem wektorowym, lecz polem pseudowektorowym /wektor swobodny/. Pseudowektorem nazywany twórz geometryczny charakteryzujący się długością, kierunkiem i zwrotem zależnym od przyjętej orientacji przestrzeni /wektor osiowy/.

$$\vec{w} = \text{Mom}_n \vec{\Omega} = \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad \text{rot} \vec{w} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z \Omega_y - y \Omega_z & x \Omega_z - z \Omega_x & y \Omega_x - x \Omega_y \end{vmatrix} = 2\vec{\Omega}$$

$$\vec{w} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Rys. 10. Prędkość kątowa

Jeżeli $\vec{\Omega} = 0$, to ruch płynu jest bezwirowy i potencjalny, dla którego

$$\text{rot} \vec{w} = 0; \quad \vec{w} = \text{grad} \varphi$$

(12)

gdzie φ - potencjał pola prędkości.

Zależność (12) wskazuje, że każde pole bezwirowe jest potencjalnym i każde pole potencjalne jest bezwirowe. Z potencjalności wektora

prędkości liniowej wynika potencjalność wektora przyśpieszenia liniowego

$$\vec{a} = \text{grad} \left(\frac{1}{2} \vec{w}^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (13)$$

gdzie $\vec{a}$ - przyśpieszenie liniowe.

Stosowanie potencjału pola prędkości znacznie upraszcza analizę ruchu płynu, ponieważ zamiast wyznaczenia trzech składowych wektora prędkości $\vec{w}$, poszukuje się jednej funkcji φ i na jej podstawie oblicza się pole prędkości w ruchu bezwirowym.

Miarą intensywności ruchu wirowego jest cyrkulacja Γ . Dla elementu płynu objętego linią L cyrkulację określa zależność

$$\Gamma = \oint_L \vec{w} \cdot d\vec{l} = \oint_L w_{\tau} dl = \int_S \vec{n} \cdot \text{rot} \vec{w} \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot} \vec{w} \cdot d\vec{S} = 2 \int_S \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 2 \int_S \Omega dS \cos \alpha = 2 \int_S \Omega dS n_{\tau} \quad (14)$$

gdzie: Γ - cyrkulacja,

L - kontur zamknięty,

dl - element linii L ,

S - powierzchnia ograniczona linią L ,

dS - element powierzchni S ,

$\vec{\Omega}$ - prędkość kątowa,

w_{τ} - rzut prędkości $\vec{w}$ na kierunek wektora $\vec{l}$,

Ωn_{τ} - rzut wektora $\vec{\Omega}$ na normalną $\vec{n}$ do powierzchni S .

Ze wzoru (14) wynika, że cyrkulacja jest różna od zera w polu prędkości wynikłym wskutek obrotu elementu płynu. Wiąże się ona zatem w sposób istotny z ruchem wirowym.



Rys. 11. Cyrkulacja prędkości nie zamkniętej linii L równa jest różnicy potencjałów na końcach linii L

$$\Gamma = \oint_L \vec{w} \cdot d\vec{l} = \oint_L w_{\tau} dl = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A \quad (15)$$

gdzie φ - potencjał prędkości.

Gdy krzywa L jest zamknięta, to w przypadku jednoznaczności potencjału φ , cyrkulacja prędkości po takiej linii zamkniętej jest równa zero. Natomiast w przypadku niejednoznaczności funkcji φ , cyrkulacja po linii zamkniętej L jest różna od zera.

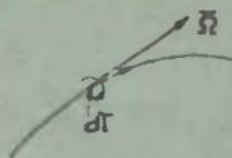
Pole prędkości kątowej powstałe na skutek wirowania pola prędkości

liniowej można opisać elementami geometrycznymi podobnie jak pole prędkości $\vec{w}$. Linia wektorowa w polu $\vec{\Omega}$ pokrywająca się w każdym punkcie pola z kierunkiem wektora $\vec{\Omega}$ nazywana jest linią wirową. Przez każdy punkt pola $\vec{\Omega}$ przechodzi jedna linia wirowa o równaniu

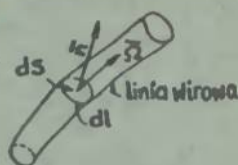
$$\vec{\Omega} \times d\vec{l} = 0 \quad (16)$$

gdzie $d\vec{l}$ - element linii wirowej.

Linie wirowe nie pokrywają się z liniami prądu. Linie wirowe są zam-



Rys. 12. Linia wirowa



Rys. 13. Rurka wirowa

knięte i nie mogą urywać się wewnątrz cieczy. Kończą się one na granicy cieczy. Zbiór linii wirowych przesuniętych przez dowolną linię nie będącą linią wirową nazywamy powierzchnią wirową. Powierzchnia wirowa o kształcie zamkniętym tworzy rurkę wirową. Rurka wirowa o jednorodnym rozkładzie prędkości katowej $\vec{\Omega}$ w przekroju poprzecznym nazywana jest strugą wirową. W przypadku niejednorodnego rozkładu prędkości $\vec{\Omega}$ w przekroju poprzecznym rurki wirowej otrzymamy strumień wiru. W selenoidalnym polu wirowym $\text{div } \vec{\Omega} = 0$. Graniczną postacią strugi wektorów $\vec{\Omega}$, dla której średnica przekroju ortogonalnego maleje, rotacja rośnie, a cyrkulacja pozostaje stałą, jest włókno wirowe.



Rys. 14. Rurki wirowe

Strumień wiru przenikający przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy zero

$$\oint_S \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 2 \oint_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \oint_V \text{div rot } \vec{w} dV = 0 \quad (17)$$

lub jest spełniona zależność

$$\oint_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS + \oint_{S_b} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS + \oint_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \oint_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS + \oint_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (18)$$

Równanie (18) stanowi treść twierdzenia Helmholtza o stałej intensywności wiru wzdłuż rurki wirowej. Z twierdzenia tego wynikają następujące własności rurki wirowej:

tencjału dla środka kuli,

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \varphi \cdot dS \quad (20)$$

- jeżeli potencjał prędkości φ zachowuje stałą wartość na granicach objętości, to pozostaje on stały we wszystkich punktach wewnątrz objętości,
- potencjał prędkości w objętości wielospójnej będzie wieloznaczną funkcją punktu, wartości φ będą różnić się pomiędzy sobą stałymi cyklicznymi,
- jeżeli płyn w całej rozpatrywanej masie porusza się ruchem nie wirowym, a w polu prędkości znajdują się odosobnione, obejmujące ograniczoną masę płynu wiry, to może istnieć potencjał przedstawiający pole prędkości przepływu nie wirowego; będzie on jednak wielowartościową funkcją położenia

$$\oint_L d\varphi = \oint_L \vec{w} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{w} \cdot d\vec{S} \approx \sum_i 2\Omega_i \Delta S_i \quad (21)$$

gdzie: ΔS_i - powierzchnia izolowanego wiru,

S - powierzchnia przebita przez ograniczoną liczbę wirów.

Ruch wirowy w objętości jednospójnej będzie istniał, jeżeli będą istniały w objętości elementy cieczy posiadające stały potencjał różny od zera.

Powstanie ruchu wirowego w objętości jednospójnej, ograniczonej ściankami i powierzchnią swobodną wywołuje zmianę kształtu tej powierzchni. Na powierzchni swobodnej tworzą się fale.

1.2.4. Deformacja płynu

Jeżeli płyn jest ściśliwy, to jego gęstość φ jest funkcją ciśnienia i temperatury. Rozkładając tę funkcję /równanie stanu/ w otoczeniu pewnego punktu równowagowego, określonego średnią wartością ciśnienia i temperatury oraz uwzględniając tylko część liniową rozkładu otrzymamy

$$\varphi(p, T) = \bar{\varphi} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} \right)_p (T - \bar{T}) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)_T (p - \bar{p}) \quad (22)$$

gdzie: $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{p}, \bar{T})$ - równanie stanu punktu równowagowego,

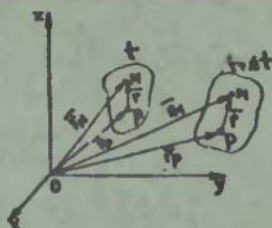
$\bar{\varphi}$ - wielkość średnia,

$\alpha_T = \frac{1}{\bar{\varphi}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} \right)_p$ - izotermiczny współczynnik ściśliwości,

$\beta_T = \frac{1}{\bar{\varphi}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)_T$ - współczynnik rozszerzalności cieplnej.

Współczynniki α_T oraz β_P stanowią ilościową ocenę ściśliwości płynu.

Ruch elementu płynu ściśliwego jest różny od ruchu ciała stałego. Płyn podczas jego przemieszczania się porusza się ruchem postępowym i obrotowym dokoła chwilowej osi obrotu przechodzącej przez środek masy elementu oraz ulega odkształceniu. Na skutek deformacji element płynu zmienia swój kształt oraz zmienia prędkość. Jeżeli element płynu jest "zamrożony" i nie ulega deformacji, tj. zachowuje się jak ciało stałe, to odległość pomiędzy biegunem P i dowolnym punktem materialnym M bryły nie zmienia się z czasem



Rys. 17. Ruch lokalny płynu

$$\vec{r}_M - \vec{r}_P = \vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) \quad (23)$$

gdzie: $\vec{r}_P$ - wektor wodzący biegun P,

$\vec{r}_M$ - wektor wodzący punkt M,

$\vec{r}$ - wektor odległości pomiędzy dwoma punktami (P oraz M).

Podczas ruchu płynu ściśliwego elementarne przesunięcie punktu M względem bieguna P określa się z relacji

$$d\vec{r} = d\vec{r}_M - d\vec{r}_P \quad (24a)$$

$$d\vec{r} = (\vec{w}_M - \vec{w}_P) \cdot dt \quad (24b)$$

$$d\vec{r} = [\vec{w}(\vec{r}_P + \vec{r}) - \vec{w}(\vec{r}_P)] \cdot dt \quad (24c)$$

$$d\vec{r} = \text{grad } \vec{w}(\vec{r}) \cdot \vec{r} \cdot dt \quad (24d)$$

gdzie: $\vec{w}$ - prędkość punktu M,

$\vec{w}_P$ - prędkość punktu P.

Wielkościami jednakowymi dla płynu i ciała stałego są: prędkość liniowa $\vec{w}$ punktu M oraz prędkość kątowa masy płynu w otoczeniu tego punktu $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{w}$.

Symbol $\text{grad } \vec{w}$ w równaniu (24d) oznacza gradient wektorowego pola prędkości $\vec{w}$ względem wektora $\vec{r}$ i jest polem tensorowym.

$$d\vec{r}(t + dt) = \mathbf{T} \cdot \vec{r} \cdot dt = \mathbf{T} \cdot d\vec{r}(t) \quad (24e)$$

Tensor określający to pole stanowi sumę tensora symetrycznego i anty-

symetrycznego

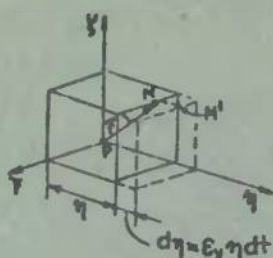
$$d\vec{r} = (\mathbf{T}^s + \mathbf{T}^a) \vec{r} dt \quad (24f)$$

gdzie $\mathbf{T}^s = \frac{1}{2} [\text{grad} \vec{w} + (\text{grad} \vec{w})^T]$ - część symetryczna tensora $\mathbf{T}$; tensor prędkości deformacji określa chwilowe prędkości zmiany długości i kąta deformującego się elementu dV ,
 $\mathbf{T}^a = \frac{1}{2} [\text{grad} \vec{w} - (\text{grad} \vec{w})^T]$ - część antysymetryczna tensora $\mathbf{T}$; tensor ten w mechanice klasycznej określony jest prędkością kątową płynu generowaną wirem prędkości ruchu postępowego.

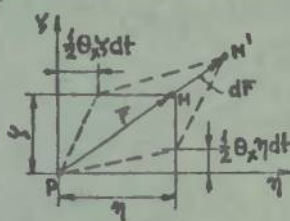
$$\mathbf{T}^s = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\theta_z & \frac{1}{2}\theta_y \\ \frac{1}{2}\theta_z & \epsilon_y & \frac{1}{2}\theta_x \\ \frac{1}{2}\theta_y & \frac{1}{2}\theta_x & \epsilon_z \end{vmatrix} \quad \mathbf{T}^a = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\text{rot}_z \vec{w} & \frac{1}{2}\text{rot}_y \vec{w} \\ \frac{1}{2}\text{rot}_z \vec{w} & 0 & -\frac{1}{2}\text{rot}_x \vec{w} \\ -\frac{1}{2}\text{rot}_y \vec{w} & \frac{1}{2}\text{rot}_x \vec{w} & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial w_x}{\partial x}; \epsilon_y = \frac{\partial w_y}{\partial y}; \epsilon_z = \frac{\partial w_z}{\partial z} \\ \theta_x &= \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}; \theta_y = \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}; \\ \theta_z &= \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \end{aligned}$$

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ - odkształcenie objętościowe,
 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ - odkształcenie postaciowe.

Suma wielkości ϵ_x, ϵ_y oraz ϵ_z wyraża prędkość odkształcenia objętościowego i stanowi niezmiennik tensora deformacji, nie zależy zatem od wyboru układu współrzędnych. Jeżeli $\text{div} \vec{w} = 0$, to nie występują w płynie odkształcenia objętościowe.



Rys. 18. Odkształcenie objętościowe



Rys. 19. Odkształcenie postaciowe

W rozpatrywanym przypadku (rys.18) przyjęto, że $\epsilon_x = 0$ oraz $\epsilon_z = 0$ i przesunięcie dowolnego punktu M względem rozpatrywanego bieguna P odbywa się w kierunku osi η . Element prostopadłościenny pozostaje zatem po odkształceniu prostopadłościannym; zmieni się tylko objętość elementu.

W przypadku odkształcenie postaciowego (rys.19) przyjęto, że wszystkie składowe θ , oprócz θ_x , znikają. Element prostopadłościenny zmieni swój kształt w przekroju płaszczyzny $\xi = \text{const}$.

Wprowadzenie wewnętrznych lub spirowych stopni swobody pozwala uwzględnić wzajemne oddziaływanie ruchu postępowego środków ciężko-

ci elementów płynu i ruchu obrotowego dokoła własnych osi. Oddziaływanie to charakteryzuje się siłami tarcia, które dążą do przekształcenie ruchu elementów płynu w ruch wirowy płynu sprowadzając w ten względną prędkość kątową ruchu obrotowego elementów płynu $\bar{\omega}_w = \bar{\Omega} - \bar{\omega}$ do zera. Przy niejednakowych prędkościach ruchu spinowego $\bar{\omega}$ i ruchu obrotowego płynu $1/2 \text{rot} \bar{w}$ dokoła wspólnej osi na każdy element dV działa od strony otaczającego płynu siła tarcia z momentem proporcjonalnym do $[\bar{\omega} - 1/2 \text{rot} \bar{w}] dV$. Wówczas do układu równań mechaniki płynów /mechaniki klasycznej/ należy dołączyć równanie ruchu obrotowego.

Gradient pola prędkości ruchu postępowego wyrażony tensorem T oraz gradient pola prędkości spinowej wyrażony tensorem ω można przedstawić w postaci relacji

$$T = \frac{1}{3} T^s : \mathcal{E} + \frac{1}{3} T^a : \mathcal{E} \quad (25)$$

$$\omega = \frac{1}{3} \text{tr} \omega : \mathcal{E} + \hat{\omega}^s + \omega^a \quad (26)$$

gdzie: tr - operacja "śląd",

$T^s : \mathcal{E}$ - podwójny skalarowy iloczyn dwóch tensorów ($T^s : \mathcal{E} = \sum_{ij} T^s_{ij} \mathcal{E}_{ij}$),

$\mathcal{E}$ - tensor podstawowy $[\det [\delta_{ij}]] = 1$,

δ - symbol Kroneckera,

T^s - tensor symetryczny a zerowym śladem ($T^s = T - \frac{1}{3} \text{tr} T \mathcal{E}$),

$\hat{\omega}^s$ - tensor symetryczny z zerowym śladem ($\hat{\omega}^s = \omega^s - \frac{1}{3} \text{tr} \omega^s \mathcal{E}$),

T^a - tensor antysymetryczny /skośnosymetryczny/,

ω^a - tensor antysymetryczny.

Śladem tensora symetrycznego jest dywergencja pola prędkości

$$\text{tr} T = \text{tr} T^s = T^s : \mathcal{E} = \text{div} \bar{w} \quad (27)$$

$$\text{tr} \omega = \text{tr} \omega^s = \omega^s : \mathcal{E} = \text{div} \bar{\omega} \quad (27a)$$

Składowe antysymetryczne tensorów T^a oraz ω^a można zamienić pseudowektorami osiowymi

$$\bar{T}^a = \frac{1}{2} T : \mathcal{E} = \frac{1}{2} \text{rot} \bar{w}; T^a = -\mathcal{E} : \bar{T}^a \quad (27b)$$

$$\bar{\omega}^a = \frac{1}{2} \omega : \mathcal{E} = \frac{1}{2} \text{rot} \bar{\omega}; \omega^a = -\mathcal{E} : \bar{\omega}^a \quad (27c)$$

gdzie $\mathcal{E}$ - przestrzenny tensor jednostkowy trzeciego rodzaju. Pole tensorowe $\mathcal{E}$ ma 27 iloczynów tensorowych $\bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k$ / $i, j, k = 1, 2, 3$ / liniowo niezależnych ($\bar{A} = \mathcal{E} : A = e_{ijk} A_{ij} e_k = e_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial v_i} e_i = \text{rot} \bar{A}$).

Jeżeli uwzględniamy ruch spinowy, to wektor osiowy $\bar{T}^a$ jest wyrażony prędkością względną ruchu obrotowego $\bar{\omega}_w$. Jeżeli uwzględnimy tylko

część symetryczną tensora $\mathbf{T}$, to równanie (24f) uprości się do postaci

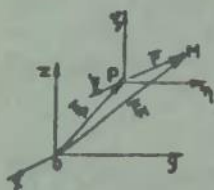
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{T}^s \cdot \mathbf{r} \quad (28)$$

Z równania (24f) wynika, że elementarne przesunięcie $d\mathbf{r}$ można rozpatrywać jako geometryczną sumę dwóch składowych wynikających z:

- wielkości $\mathbf{E}^s = \frac{1}{2}(\epsilon_x \xi^2 + \epsilon_y \eta^2 + \epsilon_z \zeta^2 + \theta_x \xi + \theta_y \eta + \theta_z \zeta)$ jako "czystego" odkształcenia określonego częścią symetryczną tensora $\mathbf{T}$,
- pseudowektora $2\mathbf{\bar{\omega}} = \text{rot } \mathbf{\bar{\omega}}$ jako elementarnego przesunięcia obrotowego określonego składową antysymetryczną $\mathbf{T}^a$ tensora $\mathbf{T}$, które posiadałby punkt M , gdyby element objętości ΔV obracał się jako ciało sztywne.

Ostatecznie prędkość względną elementu płynu można rozpatrywać jako geometryczną sumę trzech prędkości /wzór Cauchyego-Helmholtza/

$$\mathbf{\bar{w}} = \mathbf{\bar{w}}_p + \mathbf{\bar{w}}_1 + \mathbf{\bar{w}}_2 \quad (29)$$



Rys. 20. Ruch postępowy

gdzie: $\mathbf{\bar{w}}_p$ - prędkość ruchu postępowego określona biegunem P ,

$\mathbf{\bar{w}}_1$ - prędkość ruchu obrotowego punktu M dokoła chwilowej osi obrotu przechodzącej przez biegun P / $\mathbf{\bar{w}}_1 = \mathbf{\bar{\omega}} \times \mathbf{r}$ /,

$\mathbf{\bar{w}}_2$ - prędkość odkształcenia /wektor potencjalny/ / $\mathbf{\bar{w}}_2 = \text{grad } \mathbf{E}^s$ /.

Wzór (29) stanowi treść I twierdzenia Helmholtza.

Z zależności (24f) wynika I twierdzenie Cauchyego: składowa przestrzenna pola wektorowego wirowości w dowolnym kierunku równa jest sumie prędkości ruchu prawostronnego względem ruchu elementów w dowolnych dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach.

1.2.5. Zasada zachowania masy. Równanie ciągłości

Dla przyjętego modelu ośrodka ciągłego o własnościach zależnych w sposób ciągły od współrzędnych przestrzeni i czasu ruch płynu określony jest względem pewnego układu odniesienia za pomocą pola gęstości

plynu $\varrho = \varrho(\vec{r}, t)$ oraz pola prędkości ruchu plynu $\vec{w} = \vec{w}(\vec{r}, t)$.

Masę plynu zawartego w objętości V określa zależność

$$m = \int_V \varrho(\vec{r}, t) dV \quad (30)$$

Zasada zachowania masy oznacza, że

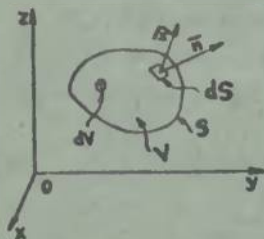
$$\frac{d}{dt} m(t) = \frac{d}{dt} \int_V \varrho(\vec{r}, t) dV = 0 \quad (31)$$

Przez powierzchnię kontrolną S ograniczającą objętość V przepływa masa plynu

$$\pm dm = \pm \int_S \varrho \cdot \vec{w} \cdot \vec{n} ds dt \quad (32)$$

gdzie: $\vec{n}$ - jednostkowy wektor /wersor/ normalnej zewnętrznej do powierzchni S ,

$m, -m$ - masa plynu odpowiednio wypływającego z obszaru objętego powierzchnią S / zwrot zgodny ze zwrotem normalnej zewnętrznej / oraz plynu wpływającego do tego obszaru.



Rys. 21. Obszar V ograniczony powierzchnią kontrolną S

W zależności od ilości masy wpływającej i wypływającej przez powierzchnię S w obszarze V wystąpi przyrost lub ubytek masy, w wyniku czego w objętości V wystąpi zmienna gęstość, którą określa relacja

$$\pm dm = \int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV \cdot dt \quad (33)$$

Zgodnie z prawem niezniszczalności materii w żadnym punkcie obszaru plynu masa nie może ani powstać, ani zniknąć. Źródła lub upusty istniejące w rozpatrywanym obszarze stanowią punkty osobliwe, odosobnione pola i one określają zachowanie się plynu w objętości V .

Jeżeli obszar plynu ograniczony powierzchnią S jest bezźródłowy, ruch jest nieustalony, a plyn jest ściśliwy, to ze wzorów (32) i (33) otrzymamy bilans masy

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho dV = \int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV + \int_S \varrho \cdot \vec{w} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (34)$$

gdzie V - objętość plynu ograniczona powierzchnią S / w ogólności przy-

padku wielkości V oraz S są funkcjami czasu/.

Przy $\varphi = 1$ równanie (34) wyraża przyrost objętości $V(\bar{r}_2, t + \Delta t) - V(\bar{r}_2, t)$ na skutek jej deformacji. Jeżeli funkcję $V(\bar{r}, \Delta t)$ rozłożymy w szereg Taylora i uwzględnimy tylko część liniową rozkładu, to zmiana przyrostu objętości przez odcinek czasu Δt wyrażona jest dywergencją pola prędkości płynu.

Wobec zależności (31) równanie (34) przyjmie postać

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV + \int_S \rho (\bar{w} \cdot \bar{n}) \cdot dS = 0 \quad (34a)$$

i przedstawia zapis matematyczny zasady zachowania masy.

Równanie (34) dla dowolnej powierzchni ma postać

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \cdot dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV + \int_S \rho (\bar{w}_s \cdot \bar{n}) \cdot dS \quad (35)$$

gdzie: V - objętość płynu ograniczona powierzchnią S ,

$\bar{w}_s$ - prędkość przemieszczania się powierzchni S .

Wynosząc z równania (34a) całkę z pochodnej lokalnej

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV = - \int_S \rho (\bar{w} \cdot \bar{n}) \cdot dS$$

gdzie $\bar{w}$ - prędkość płynu

oraz wprowadzając otrzymane wyrażenie do wzoru (35) otrzymamy równanie całkowe bilansu masy dla dowolnej powierzchni S

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \cdot dV = - \int_S \rho (\bar{w} - \bar{w}_s) \cdot \bar{n} \cdot dS \quad (36)$$

Jeżeli wymiana masy z objętością V ograniczoną zamkniętą powierzchnią S zachodzi jedynie przez powierzchnię S' , to równanie (36) przyjmie postać

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \cdot dV = - \int_{S'} \rho (\bar{w} - \bar{w}_s) \cdot \bar{n} \cdot dS \quad (37)$$

Równanie (37) nosi nazwę uogólnionego równania przeniesienia masy.

Jeżeli powierzchnia S ograniczająca objętość V porusza się z prędkością płynu $\bar{w}_s = \bar{w}$, a wymiana masy odbywa się przez powierzchnię S , to, po dokonaniu elementarnych przekształceń we wzorze (34), otrzymamy równanie ciągłości w postaci całkowej

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \bar{w}) \right] dV = 0 \quad (38)$$

Wobec dowolności wyboru objętości V równanie (38) jest spełnione

Jeżeli

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \vec{w}) = 0 \quad (39)$$

lub

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (40)$$

Równanie (39) jest różniczkową postacią równania ciągłości i stanowi matematyczny zapis zasady zachowania masy. Spełnione jest ono w każdym punkcie objętości V pod warunkiem, że objętość ta nie ma powierzchni nieciągłości i nie występują w niej źródła masy.

Jeżeli w cieczy zachodzi homogeniczna reakcja chemiczna i tworzy się substancja A, to równanie (40) jest równaniem bilansu masy składnika A i ma postać

$$\frac{\partial \varphi_A}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi_A \vec{w}_A) = j_A \quad (41)$$

gdzie j_A - strumień masy substancji A tworzącej się w wyniku zajęcia reakcji chemicznej.

Równania (39) oraz (40) słuszne są dla płynów nielepkich i lepkich.

Dla ruchu ustalonego ($\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$) i płynu nieściśliwego ($\varphi = \text{const}$) równanie (39) uproszczy się do postaci

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad \text{dla nieściśliwego} \quad (42)$$

Równanie (42) oznacza niezmienną objętość płynu, a więc nieściśliwość płynu. Wobec tego, że $\varphi = \frac{1}{V}$, przejście graniczne $V \rightarrow 0$ daje

$$\operatorname{div} \vec{w} = \lim_{V \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \right] \quad (43)$$

Dla ruchu ustalonego i płynu nieściśliwego

$$\oint \vec{w} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (44)$$

Ze wzoru tego wynika, że strumień prędkości przez dowolną nieruchomą powierzchnię zamkniętą jest równy zero, tj. strumień objętościowy płynu wpływającego do obszaru V jest równy strumieniowi objętościowemu płynu wypływającego z tego obszaru.

Równanie (44) dla rurki prądu przyjmie postać

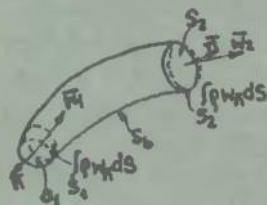
$$\oint_{S_1+S_2+S_b} \vec{w} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{w}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{w}_2 \cdot d\vec{S} = 0 \quad (45)$$

stad

$$-\int_{S_1} w_{n_1} \cdot dS = \int_{S_2} w_{n_2} \cdot dS = \dot{V} \quad (46).$$

gdzie $\dot{V}$ - strumień objętościowy.Po rozbiciu przestrzeni zajmowanej przez płyn na rurki jednostkowe o objętości $V=1$ /model rurekowy

płynu/ zależność (46) oznacza, że liczba jednostkowych rurek prądu wchodzących do powierzchni jest równa liczbie jednostkowych rurek prądu wychodzących z powierzchni. Wewnątrz dowolnej zamkniętej powierzchni linie prądu cieczy nie-ściśliwej nie mogą ani zaczynać się, ani kończyć.



Rys. 22. Równanie ciągłości dla rurki prądu

Wzór (46) pozwala obliczyć

średnią prędkość przepływu płynu

$$w_{sr} = \frac{1}{S} \cdot \int_S w_n \cdot dS = \frac{\dot{V}}{S} \quad (47)$$

Jeżeli do wzoru (45) wprowadzimy gęstość, to otrzymamy

$$-\int_{S_1} \rho \cdot w_{n_1} \cdot dS = \int_{S_2} \rho \cdot w_{n_2} \cdot dS = \dot{G} = \rho \cdot w_{sr} \cdot S \quad (48)$$

gdzie $\dot{G}$ - strumień masowy płynu.

Zależność (48) oznacza, że w przypadku ruchu ustalonego strumień masowy cieczy przepływającej przez dowolny przekrój poprzeczny rurki prądu jest stały.

1.2.6. Siły działające na płyn

W obszarze przestrzeni wypełnionej materialnym kontinuum działają:

- siły powierzchniowe, $\vec{p}$,
- siły masowe, $\vec{F}$,
- momenty wewnętrznych sił masowych, $\vec{M}^i$,
- wektor naprężeń sił powierzchniowych, $\vec{T}_n$,
- wektor momentu par sił powierzchniowych, $\vec{\mu}_n$.

Siły powierzchniowe przyłożone są do powierzchni płynnej i wywołane są przez płyn znajdujący się na zewnątrz obszaru płynnego ograniczonego tą powierzchnią. Siły masowe działają bezpośrednio na płyn

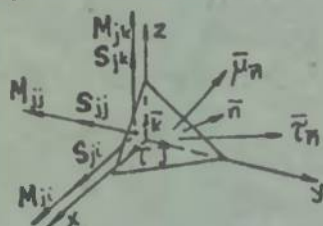
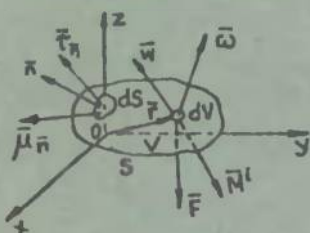
zawarty w rozpatrywanym obszarze płynnym i nie są związane z powierzchnią ograniczającą ten obszar.

Jednostkową siłę powierzchniową /gęstość sił powierzchniowych/ określa lemat Cauchyego

$$\vec{T}_{\vec{n}} = \vec{T}_{\vec{n}} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}^P}{\Delta S} \quad (49)$$

gdzie: $\vec{T}_{\vec{n}}$ - wektor naprężenia wynikający od cząstek leżących na zewnętrznej powierzchni S ,

$-\vec{T}_{-\vec{n}}$ - wektor naprężenia wynikający od cząstek leżących wewnętrznej powierzchni S ,



Rys. 23. Siły działające na element płynu

S - powierzchnia płynna,
 $\vec{F}^P$ - siła powierzchniowa,
 d - średnica elementu płynu zawierającego punkt materialny,
 $\vec{n}$ - normalna zewnętrzna do powierzchni S ,
 $-\vec{n}$ - normalna wewnętrzna do powierzchni S .

Rzut wektora $\vec{T}_{\vec{n}}$ na normalną zewnętrzną nazywany jest naprężeniem normalnym σ , natomiast rzut $\vec{T}_{\vec{n}}$ na powierzchnię S nazywany jest siłą tarcia $\vec{\tau}$ /naprężeniem stycznym/. Wektor $\vec{T}_{\vec{n}}$ zależy od kierunku normalnej $\vec{n}$ do powierzchni S , współrzędnych powierzchni i czasu. Innymi słowy, w każdej chwili t i w każdym punkcie $M(\vec{r})$ obszaru wypełnionego poruszającym się płynem istnieją nieskończenie wiele wektorów $\vec{T}_{\vec{n}}$ różniących się modułem i kierunkiem. Można więc zapisać

$$\vec{T}_{\vec{n}} = (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma) \cdot (\vec{i} \vec{T}_x + \vec{j} \vec{T}_y + \vec{k} \vec{T}_z) \quad (50)$$

gdzie: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - kosinusy kątów pomiędzy zewnętrzną normalną do powierzchni S a osiami współrzędnych,

$\vec{T}_x, \vec{T}_y, \vec{T}_z$ - wektory naprężeń działających wzdłuż normalnych do powierzchni współrzędnych.

Dla płynu doskonałego naprężenia styczne /siła tarcia/ nie istnieją i naprężenia normalne nie zależą od orientacji powierzchni działania

$$-\vec{T}_{-\vec{n}} = -\vec{T}_{xx} = -\vec{T}_{yy} = -\vec{T}_{zz} \quad (51)$$

Jeżeli spełniona jest zależność

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (51a)$$

to płyn nazywamy izotropowym.

Jednostkową siłę masową określa relacja

$$\bar{F} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\varrho \Delta V} \quad (52)$$

gdzie: $\bar{F}$ - siła masowa odniesiona do jednostki masy /jednostkowa siła masowa/,

ΔF - siła masowa,

$\varrho \Delta V$ - masa płynu zawarta w objętości ΔV ,

d - średnica elementu płynu zawierającego punkt materialny.

Wektor $\bar{F}$ jest polem sił masowych zewnętrznych i wewnętrznych

$$\bar{F} = \bar{F}^e + \bar{F}^i \quad (53)$$

W przeważającej liczbie przypadków nie uwzględnia się wpływu wewnętrznych sił masowych i wielkość $\bar{F}$ określa tylko pole sił zewnętrznych przypadających na jednostkę masy.

Układ sił powierzchniowych i masowych można w objętości ΔV zredukować do wektora głównego sił masowych i powierzchniowych oraz momentu głównego sił masowych i powierzchniowych

$$F_{mas.} = \int_V \bar{F} \cdot \varrho \cdot dV \quad (54a)$$

$$\bar{M}_{mas.} = \int_V (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \varrho \cdot dV \quad (54b)$$

$$\bar{F}_{pow.} = \int_S \bar{\tau}_n(\bar{r}, t) dS \quad (54c)$$

$$\bar{M}_{pow.} = \int_S (\bar{r} \times \bar{\tau}_n) dS \quad (54d)$$

gdzie: $\bar{F}$ - promień wodzący element płynu dV /punkt materialny/,

$\bar{F}, \bar{M}$ - wektor główny i moment główny sił.

Powierzchnia dS elementu płynu dV myślowo wyciętego z objętości V jest nieskończenie małą płaską powierzchnią całkowicie określoną normalną zewnętrzną $\bar{n}$. Siła przyćpiona do elementu powierzchni jest nieskończenie małym wektorem. Siła ta odniesiona do jednostki powierzchni daje naprężenie $\bar{\tau}$. Zbiór wektorów $\bar{\tau}_n$ otrzymany przy dowolnej orientacji powierzchni S nie tworzy pola wektorowego.

Więć pomiędzy siłą a dowolnym wektorem opisującym przekrój ok-

reśla operator liniowy $\hat{S}$, który nazwano tensorem naprężeń sprężystych.

$$\bar{\tau}_{\bar{n}} = \bar{n} S(\bar{r}, t) \quad (55)$$

gdzie S - tensor naprężeń sprężystych /wewnętrznych/.

Podobnie jak tensor T (25), tensor naprężeń sprężystych S można przedstawić jako sumę jego części składowych: symetrycznej oraz antysymetrycznej, tj. dokonać operacji symetryzacji i alternacji / antysymetryzacji/

$$S = S^s + S^a = -p \mathbf{E} + \frac{1}{3} \text{tr} S_{\mu} \mathbf{E} + \hat{S}_{\mu}^s + S_{\mu}^a \quad (56)$$

gdzie: $S_{ij}^s = \frac{1}{2}(S_{ij} + S_{ji})$, $S^s = [S^s]^T$ - część symetryczna tensora S ,
 $S_{ij}^a = \frac{1}{2}(S_{ij} - S_{ji})$, $S^a = -[S^a]^T$ - część antysymetryczna tensora S ,
 $p \mathbf{E}$ - tensor ciśnienia mechanicznego,
 $\hat{S}_{\mu}^s$ - symetryczna część tensora S z zerowym śladem.

Podobnie zależność pomiędzy wektorem $\bar{\mu}_{\bar{n}}$ a diadą /tensorem/ M naprężeń momentowych można przedstawić relacją

$$\bar{\mu}_{\bar{n}} = \bar{n} M(\bar{r}, t) \quad (57)$$

gdzie M - tensor naprężeń momentowych wewnętrznych /tensor wewnętrzne momentu obrotowego, tensor biegunowy III rzędu/.

Tensor M można przedstawić w postaci sumy składowych

$$M = \frac{1}{3} \text{tr} M \cdot \mathbf{E} + \hat{M}^s + M^a \quad (57a)$$

gdzie: M^s - część symetryczna tensora naprężeń momentowych,
 M^a - część antysymetryczna tensora naprężeń momentowych.

Teoria symetrycznego tensora naprężeń jest idealizowanym modelem kontinuum, w którym cząstki ośrodka są rozmieszczone po jednej stronie powierzchni S . Modelem pełniejszym jest model z wewnętrznymi spinowymi stopniami swobody. Elementy /cząstki/ płynu obracają się dookoła własnych osi, a osi środków ciężkości znajdują się w ruchu postępowym. Oddziaływania pomiędzy elementami charakteryzują się występowaniem sił tarcia dążących do przekształcenia spinu cząstki w ruch wirowy cieczy. Przekazywanie obciążeń wynikłych z wektora $\hat{\tau}_{\bar{n}} dS$ oraz wektora $\bar{\mu}_{\bar{n}} dS$ przez element powierzchni dS wywołuje antysymetryczność tensorów S oraz M .

Zamiast tensora naprężeń sprężystych (56) używa się tensora ciśnienia

$$-S = P = P_m + P_{\mu} = p \mathbf{E} + \frac{1}{3} \text{tr} P_{\mu} \mathbf{E} + \hat{P}_{\mu}^s + P_{\mu}^a \quad (58)$$

gdzie: P_m - tensor ciśnienia hydrostatycznego,

P - tensor ciśnienia wynikający z działania lepkości,
 p - ciśnienie hydrostatyczne,
 P_{μ}^{μ} - symetryczna część tensora P z zerowym śladem,
 P_{μ}^{μ} - antysymetryczna część tensora P .

Jeżeli składowe tensora P przedstawimy w postaci ralsoji

$$(P_{\mu}^{\mu})_{ij} = \frac{1}{2}(P_{\mu ij} + P_{ji\mu}); P_{\mu ij} = \frac{1}{2}(P_{\mu ij} - P_{ji\mu}); \dot{P}_{\mu ij} = \frac{1}{2}(P_{\mu ij} + P_{ji\mu}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}P_{kk}$$

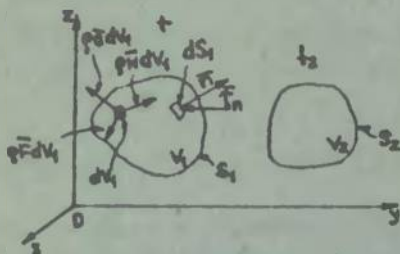
to wzór (58) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{vmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{3}(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{1}{3}(2P_{xx} - P_{yy} - P_{zz}) & \frac{1}{3}(P_{xy} - P_{yx}) & \frac{1}{3}(P_{xz} - P_{zx}) \\ \frac{1}{3}(P_{xy} - P_{yx}) & \frac{1}{3}(2P_{yy} - P_{xx} - P_{zz}) & \frac{1}{3}(P_{yz} - P_{zy}) \\ \frac{1}{3}(P_{xz} - P_{zx}) & \frac{1}{3}(P_{yz} - P_{zy}) & \frac{1}{3}(2P_{zz} - P_{xx} - P_{yy}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(P_{yx} - P_{xy}) & \frac{1}{2}(P_{zx} - P_{xz}) \\ \frac{1}{2}(P_{yx} - P_{xy}) & 0 & \frac{1}{2}(P_{zy} - P_{yz}) \\ \frac{1}{2}(P_{zx} - P_{xz}) & \frac{1}{2}(P_{zy} - P_{yz}) & 0 \end{vmatrix} \quad (59)$$

1.2.7. Równanie ruchu

Zgodnie z zasadą D'Alemberta w każdej chwili ruchu dowolnego układu materialnego wszystkie siły działające na układ, włącznie z siłami bezwładności, wzajemnie są zrównoważone. Zasadę tę można stosować



Rys. 24. Siły działające na element płynu

do elementu płynu $\Delta V \rightarrow 0$ znajdującego się w ruchu przez moment $t \rightarrow 0$. Umieszczając element płynu o objętości dV ograniczonej powierzchnią dS w obszarze płynnym V , ograniczoną powierzchnią S oraz stosując zasadę D'Alemberta otrzymamy równanie całkowe zwane równaniem całkowym postępowego ruchu płynu

$$\int_V (\bar{F} - \bar{a}) \cdot \bar{q} \cdot dV + \int_S \bar{T}_n \cdot dS = 0 \quad (60)$$

gdzie: $\bar{F}$ - siła masowa odniesiona do jednostki masy /siła objętościowa/,

$\bar{a}$ - przyspieszenie elementu płynu,

$\bar{T}_n$ - wektor naprężeń powierzchniowych elementu płynu o powierzchni dS /gęstość sił powierzchniowych/.

Równanie (60) można otrzymać z zasady zachowania pędu. Zgodnie z twierdzeniem "S" zmienna pędu równa jest sumie impulsów wszystkich sił wywołujących tę zmianę

$$d \int_V (\bar{q} \cdot \bar{w}) \cdot dV = \int_0^t (\bar{F}^e + \bar{F}^i) dt \quad (61)$$

gdzie: $\vec{F}^e$ - wypadkowa sił zewnętrznych,
 $\vec{F}^i$ - wypadkowa sił wewnętrznych, która dla układu jednokontinualnego na zasadzie akcji-reakcji jest równa zero.

Wypadkową sił zewnętrznych określa zależność

$$\vec{F}^e = \int_V \rho \cdot \vec{F} \cdot dV + \int_S \vec{T}_n \cdot dS \quad (62)$$

Wprowadzając określenie siły $\vec{F}^e$ do wzoru (61) otrzymamy równanie opisujące zasadę zachowania pędu obszaru płynnego / powierzchni S porusza się z prędkością płynu/

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot \vec{w} \cdot dV = \int_V \rho \frac{d\vec{w}}{dt} \cdot dV = \int_S \vec{T}_n \cdot dS + \int_V \rho \cdot \vec{F} \cdot dV \quad (63)$$

Jeżeli uwzględnimy we wzorze (60) lub (63) relację (55) oraz zastąpimy całkę powierzchniową całką objętościową i scałkujemy na całą objętość płynu, to otrzymamy równanie ruchu elementu płynu w postaci najogólniejszej / $\rho = \text{const}$ /

$$\rho \cdot \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\partial \rho \vec{w}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{w} \vec{w}) = \rho \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \rho (\vec{w} \cdot \text{grad}) \vec{w} = \rho \vec{F} + \text{Div} \mathbf{S} \quad (64)$$

gdzie: $\vec{w}\vec{w}$ - diada /specjalny rodzaj tensora/ $\vec{w}\vec{w} = 0,5/\vec{w}\vec{w} + \vec{w}\vec{w}/ + 0,5/\vec{w}\vec{w} - \vec{w}\vec{w}/$

$\text{Div} \mathbf{S} = \frac{\partial \vec{T}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{T}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{T}_z}{\partial z}$ dywergencja tensorowa.

Równanie (64) jest postacią analityczną pierwszego prawa Cauchyego, nazywane jest również bilansem impulsów lub równaniem ruchu dla naprężeń.

Wprowadzając do równania (64) tensor ciśnienia (58) otrzymamy nową postać równania ruchu

$$\frac{\partial \rho \vec{w}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{P} + \rho \vec{w} \vec{w}) = \rho \vec{F} \quad (65)$$

Równanie (65) jest jedną z postaci równania przenoszenia substancji, w którym przenoszoną substancją jest pęd, dyfuzyjnym strumieniem substancji jest tensor ciśnienia, a objętościowym źródłem ruchu substancji są zewnętrzne siły masowe.

Równanie zachowania pędu (60) dla dowolnej powierzchni ma postać

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot \vec{w} \cdot dV = \int_V \rho \frac{d\vec{w}}{dt} \cdot dV + \int_S \rho \cdot \vec{w} \cdot (\vec{w}_n \cdot \vec{n}) \cdot dS \quad (66)$$

Wyznaczając z równania (64) pochodną lokalną i całkując otrzymamy wyrażenie po objętości V

$$\int_V \rho \frac{d\vec{w}}{dt} \cdot dV = - \int_S \rho \vec{w} \cdot (\vec{w} \cdot \vec{n}) \cdot dS + \int_S \vec{n} \cdot \mathbf{S} \cdot dS + \int_V \rho \cdot \vec{F} \cdot dV \quad (67)$$

gdzie: $\int_S$ - całka powierzchniowa,
 ds - element powierzchni,
 S - tensor naprężeń sprężystych

oraz wprowadzając otrzymane wyrażenie do równania (66) otrzymamy wzór całkowy

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \cdot \bar{w} \cdot dv = \int_S \rho \cdot \bar{w} \cdot (\bar{w} - \bar{w}_s) \bar{n} \cdot ds + \int_S S \cdot \bar{n} \cdot ds + \int_V \rho \cdot \bar{F} \cdot dv \quad (68)$$

Przedostatni składnik prawej strony równania (68) jest siłą powierzchniową, z jaką płyn zawarty w objętości V działa na powierzchnię S ograniczającą tę objętość.

Jeżeli wymiana pędu z objętością V ograniczoną zamkniętą powierzchnią S zachodzi przez powierzchnię S' , to całki powierzchniowe w równaniu (67) należy wyznaczyć dla powierzchni S' . Siła wynikająca od tensora S jest siłą sumaryczną. Działa ona na objętość V pomimo występowania ciśnienia atmosferycznego p_0 . Jeżeli chcemy uwzględnić ponadto we wzorze (67) oddziaływanie otoczenia na pęd obszaru V , to tensor S należy zwiększyć o ciśnienie atmosferyczne p_0 przedstawiając go w postaci sumy $S + p_0 \cdot \bar{E}$. Uwzględniając powyższą sumę we wzorze (67) otrzymamy

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \cdot \bar{w} \cdot dv = - \int_S \rho \cdot \bar{w} \cdot (\bar{w} - \bar{w}_s) \bar{n} \cdot ds + \int_{S'} (S + p_0 \cdot \bar{E}) \cdot \bar{n} \cdot ds + \int_{S-S'} (S + p_0 \cdot \bar{E}) \cdot \bar{n} \cdot ds + \int_V \rho \cdot \bar{F} \cdot dv \quad (69)$$

gdzie: $\bar{w}$ - prędkość płynu,

V - obszar ograniczony powierzchnią S ,

p_0 - ciśnienia atmosferycznego obszaru zewnętrznego otaczającego objętość płynu V .

Równanie to nosi nazwę uogólnionego równania przenoszenia pędu. Przedostatni wyraz prawej strony równania (69) określa siłę, z jaką płyn w objętości V działa na nieprzenikalną powierzchnię $S-S'$ ograniczającą objętość V , pomimo że na zewnątrz obszaru V działa ciśnienie p_0 . Jeżeli siły masowe są potencjalne, to po połączeniu ostatnich dwu wyrazów w równaniu (69) otrzymamy wyrażenie określające sumaryczną siłę wynikającą od tensora S , ciśnienia atmosferycznego p_0 oraz od ciśnienia hydrostatycznego p .

Innym parametrem dynamiki płynów jest kręt /moment pędu/, który jest sumą krętu zewnętrznego /mechanicznego/ $\bar{K}^0$ oraz wewnętrznego /spinowego/ $\bar{K}^i$. Kręt własny $\bar{K}^i$ występuje np. w układach wielokontinualnych lub w obecności pola magnetycznego. W przypadku klasycznym dla ośrodków jednokontinualnych, wobec chaotycznego ruchu cząstek $\bar{K}^i = 0$. Znikają również momenty rozłożonych sił masowych i powierzchniowych.

Równanie bilansu momentu pędu formuluje się w oparciu o twier-

dzenie o zachowaniu momentu pędu /zmiana krętu równa jest sumie momentów wszystkich sił wywołujących tę zmianę/.

Równanie momentu pędu całkowitego można zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{K} dV + \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{K} dV = \int_V \rho (\vec{r} \times \vec{F}) dV + \int_V \rho \vec{M} dV + \int_S \rho (\vec{r} \times \vec{T}_n) dS + \int_S \vec{\mu} \vec{n} dS \quad (70)$$

gdzie: $\vec{K}^i$ - kręt własny cząstek cieczy,

$\vec{F}$ - zewnętrzna siła masowa,

$\vec{r} \times \vec{F}$ - moment zewnętrznych sił masowych,

$\vec{M}^i$ - moment wewnętrznych sił masowych,

$\vec{\mu} \vec{n}$ - moment pary wewnętrznych sił powierzchniowych,

V - objętość płyna,

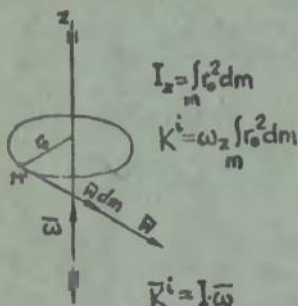
S - powierzchnia płyna,

$\vec{\omega}$ - prędkość kątowa cząstki cieczy

$\vec{r} \times \vec{T}_n$ - moment sił powierzchniowych,

I - moment bezwładności cząstki cieczy względem osi obrotu,

$\rho \vec{r} \times \vec{\omega}$ - kręt zewnętrzny / zewnętrzny moment pędu /.



Rys. 25. Kręt ciała obracającego się dokoła osi

Stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego do równania (70) otrzymamy najogólniejszą postać równania bilansu momentu pędu

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (\vec{r} \times \vec{\omega}) + \frac{d}{dt} \int_V \rho I \vec{\omega} = \int_V \rho (\vec{r} \times \vec{F}) + \int_V \rho \vec{M}^i + \int_V \rho \vec{r} \times \text{Div} \vec{S} + \text{Div} \vec{M} \quad (71)$$

Jeżeli kręt spinowy $\vec{K}^i = 0$, moment masowych sił wewnętrznych $\vec{M}^i = 0$ oraz moment pary sił powierzchniowych $\vec{T}_n = 0$, to otrzymamy równanie różniczkowe bilansu krętu zewnętrznego dla obszaru płynnego

$$\frac{d}{dt} \rho \vec{K}^e = \rho (\vec{r} \times \vec{F}) + \vec{r} \times \text{Div} \vec{S} \quad (72)$$

gdzie: $\vec{K}^e = \vec{r} \times \vec{\omega}$ - kręt zewnętrzny odniesiony do jednostki masy.

Jeżeli pominiemy wpływ zewnętrznych sił masowych $\vec{F} = 0$, to źródłem krętu $\vec{K}^e$ jest część antysymetryczna tensora naprężeń sprężystych

Równanie bilansu krętu (70) dla wyodrębnionej objętości V ośrodka ciągłego nie wynika z równań bilansu krętu zbioru punktów materialnych, lecz jest odrębnym równaniem wektorowym mechaniki płynów.

1.2.8. Równanie ruchu cieczy doskonałej

Jeżeli ciecz ściśliwa jest cieczą doskonałą, to $P_{\mu} = 0$ i tensor ciśnienia $\mathbf{P}$ (58) redukuje się do postaci

$$\mathbf{P} = p \cdot \mathbf{E} \quad (73)$$

Zastępując we wzorze (60) wektor naprężenia $\bar{\mathbf{T}}_n$ ciśnieniem p otrzymamy całkową postać równania ruchu dla cieczy doskonałej

$$\int_V (\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{a}}) \cdot \rho \, dV - \int_S \bar{\mathbf{n}} p \cdot \mathbf{E} \, dS = 0 \quad (74)$$

Stosując do całki powierzchniowej przekształcenie Gaussa oraz biorąc pod uwagę dowolność obszaru całkowania /obszar płyny/ otrzymamy hydrodynamiczne równanie ruchu cieczy doskonałej w postaci różniczkowej

$$\frac{\partial \rho \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} = -\text{Div}(\rho \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} + p \mathbf{E}) + \rho \bar{\mathbf{F}} \quad (75)$$

Pierwszy człon prawej strony równania opisuje konwekcyjne przenoszenie pędu, natomiast drugi człon - źródło pędu.

Wykonując operację Div równanie przekształci się do postaci

$$\frac{d\bar{\mathbf{w}}}{dt} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (76)$$

zwanej równaniem ruchu cieczy doskonałej w postaci Eulera.

Dla cieczy ściśliwej wielkość p jest ciśnieniem hydrodynamicznym, natomiast dla cieczy nieściśliwej p oznacza ciśnienie statyczne.

Rozpisując pochodną substancjalną zgodnie ze wzorem (9) oraz stosując następujące przekształcenie

$$\frac{1}{2} \text{grad } \bar{\mathbf{w}}^2 = (\bar{\mathbf{w}} \cdot \text{grad}) \bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{w}} \times \text{rot } \bar{\mathbf{w}} \quad (77)$$

do wzoru (76) otrzymamy nową postać równania ruchu cieczy doskonałej ściśliwej /postać Lamba/

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{w}}^2 \right) - \bar{\mathbf{w}} \times \text{rot } \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (78)$$

Inną postacią równania ruchu cieczy doskonałej jest równanie Friedmana. Wykonując operację rot na równaniu (78) oraz wprowadzając zamiast $\frac{1}{2} \text{rot } \bar{\mathbf{w}} = \bar{\Omega}$ otrzymamy

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} - \text{rot}(\bar{\mathbf{w}} \times \bar{\Omega}) = \text{rot } \bar{\mathbf{F}} - \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } p \right) \quad (79)$$

Stosując do równania (78) wzory analizy wektorowej

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p) &= \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \times \operatorname{grad} p = -\frac{1}{\rho^2} (\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p); \\ \operatorname{rot}(\bar{w} \times \bar{\Omega}) &= (\bar{\Omega} \operatorname{grad} \bar{w} - (\bar{w} \operatorname{grad}) \bar{\Omega} + \bar{w} \operatorname{div} \bar{\Omega} - \bar{\Omega} \operatorname{div} \bar{w}); \operatorname{div} \bar{\Omega} = 0, \end{aligned}$$

otrzymamy równanie ruchu w postaci Friedmana

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} - (\bar{\Omega} \operatorname{grad}) \bar{w} + \bar{\Omega} \operatorname{div} \bar{w} = \operatorname{rot} \bar{F} + \frac{1}{\rho^2} (\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p) \quad (80)$$

Przy następujących założeniach

$$\begin{aligned} \bar{F} &= -\operatorname{grad} \varphi'; \operatorname{rot} \bar{F} = 0 && \text{- siły masowe są siłami zachowawczymi,} \\ \dot{\varphi} &= \varphi(p); \operatorname{grad} \rho = \dot{\varphi}(p) \operatorname{grad} p; \operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p = 0 && \text{- ciecz barotropna,} \end{aligned}$$

równanie (80) uprości się do postaci

$$\operatorname{helm} \bar{\Omega} = 0 \quad (81)$$

gdzie $\operatorname{helm} \bar{\Omega} = \frac{d\bar{\Omega}}{dt} - (\bar{\Omega} \operatorname{grad}) \bar{w} + \bar{\Omega} \operatorname{div} \bar{w}$ - helmholtzjan.

Równanie (81) nosi nazwę równania Helmholtza i stanowi treść twierdzenia o trwałości linii wirowych i trwałości wirowości w rurce wirowej. Wiry w doskonałej niesściśliwej cieczy nie mogą powstać ani nie mogą być zniszczone.

Twierdzenie Helmholtza nie jest spełnione, jeżeli siły masowe nie są potencjalne, gęstość cieczy jest funkcją ciśnienia i temperatury, a ciecz jest lepka.

1.2.9. Równania ruchu cieczy rzeczywistej

W cieczy rzeczywistej lepkość jest głównym czynnikiem powstawania sił stycznych. Siły te wywołują w cieczach zjawisko kohezji i są siłami przeciwstawiającymi się ruchowi płynu. Siła styczna odniesiona do jednostki powierzchni jest naprężeniem stycznym

$$\tau = c \cdot \dot{\gamma} \quad (82)$$

gdzie: τ - naprężenie styczne,

$\dot{\gamma}$ - prędkość odkształcania,

$c = \mu$ /dla wody/, $c = 0,499 \cdot w_{\text{gr}} \cdot l \cdot \rho$ /dla gazu/,

w_{gr} - średnia prędkość cząstki płynu,

l - średnia droga swobodna cząstki płynu.

Zgodnie z teorią Reimera i Rivlina hipotezę Newsona (82) można przedstawić w postaci nieliniowego równania reologicznego

$$S = f(T) \quad (83)$$

Równanie to dla zerowego przybliżenia daje zależność (73).

W celu sformułowania podstawowej hipotezy Stokesa (83) należy założyć, że naprężenia występujące w pewnym elemencie płynu dla pewnego momentu t , nie zależą od tensora T^a , a odkształcenie sąsiednich elementów nie wpływa na naprężenie w rozpatrywanym elemencie płynu. Wykorzystano liniową zależność (82) i zastosowano ją do składowych tensora T^s oraz S^s . Założono, że każda składowa tensora S^s zależy liniowo od składowych tensora symetrycznego T^s

$$S_{ij}^s = \alpha_{ij} \cdot T_{ij}^s \quad (84)$$

gdzie α_{ij} - nieznane stałe współczynniki.

Równanie (84) zawiera 36 nieznanych stałych współczynników proporcjonalności i w celu ich wyznaczenia wprowadzono założenia niezależności związku (82) od orientacji układu współrzędnych/własność symetrycznych tensorów/, isotropowości płynu oraz wprowadzono centrowanie tensora T^s względem jego śladu. W wyniku zastosowania założeń upraszczających liczba współczynników zmniejsza się do dwóch współczynników α oraz β . Współczynniki te mają stałe wartości i są wyznaczone na podstawie relacji używanych w teorii sprężystości ciała stałego. Uzasadniają one składowe normalne S_{ii}^s od modułu sprężystości wzdłużnej cieczy, współczynnika poprzecznego odkształcenia liniowego oraz od modułu sprężystości poprzecznej, a składowe styczne S_{ij}^s od modułu sprężystości poprzecznej. Dokonując pewnych przekształceń otrzymamy najogólniejsze liniowe wyrażenie składowych tensora naprężeń od składowych tensora prędkości deformacji

$$S^s = (\alpha + \beta \operatorname{div} \bar{w}) \bar{E} + 2\mu \dot{T}^s \quad (85)$$

gdzie: α, β - współczynniki zależności liniowej,

$\bar{E} = \{\delta_{ij}\}$ - tensor jednostkowy.

Dla płynów nienewtonowskich nie jest spełniona zależność liniowa (82) i w tensorze (85) należy uwzględnić człon nieliniowy. Otrzymamy w ten sposób /drugie przybliżenie zależności (83) /

$$S^s = \alpha \bar{E} + (\beta \operatorname{div} \bar{w}) \bar{E} + 2\mu \dot{T}^s + \beta_1 \dot{T}^s \cdot \dot{T}^s + f(M) N \quad (86)$$

gdzie: M - składowa nieliniowa tensora naprężeń sprężystych,

β_1 - stały współczynnik /lekość krystalowa/,
 $f(M)$ - parametr uwzględniający dodatkowe własności płynu nie-
 newtonowskiego.

Wielkość $\mu_v \text{div} \bar{w}$ stanowi składową tensora S^S pojawiającą się w wyniku wszechstronnego ściskania elementu płynu, natomiast wyrażenie $2\mu T^S$ charakteryzuje składową tensora S^S powstającą od odkształcenia postaciowego /składowa ta jest liniową funkcją gradientu prędkości /.

Stałe β_1 i $f(M) = \beta_2$ określone są zależnościami

$$\beta_i = \beta_i \left\{ (\text{div} \bar{w}), \frac{1}{2} (\text{div} \bar{w})^2 - \text{tr} T^S T^S, \det T^S \right\} \quad (87)$$

gdzie: $\det T^S = \epsilon_{ijk} T^S_{ik} T^S_{jk}$ - wyznacznik tensora T^S ,

ϵ_{ijk} - tensor alternujący

Levi-Civita,

$i, j, k = 1, 2, 3$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{dla } 111, 222, 333, \\ +1 & \text{dla } 123, 231, 312, \\ -1 & \text{dla } 132, 213, 321 \end{cases}$$

Część liniowa tensora symetrycznego (86) dla cieczy ściśliwej ma postać

$$S^S = -[p - \mu_v \text{div} \bar{w}] \bar{E} + S^S_\mu = -[p - \mu_v \text{div} \bar{w}] \bar{E} + 2\mu T^S = -p + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) \text{div} \bar{w} \bar{E} + 2\mu T^S \quad (88)$$

Dla płynów spełniających prawo Ostwalda-de Waele /polimery i roztwory polimerów/

$$S_\mu = -m \left[\frac{1}{2} (T : T) \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot T \quad (89)$$

gdzie m, n - parametry reologiczne wyznaczane doświadczalnie / $n < 1$ - płyny pseudoplastyczne, $n > 1$ - płyny dylatancyjne, $n = 1$ - cieczy newtonowskie / $m = \mu$ /.

Dla płynów spełniających prawo Bingham

$$S_\mu = - \left\{ \mu_0 - \frac{\tau_0}{\left(\frac{1}{2} T : T \right)^{1/2}} \right\} \bar{E} \quad (89a)$$

gdzie μ_0, τ_0 - parametry wyznaczane doświadczalnie.

Ogólnym modelem dla płynów nieściśliwych jest wyrażenie na S_μ

$$S_\mu = 2\mu_a(\dot{\gamma}) T^S = 2\mu_a [2 \text{tr} (T^S)^2]^{1/2} T^S \quad (89b)$$

gdzie $\mu_a(\dot{\gamma})$ - lepkość pozorna.

Uwzględniając w tensorze S składową antysymetryczną S^a_μ otrzymamy

$$S = -p + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) \text{div} \bar{w} \bar{E} + 2\mu T^S + 2\mu_r (T^a - \bar{E} \cdot \bar{\omega}) \quad (89c)$$

gdzie μ_r - współczynnik lepkości obrotowej.

Dla płynu izotropowego niesymetryczna część tensora naprężeń sprężystych jest równa wektorowi osiowemu, który zależy od $\text{rot } \bar{w}$ oraz $\bar{\omega}$ i jest liniową funkcją gradientu prędkości

$$\bar{S}_\mu^a = 2\mu_r \left(\frac{1}{2} \text{rot } \bar{w} - \bar{\omega} \right) \quad (89d)$$

Uwzględniając w wzorze (89c) wyrażenie (89d) otrzymamy nową postać tensora naprężeń sprężystych

$$S = -pE + \mu_v \text{div } \bar{w} E + 2\mu_r \bar{T}^s + \mu_r (\text{rot } \bar{w} - 2\bar{\omega}) \quad (89e)$$

Wiskłość $\mu_r (\text{rot } \bar{w} - 2\bar{\omega})$ charakteryzuje przenoszenie pędu dyfuzją wirową.

Jeżeli ruch płynu odbywa się tylko przez deformację, to $\bar{T}^s = 0$, $\text{rot } \bar{w} = 0$, $\text{div } \bar{w} \neq 0$ i lepkość μ_v ma istotne znaczenie, natomiast dla płynu obracającego się jak ciało sztywne /"płyn zamrożony"/ $\bar{T}^s = 0$, $\text{div } \bar{w} = 0$, $\text{rot } \bar{w} = 2\bar{\omega}$ i lepkość μ_r odgrywa istotną rolę.

Wykorzystując wzory (57a) oraz (83) można tensor naprężeń momentowych M wyrazić przez tensor deformacji prędkości spinowej (26).

Liniową zależność pomiędzy składowymi tych tensorów określa relacja

$$M = \mu_0 \text{div } \bar{\omega} + 2\mu_s \bar{\omega}^s + 2\mu_a \bar{\omega}^a \quad (90)$$

gdzie: μ_0, μ_s, μ_a - współczynniki lepkości momentowej /wiskłości skalarowej/.

$\bar{\omega}^a$ - tensor deformacji prędkości spinowej.

Tensor $\bar{S}_\mu$ stanowi źródło ruchu obrotowego i można go wyłączyć z równania bilansu krętu ruchu postępowego (72).

Jeżeli wykorzystamy zależność

$$\text{div} (S \times \bar{r}) = \text{Div } S \times \bar{r} - 2\bar{S} \quad (91)$$

gdzie $\bar{S}$ - wektor osiowy tensora S , to równanie (72) można zapisać w innej postaci

$$\frac{d}{dt} \rho (\bar{r} \times \bar{w}) = \rho (\bar{r} \times \bar{F}) - 2\bar{S} - \text{div} (S \times \bar{r}) \quad (92)$$

Po krótkim czasie $2\bar{\omega}$ oraz $\text{rot } \bar{w}$ zrównają się i część antysymetryczna tensora S zanika. Pozostaje jedynie część symetryczna tensora (56).

Równanie (92) dla $F=0$ przyjmie postać

$$\frac{d}{dt} \rho (\bar{r} \times \bar{w}) - \text{div} (\bar{S} \times \bar{r}) = 0 \quad (92a)$$

Jeżeli $S_{\mu}^{\mu} \neq 0$, to zasada zachowania pędu nie jest spełniona i należy dołączyć do układu równań mechaniki płynów równanie ruchu obrotowego, które wynika z równania (70)

$$\varrho \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \text{Div } M + \varrho \bar{M}^i + S : E \quad (93)$$

Dla układu izotropowego I jest skalarową wielkością stałą o wymiarze momentu bezwładności jednostki masy $I_{ik} = I \delta_{ik}$, δ - delta-tensor Kroneckera/ i w równaniu (93) można wielkość tę wynieść przed znak pochodnej.

W teorii klasycznej $M = \bar{M}^i = \bar{\omega} = 0$ i równanie (93) redukuje się do warunku symetryczności tensora S

$$S : E = 0 \quad (93a)$$

Po dokonaniu pewnych przekształceń równanie (93) można zapisać w dwóch postaciach

$$\varrho I \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \varrho (\bar{\omega} \cdot \text{grad}) \bar{\omega} = \mu_0 \text{grad div } \bar{\omega} + 2\mu_s \text{Div } \bar{\omega} + 2\mu_a \text{Div } \bar{\omega} + \varrho \bar{M}^i + 4\mu_r \left(\frac{1}{2} \text{rot } \bar{\omega} - \bar{\omega} \right) \quad (93b)$$

$$\varrho I \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \varrho (\bar{\omega} \cdot \text{grad}) \bar{\omega} = (\mu_0 + \mu_s - \mu_a) \text{grad div } \bar{\omega} + (\mu_s + \mu_a) \Delta \bar{\omega} + \varrho \bar{M}^i + 2\mu_r (\text{rot } \bar{\omega} - 2\bar{\omega}) \quad (93c)$$

Część antysymetryczna tensora S znika, jeżeli znikają wewnętrzne mikromomenty. Czas zaniku ruchu obrotowego elementów płynu z prędkością $\bar{\omega}$ można wyznaczyć z równania zachowania krętu wewnętrznego elementu płynu $V \rightarrow 0$.

Zakładając $M = \bar{M}^i = 0$ oraz wprowadzając zmianę $\text{rot } \bar{\omega} = 2\bar{\Omega}$ otrzymamy uproszczoną postać równania (93)

$$\varrho I \frac{d\bar{\omega}}{dt} = 4\mu_r (\bar{\Omega} - \bar{\omega}) \quad (94)$$

gdzie $\bar{\Omega}$ - prędkość kątowa ruchu obrotowego płynu.

Jeżeli do równania (94) zastosujemy przekształcenie Laplace'a, to otrzymamy funkcję opisującą proces relaksacji /proces uspokajania się ruchu obrotowego elementów płynu/

$$\bar{\omega} = \bar{\Omega} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (94a)$$

$$\text{gdzie: } \tau = \frac{\varrho I}{4\mu_r}$$

- czas relaksacji /stała czasowa procesu relaksacji/.

μ_r - współczynnik lepkości obrotowej,

ϱ - gęstość płynu.

Po czasie τ , $2\bar{\omega}$ oraz $\text{rot } \bar{\omega}$ zrównują się i część antysymetryczna P^a zanika.

Tensor (88) dla cieczy nieściśliwej ma postać

$$S^s = -p\bar{e} + 2\mu T^s \quad (95)$$

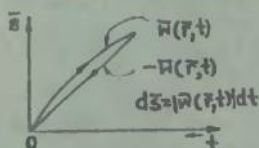
gdzie p - średnie ciśnienie statyczne.

Dla cieczy doskonałej $\mu=0$ i wzór (95) uprości się

$$S^s = -p\bar{e} \quad (95a)$$

Lepkość jest więc głównym czynnikiem różniącym zachowanie się cieczy doskonałej i rzeczywistej. Jeżeli w pewnym momencie t_0 określimy pole prędkości i zmienimy kierunek wektora $\bar{\omega}$ na odwrotny, to w przypadku cieczy doskonałej cząstki cieczy w obu ruchach przejdą ten sam tor, natomiast w przypadku cieczy rzeczywistej tory będą inne. Powstała histeresa ruchu, a więc nastąpi dysypacja energii ruchu.

Wzory (95) oraz (95a) wyrażają liniową zależność między częściami tensorów S oraz T . Zależność ta dla płynów newtonowskich wynika z postulatów termodynamiki procesów nieodwracalnych. W termodynamice

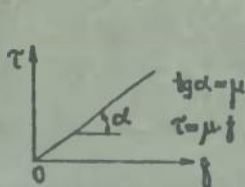


Rys. 26. Histeresa ruchu

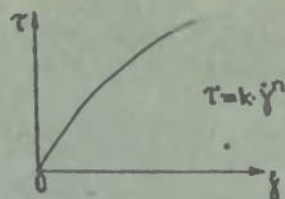
klasycznej rozpatruje się własności układów makroskopowych w stanie równowagi termodynamicznej, tj. gdy parametry nie zależą od czasu, a pola są bezźródłowe. Jeżeli prędkość zmiany dowolnego parametru płynu w procesie nierównowagowym jest dużo mniejsza od prędkości osiągnięcia przez układ makroskopowy stanu równowagi /zjawisko relaksacji/, to pro-

ces taki nazywamy quasi-statyczny. Procesami quasi-statycznymi zajmuje się termodynamika klasyczna. Jeżeli warunek relaksacji nie jest spełniony, to mamy procesy nierównowagowe, które rozpatrywane są w ramach zagadnień termodynamiki nierównowagowej.

Podstawową zasadą tej termodynamiki jest zasada lokalnej równowagi. W myśl tej zasady elementy płynu $\Delta V \rightarrow 0$ w objętości V są w stanie równowagi termodynamicznej w dowolnym momencie t , tj. równowaga elementów $\Delta V \rightarrow 0$ ustala się wcześniej niż elementów ΔV . Zasada ta pozwala używać parametrów termodynamicznych, wyznaczonych dla stanu równowagi, w analizie procesów nierównowagowych. Parametry takie są funkcjami czasu i współrzędnych. Ponieważ entropia charakteryzuje stopień odchylenia procesu nierównowagowego od stanu równowagowego, to z bilansu entropii wynika podstawowy postulat termodynamiki procesów



Rys. 27. Płyn newtonowski

Rys. 28. Płyn nienewtonowski
/pseudoplastyczny/

nierównowagowych. Wiąże on liniową zależnością strumienie i siły termodynamiczne

$$\bar{J}_i = \sum_{j=1}^K L_{ij} \bar{F}_j \quad (96)$$

gdzie: $\bar{J}$ - strumień termodynamiczny /strumień entropii, strumień ciepła, strumień masy, tensor P , prędkość reakcji chemicznej/,
 $\bar{F}$ - siła termodynamiczna /gradient temperatury, stężenia, prędkości, potencjału chemicznego/,
 L_{ij} - współczynniki fenomenologiczne/określone wyłącznie doświadczalnie/lub współczynniki Onsagera.

Współczynniki L_{ij} mogą być funkcjami parametrów stanu /ciśnienia, temperatury, potencjału itp./. Nie zależą one od $\bar{J}$ oraz $\bar{F}$.

W liniowej termodynamice procesów nierównowagowych spełniona jest relacja

$$L_{mn} = L_{nm} ; m, n = 1, \bar{K} \quad (97)$$

Zależność ta oznacza, że macierz współczynników fenomenologicznych jest symetryczna, a relacja nosi nazwę związków Onsagera lub czwartego prawa termodynamiki.

Wprowadzając do wzoru (64) część symetryczną tensora S przedstawioną zależnością (88) oraz zakładając $\mu_v = 0$ /współczynnik μ_v lepkości objętościowej dla gazów i cieczy jest dużo mniejszy od lepkości przesuńnięcia μ / otrzymamy równanie ruchu cieczy lepkiej i ściśliwej, które nazywane jest równaniem Naviera i Stokesa

$$\varrho \frac{d\bar{w}}{dt} = \varrho \bar{F} + \text{Div} [2\mu T^S - (p + \frac{2}{3}\mu \text{div } \bar{w}) \bar{E}] \quad (98)$$

Jeżeli we wzorze (98) uwzględnimy część antysymetryczną tensora, to otrzymamy nową postać równania ruchu różniącą się od równania Naviera i Stokesa

$$\varrho \frac{d\bar{w}}{dt} = \varrho \bar{F} + \text{Div} \{ 2\mu T^S + [p + (\mu_v + \frac{2}{3}\mu) \text{div } \bar{w}] \bar{E} - \mu_r (\text{rot } \bar{w} - 2\bar{\omega}) \} \quad (99)$$

Wykonując operację Div w równaniu (99) otrzymamy równanie ruchu w postaci De Groota

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = \rho \bar{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \bar{w} + \left(\frac{1}{3}\mu + \mu_v\right) \text{grad div } \bar{w} + \mu_r \text{rot}(2\bar{\omega} - \text{rot } \bar{w}) \quad (100)$$

Wzór (99) przy $(\mu, \mu_v, \mu_r) \neq \text{const}$ można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\bar{w}}{dt} = & \rho \bar{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \bar{w} + \left(\frac{1}{3}\mu + \mu_v\right) \text{grad div } \bar{w} + \mu_r \text{rot}(2\bar{\omega} - \text{rot } \bar{w}) + \\ & + 2T^* \text{grad } \mu + (\text{div } \bar{w}) \text{grad} \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) - (2\bar{\omega} - \text{rot } \bar{w}) \times \text{grad } \mu_r \end{aligned} \quad (101)$$

Wyłączając ze wzoru (101) część antysymetryczną S^a otrzymamy równanie Naviera i Stokesa, które we współrzędnych prostokątnych przyjmie postać układu trzech równań skalarowych

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} = & F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta w_x + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \bar{w} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} \left(2 \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div } \bar{w} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (102a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} = & F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta w_y + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \text{div } \bar{w} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \left(2 \frac{\partial w_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \text{div } \bar{w} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (102b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = & F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w_z + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \text{div } \bar{w} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \mu}{\partial z} \left(2 \frac{\partial w_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \text{div } \bar{w} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (102c)$$

Dla cieczy ściśliwej i lepkiej przy $\mu = \text{const}$ równanie (98) przyjmie inną postać

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{\partial(\rho \bar{w})}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{w} \bar{w}) = \rho \bar{F} - \text{grad } p + \frac{1}{3} \mu \text{grad div } \bar{w} + \mu \Delta \bar{w} \quad (103)$$

Dla cieczy nieściśliwej, w przypadku występowania konwekcji wymuszonej, równanie (103) dodatkowo uprości się i przyjmie postać

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + (\bar{w} \text{grad}) \bar{w} \right) = \rho \bar{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \bar{w} \quad (104)$$

Jeżeli wprowadzimy do wzoru (104) zamiast gęstości zależność (22), to otrzymamy równanie

$$\bar{\rho} [1 - \alpha_T (T - \bar{T}) + \beta_P (p - \bar{p})] \frac{d\bar{w}}{dt} = \bar{\rho} [1 - \alpha_T (T - \bar{T}) + \beta_P (p - \bar{p})] \bar{g} - \text{grad } p + \mu \Delta \bar{w} \quad (105)$$

gdzie $\bar{\rho}$ - średnia gęstość cieczy.

Zmiana gęstości w wyniku działania niejednorodnego pola ośnienia jest dużo mniejsza niż od niejednorodnego pola temperatury, a więc w równaniu (105) można nie uwzględniać wyrażenie $\beta_p(p - \bar{p})$ /gdzie $\bar{p}$ - średnie ciśnienie/. Zobec małej wartości α_T wyrażenie $\alpha_T(T - \bar{T}) \ll 1$ /gdzie $\bar{T}$ - średnia temperatura/ i może być pominięte przy pochodnej prędkości. Jeżeli dodatkowo wprowadzimy zamiast

$$\text{grad } p' = \text{grad } p - \bar{\rho} \bar{g} \quad (106)$$

i przyjmiemy $\mu \Delta \bar{w} \approx 0$, to otrzymamy równanie opisujące ruch płynu podczas konwekcji naturalnej

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = -\text{grad } p' - \bar{\rho} \alpha_T \bar{g} (T - \bar{T}) \quad (107)$$

gdzie: α_T - współczynnik rozszerzalności objętościowej,
 T - temperatura w płynie.

Ostatni człon prawej strony równania (107) oznacza siłę wyporu przypadającą na jednostkę objętości.

Równanie (104) we współrzędnych walcowych (r, θ, z) przyjmie postać układu trzech równań skalarowych

$$\rho \left(\frac{\partial w_r}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta^2}{r} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} \right\} + \rho F_r \quad (108a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_\theta}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r w_\theta}{r} + w_z \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial z^2} \right\} + \rho F_\theta \quad (108b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w_z}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right\} + \rho F_z \quad (108c)$$

gdzie: $\rho w_\theta^2/r$ - siła odśrodkowa,

$\rho w_r w_\theta/r$ - siła Coriolisa.

Jeżeli zastosujemy do równania (104) przekształcenia analizy wektorów (77), to równanie Naviera i Stokesa dla cieczy niesciśliwej przyjmie postać Lamba

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \text{grad } \frac{\bar{w}^2}{2} + \bar{\Omega} \times \bar{w} = \bar{F} - \frac{1}{\bar{\rho}} \text{grad } p - \nabla \text{rot rot } \bar{w} \quad (109)$$

Ruch potencjalny ($\bar{\Omega} = 0, \Delta \bar{w} = 0, \bar{F} = -\text{grad } \varphi'$) zawsze spełnia równanie (100), a więc ruch bezwrotny ($\bar{\Omega} = 0$) cieczy lepkiej ($\mu \neq 0$) dynamicznie jest możliwy. Jednak ruch taki nie spełnia warunków przy-

legania cieczy do ścianki i muszą się tworzyć wiry. Jest to uwidocznione przekształceniem równania (104) do postaci (107). Jeżeli założymy, że siły masowe mają potencjał $\bar{F} = -\text{grad } \Phi$, a ciecz ma stałą gęstość $\varrho = \text{const}$ lub jest barotropna $\varrho = \Phi(p)$, to równanie (109) przyjmie postać

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{\Omega} \times \bar{w} = -\text{grad } \Phi - \nu \text{rot } \bar{\Omega} \quad (110)$$

gdzie: $\Phi = p^* + \varrho \bar{w}^2$,

p^* - ciśnienie zmodyfikowane, które dla cieczy o stałej gęstości jest równe $\varphi' + \frac{p}{\varrho}$ oraz dla cieczy barotropnej ma postać całki $\varphi' + \int \frac{dp}{\varrho(p)}$.

Funkcja $\Phi(p)$ charakteryzująca ośrodki barotropne w zależności od formy ruchu przyjmuje różne postacie. Jeżeli $\Phi(p) = cp^n$, to przy $n=1$ występuje ruch izotermiczny, a przy $n \neq 1$ zachodzi proces politropowy. Ośrodki, w których gęstość nie jest funkcją tylko ciśnienia nazywane są ośrodkami baroklinnymi. Analiza takich ośrodków wymaga wprowadzenia nowych czynników - temperatury i strumienia energii.

Stosując analizę ilościową można dojść do wniosku, że w pobliżu ścianki ciała stałego w ruchu powolnym $\bar{w}^2 \approx 0$ i siły spowodowane lepkością są znacznie wyższe od sił masowych, wówczas w równaniu (103) dla ruchu ustalonego ($\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = 0$) pewnych członów można nie brać pod uwagę. Otrzymamy równanie Stokesa

$$\text{grad } p = \mu \Delta \bar{w} \quad (111)$$

W dostatecznie dużej odległości od ścianek ciała stałego siły masowe stają się większe od sił lepkości. Jeżeli płyn porusza się zgodnie z kierunkiem osi x , to $w_x = w_\infty$ i równanie (104) dla ruchu ustalonego uprości się do postaci Oseana

$$\varrho \cdot w_\infty \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = -\text{grad } p + \mu \Delta \bar{w} \quad (112)$$

Jeżeli dokonamy operacji rot równania (110)

$$\text{rot } \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \text{rot}[\bar{\Omega} \times \bar{w}] = -\text{rot grad } \Phi - \nu \text{rot rot } \bar{\Omega}$$

gdzie $\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{w}$

oraz użyjemy wzorów z analizy wektorów

$$\text{rot grad } \Phi = 0$$

$$\text{rot}[\bar{\Omega} \times \bar{w}] = \bar{\Omega} \text{div } \bar{w} - \bar{w} \text{div } \bar{\Omega} + \bar{w} \text{grad } \bar{\Omega} - \bar{\Omega} \text{grad } \bar{w}$$

$$\Delta \bar{\Omega} = -\text{rot rot } \bar{\Omega} + \text{grad div } \bar{\Omega}$$

to otrzymamy równanie ruchu w postaci Helmholtza

$$\text{helm } \bar{\Omega} = \bar{\omega} \text{div } \bar{\Omega} + \nu \Delta \bar{\Omega} \quad (113)$$

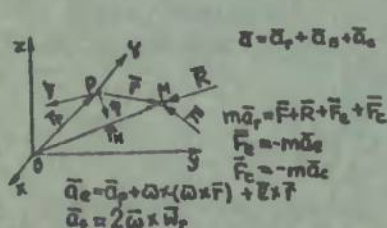
Jest to równanie ruchu, w którym w sposób wyraźny uwidoczniła jest wirowość. Równanie (111) można zapisać w postaci

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = (\bar{\Omega} \text{grad})\bar{\omega} + \nu \Delta \bar{\Omega} \quad (114)$$

gdzie pierwszy składnik prawej strony równania $\bar{\Omega} \text{grad} \bar{\omega}$ charakteryzuje proces przenoszenia wiru wraz z elementem cieczy, a drugi składnik $\nu \Delta \bar{\Omega}$ określa zmiany wirów w wyniku ich dyfuzji. Jeżeli $\Delta \Omega_x > 0$, to $\frac{d\Omega_x}{dt}$ od członu z lepkością otrzymuje dodatkową składową, tj. wpływ lepkości objawia się wzrostem Ω_x . Lepkość dąży do zrównania Ω_x we wszystkich punktach otaczających dany element płynu, a więc działanie lepkości sprowadza się do wyrównania wirów wewnątrz cieczy, tj. do dyfuzji wirów. Lepkość wywołuje dysypację energii i przy $\bar{\omega} = 0$ ruch wiru jest nieustalony. Prędkość kątowa wiru maleje, zwiększa się obszar zajęty przez wir i ostatecznie po pewnym czasie wir znika.

Jeżeli ruch obrotowy cieczy jednorodnej i nieściśliwej spowodowany jest zewnętrznym momentem obrotowym z prędkością $\bar{\omega}_z$, to w równaniu (104) należy uwzględnić dwie dodatkowe siły bezwładności: dośrodkową $(-\bar{\omega}_z \times (\bar{\omega}_z \times \bar{r}))$ oraz Coriolisa $(-2\bar{\omega}_z \times \bar{w})$. Otrzymamy równanie ruchu w postaci

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = -\text{grad } p + \mu \Delta \bar{w} + \rho \bar{F} - \rho \bar{\omega}_z \times (\bar{\omega}_z \times \bar{r}) - 2\rho \bar{\omega}_z \times \bar{w} \quad (115)$$



gdzie: $\bar{\omega}_z$ - prędkość kątowa zewnętrznej siły wymuszającej,

$\bar{r}$ - promień wodzący elementu płynu,

$\bar{w}$ - prędkość liniowa płynu.

Rys. 29. Ruch szględy

1.2.10. Równanie zachowania energii

Energia jest jedną z podstawowych skalarowych wielkości charakterystycznych stanu płynu. Związana jest z ruchem i wzajemnym oddziaływaniem elementów płynu. Energia nie może powstać lub zniknąć, lecz może być przekazywana w procesach fizycznych, tj. każda z postaci

energii/mechanicznej, chemicznej, elektrycznej, promienistej, jądrowej/ może się przemieniać w inną w odpowiednich procesach fizycznych.

Rozróżniamy następujące postacie energii:

- energia kinetyczna /energia płynu związana z ruchem jego elementów/,
- energia potencjalna/energia płynu zależna od wzajemnego rozmieszczenia elementów i od ich położenia w zewnętrznym polu sił; równa jest pracy, którą muszą wykonać siły działające na płyn przy przeprowadzeniu płynu z danej konfiguracji w konfigurację zerową/,
- energia mechaniczna/energia związana z ruchem i oddziaływaniem elementów płynu; równa sumie energii kinetycznej i energii potencjalnej/,
- energia cieplna/energia ruchu bezwładnościowego elementów $\Delta V \rightarrow 0$ płynu/,
- energia wiązań/różnica pomiędzy energią stanu związanego określonego układem wiązań i energii stanu, w którym cząstki te są oddalone na nieskończoną odległość/,
- energia wewnętrzna/część energii płynu niezależna od jego położenia ani od ruchu względnego; równa jest energii cieplnej i energii wiązań/.

Energia wewnętrzna zależy od lokalnej temperatury oraz gęstości i dopuszcza się jej obliczanie jako sumę energii wewnętrznej elementów płynu. Energia kinetyczna elementu płynu przypadająca na jednostkę objętości równa jest sumie energii ruchu postępowego i ruchu obrotowego. Jeżeli ciecz się nie obraca, to energia kinetyczna określona jest ruchem postępowym.

Zasada zachowania energii całkowitej formułowana jest na podstawie równania bilansowego, które wymaga, aby przyrost strumienia energii w obszarze był równy sumie składników

$$A_k = -K + Q_v + E_p + E^p + Q + \dot{E} \quad (116)$$

gdzie: A_k - akumulacja strumienia energii całkowitej w elemencie płynu,

K - wypadkowy konwekcyjny dopływ strumienia energii całkowitej,

Q_v - wypadkowy strumień energii cieplnej dopływający do obszaru płynnego V przez powierzchnię płynną S w czasie dt ,

E_p - wypadkowy strumień energii wynikający z działania sił i momentów masowych,

E^p - strumień energii momentów i sił powierzchniowych,

Q - energia zewnętrznych i wewnętrznych oddziaływań odniesiona do jednostki masy,

ϵ' - strumień innej energii/jądrowej, promienistej, pola elektromagnetycznego i inne/.

Wprowadzając odpowiednie strumienie energii zamiast oznaczeń do wzoru (116) otrzymamy równanie energii całkowitej w następującej postaci

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho [u + 0,5 \bar{w}^2 + 0,5 [\bar{\omega}^2] dV = - \int_V \text{div} \{ \rho [u + 0,5 \bar{w}^2 + 0,5 [\bar{\omega}^2] \} dV - \int_S (\lambda \text{grad} \eta) \bar{n} dS + \\ + \int_V \bar{F} \bar{w} dV + \int_V \bar{M} \bar{\omega} dV + \int_S \bar{w} \bar{\tau}_n dS + \int_S \bar{\omega} \bar{\mu}_n dS + \int_V \rho Q dV + \int_V \epsilon' dV \quad (117)$$

Jeżeli zewnętrzne siły masowe są potencjalne $\bar{F} = -\text{grad} \psi'$

$$\rho(\bar{F} \bar{w}) = -\rho \bar{w} \text{grad} \psi' = \rho \frac{\partial \psi'}{\partial t} - \frac{\partial \rho \psi'}{\partial t} - \text{div}(\rho \bar{w} \psi')$$

to przy $\frac{\partial \psi'}{\partial t} = 0$ równanie (117) przyjmie postać

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho (u + 0,5 \bar{w}^2 + 0,5 [\bar{\omega}^2 + \psi']) dV = - \int_V \text{div} \{ \rho [u + 0,5 \bar{w}^2 + 0,5 [\bar{\omega}^2 + \psi']) \} dV - \int_S (\lambda \text{grad} \eta) \bar{n} dS + \\ + \int_V \bar{M} \bar{\omega} dV + \int_S \bar{w} \bar{\tau}_n dS + \int_S \bar{\omega} \bar{\mu}_n dS + \int_V \rho Q dV + \int_V \epsilon' dV \quad (117a)$$

gdzie: λ - współczynnik przewodnictwa cieplnego,

Q - energia zewnętrznych i wewnętrznych oddziaływań.

Równanie (117) można przedstawić w postaci sumy dwóch równań wyrażających bilans energii mechanicznej oraz energii cieplnej/wewnętrznej/

Całkowe równanie bilansu pełnej energii mechanicznej na postać

$$\frac{d}{dt} \int_V 0,5 \rho (\bar{w}^2 + [\bar{\omega}^2]) dV = \int_S (\bar{\tau}_n \bar{w} + \bar{\mu}_n \bar{\omega}) dS + \int_V \rho (\bar{F} \bar{w} + \bar{M} \bar{\omega}) dV \quad (118)$$

Jeżeli w równaniu (118) wykorzystamy relacje

$$\int_V \bar{w} \text{Div} \bar{S} dV = \int_V \text{div}(\bar{w} \bar{S}) dV - \int_V (\bar{T} : \bar{S}) dV \quad (119)$$

$$\int_V \bar{\omega} \text{Div} \bar{M} dV = \int_V \text{div}(\bar{\omega} \bar{M}) dV - \int_V (\bar{\omega} : \bar{M}) dV \quad (119a)$$

to otrzymamy

$$\frac{d e_k}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V 0,5 \rho (\bar{w}^2 + [\bar{\omega}^2]) dV = \int_V \text{div}(\bar{w} \bar{S} + \bar{\omega} \bar{M}) dV - \\ - \int_V [(\bar{T} : \bar{S}) + (\bar{\omega} : \bar{M})] dV + \int_V \rho (\bar{F} \bar{w} + \bar{M} \bar{\omega}) dV \quad (120)$$

Uwzględniając tylko energię mechaniczną ruchu postępowego otrzymamy równanie całkowite bilansu tej energii dla dowolnej powierzchni S

$$\frac{D}{Dt} \int_V 0,5 \rho \bar{w}^2 dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} 0,5 \rho \bar{w}^2 dV + \int_S 0,5 \rho \bar{w}^2 (\bar{w}_n \bar{n}) dS \quad (121)$$

gdzie $\bar{w}_s$ - prędkość przemieszczania się powierzchni S .

Uwzględniając w równaniu (120) tylko człony określające energię mechaniczną ruchu postępowego oraz zamieniając pochodną lokalną w tym równaniu zależnością wyznaczoną ze wzoru (121) otrzymamy równanie całkowe słuszne dla dowolnej powierzchni S

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \bar{w}^2 dV = - \int_S \rho \bar{w} (\bar{w} - \bar{w}_s) \bar{n} dS + \int_V \text{div}(\bar{w} S) dV - \int_V (\bar{T} : \bar{S}) dV + \int_V \rho \bar{F} \bar{w} dV \quad (121a)$$

Jeżeli założymy, że prędkość względna ruchu płynu jest różna od zera tylko na powierzchni S' oraz uwzględnimy pracę ciśnienia zewnętrznego p_0 , to otrzymamy równanie

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \bar{w}^2 dV = - \int_{S'} \rho \bar{w} (\bar{w} - \bar{w}_s) \bar{n} dS - \int_{S'} \bar{w} (P - p_0 \bar{E}) \bar{n} dS - \int_V [(P - p_0 \bar{E}) : \bar{T}] dV + \int_V \rho \bar{F} \bar{w} dV \quad (122)$$

W większości przypadków siła zewnętrzna działająca na obszar V jest siłą potencjalną $\bar{F} = -\text{grad} \psi'$. Wobec powyższego ostatni człon równania (122) można przekształcić

$$\int_V \rho \bar{F} \bar{w} dV = - \frac{D}{Dt} \int_V \rho \psi' dV - \int_S \rho \psi' (\bar{w} - \bar{w}_s) \bar{n} dS \quad (123)$$

Jeżeli poddamy podobnemu przekształceniu człony równania (122) zawierające ciśnienie atmosferyczne p_0

$$- \int_{S'} p_0 \bar{w} \bar{n} dS - \int_V (p_0 \bar{E} : \bar{T}) dV = - \frac{D}{Dt} \int_V p_0 dV + \int_{S'} p_0 (\bar{w} - \bar{w}_s) \bar{n} dS - \int_V p_0 \text{div} \bar{w} dV \quad (124)$$

oraz wydzielimy z tensora P ciśnienie p , to równanie (122) napiszemy w postaci

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho (0.5 \bar{w}^2 + \psi' + \frac{p_0}{\rho}) dV = & - \int_{S'} \rho (0.5 \bar{w}^2 + \psi' + \frac{p - p_0}{\rho}) (\bar{w} - \bar{w}_s) \bar{n} dS + \\ & + \int_V (p - p_0) \text{div} \bar{w} dV + \int_V (P - p_0 \bar{E}) : \bar{T} dV - \int_{S-S'} \bar{w} (P - p_0 \bar{E}) \bar{n} dS - \int_{S'} [(p - p_0) \bar{w}_s] + \bar{w} P \bar{n} dS \end{aligned} \quad (125)$$

Równanie (125) nazwane jest uogólnionym równaniem bilansu energii mechanicznej.

W przypadku ruchu cieczy nieściśliwej w równaniu (125) znika drugi człon tego równania, ponieważ $\text{div} \bar{w} = 0$ oraz ciśnienie p_0 jest ciśnieniem statycznym. Jeżeli dodatkowo nie uwzględnimy pracy sił lepkości na powierzchni S' , to równanie (125) uprości się do postaci

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho (0.5 \bar{w}^2 + \psi') dV = & - \int_{S'} \rho (0.5 \bar{w}^2 + \psi' + \frac{p - p_0}{\rho}) (\bar{w} - \bar{w}_s) \bar{n} dS + \int_V (P - p_0 \bar{E}) : \bar{T} dV - \\ & - \int_{S-S'} \bar{w} (P - p_0 \bar{E}) \bar{n} dS - \int_{S'} (p - p_0) \bar{w}_s \bar{n} dS \end{aligned} \quad (126)$$

Podwójny iloczyn skalarowy tensorów P i T można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} P:T &= (p\mathcal{E} - \mu_V \text{div} \bar{w} \mathcal{E} + \overset{\circ}{P}_\mu^s + \overset{\circ}{P}_\mu^a) : (\frac{1}{3} \text{div} \bar{w} \mathcal{E} + \overset{\circ}{T}^s + \overset{\circ}{T}^a) = \\ &= \frac{1}{3} p \text{div} \bar{w} \mathcal{E}:\mathcal{E} + p \mathcal{E}:\overset{\circ}{T}^s + p \mathcal{E}:\overset{\circ}{T}^a - \frac{1}{3} \mu_V (\text{div} \bar{w})^2 \mathcal{E}:\mathcal{E} - \mu_V \text{div} \bar{w} \mathcal{E}:\overset{\circ}{T}^s - \\ &- \mu_V \text{div} \bar{w} \mathcal{E}:\overset{\circ}{T}^a + \frac{1}{3} \text{div} \bar{w} \mathcal{E}:\overset{\circ}{P}_\mu^s + \overset{\circ}{P}_\mu^s:\overset{\circ}{T}^a + \frac{1}{3} \text{div} \bar{w} \mathcal{E}:\overset{\circ}{P}_\mu^a + \overset{\circ}{P}_\mu^a:\overset{\circ}{T}^a + \overset{\circ}{P}_\mu^a:\overset{\circ}{T}^a \end{aligned} \quad (127)$$

Wobec tego, że iloczyn $\mathcal{E}:\mathcal{E} = 3$, podwójny iloczyn skalarowy $\mathcal{E}$ i tensora z zerowym śladem oraz podwójny iloczyn skalarowy tensora symetrycznego i antysymetrycznego /skośnosymetrycznego/ jest równy zero, związek (127) uprości się do postaci

$$P:T = p \text{div} \bar{w} - \mu_V (\text{div} \bar{w})^2 + \overset{\circ}{P}_\mu^s:\overset{\circ}{T}^s + \overset{\circ}{P}_\mu^a:\overset{\circ}{T}^a \quad (127a)$$

Iloczyn (127a) dla ruchu postępowego uspokojonego można zapisać w postaci

$$P:T = p \text{div} \bar{w} - \mu_V (\text{div} \bar{w})^2 - 2\mu \overset{\circ}{T}^s:\overset{\circ}{T}^s \quad (127b)$$

Podwójny iloczyn skalarowy tensorów M i ω można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} M:\omega &= (\mu_0 \text{div} \bar{\omega} \mathcal{E} + \overset{\circ}{M}^s + M^a) : (\frac{1}{3} \text{div} \bar{\omega} \mathcal{E} + \overset{\circ}{\omega}^s + \omega^a) = \\ &= \frac{1}{3} \mu_0 (\text{div} \bar{\omega})^2 \mathcal{E}:\mathcal{E} + \mu_0 \text{div} \bar{\omega} \mathcal{E}:\overset{\circ}{\omega}^s + \mu_0 \text{div} \bar{\omega} \mathcal{E}:\omega^a + \frac{1}{3} \text{div} \bar{\omega} \mathcal{E}:\overset{\circ}{M}^s + \\ &+ \overset{\circ}{M}^s:\overset{\circ}{\omega}^s + \overset{\circ}{M}^s:\omega^a + \frac{1}{3} \text{div} \bar{\omega} \mathcal{E}:\overset{\circ}{M}^a + \overset{\circ}{M}^a:\overset{\circ}{\omega}^s + M^a:\omega^a \end{aligned} \quad (128)$$

Wykorzystując zależność (90b) otrzymamy

$$M:\omega = \mu_0 (\text{div} \bar{\omega})^2 + \overset{\circ}{M}^s:\overset{\circ}{\omega}^s + M^a:\omega^a \quad (128a)$$

Uwzględniając zależności (127b) oraz (128a) w równaniu (120) otrzymamy

$$\begin{aligned} \varrho \bar{w} \frac{d\bar{w}}{dt} + \varrho \bar{I} \bar{\omega} \frac{d\bar{\omega}}{dt} - \text{div}(-\bar{w} P + \bar{\omega} M) &= p \text{div} \bar{w} - \\ &- \mu_V (\text{div} \bar{w})^2 - \mu_0 (\text{div} \bar{\omega})^2 + \overset{\circ}{P}_\mu^s:\overset{\circ}{T}^s + \overset{\circ}{P}_\mu^a:\overset{\circ}{T}^a - \overset{\circ}{M}^s:\overset{\circ}{\omega}^s - \\ &- M^a:\omega^a + \varrho \bar{F} + \varrho \bar{M}^i \end{aligned} \quad (129)$$

Suma iloczynów tensorów (127a) oraz (128a) reprezentuje źródło objętościowe energii wewnętrznej wytwarzanej w jednostce objętości w wyniku działania sił tarcia

$$\Phi = -P:T + M:\omega - p \text{div} \bar{w} = S_f:T + M:\omega - p \text{div} \bar{w} \quad (130)$$

Jeżeli założymy, że $\mu=0$, $\bar{\Omega}=0$, $\bar{w}=\bar{w}_n$, $\bar{F}=-\text{grad}\psi'$, $\frac{\partial\psi'}{\partial t}=0$ oraz nie uwzględniamy ciśnienia p_0 , to równanie (126) uprości się do postaci

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = - \int_S p w_n dS + \int_V p d(\bar{v} \bar{w}) dV \quad (131)$$

gdzie: $E_k = \int_V \rho s g \bar{w}^2 dV$ - energia kinetyczna,
 $E_p = \int_V \rho g \psi' dV$ - energia potencjalna.

Prawa strona tego równania nosi nazwę miary dysypacji objętości. Pierwsza całka prawej strony równania (131) oznacza pracę sił powierzchniowych ciśnienia hydrodynamicznego odniesioną do jednostki czasu i powierzchni S . Druga całka tego równania oznacza pracę sekundową sił wewnętrznych powstającą w wyniku rozszerzania się każdego elementu objętości V .

Dla cieczy nieściśliwej równanie (131) uprości się do postaci

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p) = - \int_S p w_n dS \quad (132)$$

Jeżeli granice powierzchni S są sztywne, to $w_n=0$ i równanie (132) przybiera postać

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_k + E_p) = 0 \quad (133)$$

$$E_k + E_p = \text{const.} \quad (134)$$

Wzór (134) jest postacią matematyczną zasady zachowania energii całkowitej cieczy "zamrożonej" w pewnym momencie.

Równanie (120) można zapisać w innej postaci ($\bar{\Omega}=\bar{\omega}=0$)

$$A_1 + A_2 = dE_k + \int_V \Phi' dV dt \quad (135)$$

gdzie: $\Phi' = p \cdot T$.

$A_1 = - \int_V \text{div}(P \cdot \bar{w}) dV dt$ - praca sił powierzchniowych,

$A_2 = \int_V \rho \bar{F} \cdot \bar{w} dV dt$ - praca sił masowych.

Z równania (135) wynika wniosek, że praca wykonana siłami masowymi i powierzchniowymi tylko częściowo idzie na zwiększenie energii kinetycznej, część przechodzi nieodwracalnie w energię cieplną, a więc reprezentuje ona tę część źródła energii kinetycznej, która nie podnosi energii ruchu, a zamienia się w energię wewnętrzną płynu manifestując się podniesieniem temperatury płynu.

Zgodnie ze wzorem (127b) przy $\mu_v=0$ otrzymamy wyrażenia określające wielkość Φ'_w

$$\Phi' = 2\mu \left[\sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{w}) \right]^2 \quad (136)$$

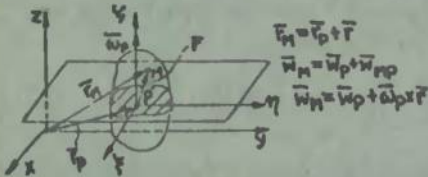
gdzie Φ' - funkcja dysypacyjna odniesiona do jednostki czasu i do jednostki masy / funkcja dysypacji Rayleigha/.

Jeżeli ciecz jest nieściśliwa, to $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ i wyrażenie (136) przyjmie postać

$$\Phi_w = \int_V \Phi' dV = 2\mu \rho \int_V \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)^2 dV \quad (137)$$

Dla cieczy newtonowskich Φ_w jest zawsze wielkością dodatnią.

Zgodnie ze wzorem (137) dysypacja energii nie istnieje tylko w



Rys. 30. Ruch płaski

tych przypadkach, gdy składowe tensora prędkości deformacji S^3 sprowadzają się do zera, t.j. gdy ruch sprowadza się do kombinacji ruchu postępowego i ruchu obrotowego. Ruch obrotowy spowodowany będzie działaniem zewnętrznych momentów obrotowych. Innymi słowy, gdy ruch płynu sprowadza się do ruchu płaskiego ciała stałego

/punkty ciała materialnego poruszają się w płaszczyźnie równoległej do innej nieruchomej płaszczyzny/, to dysypacja energii nie istnieje. Dysypacja energii w płynach doskonałych nie występuje.

Bilans energii wewnętrznej dla dowolnej powierzchni ma postać

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho u dV + \int_S \rho u \vec{w}_s \cdot \vec{n} dS \quad (138)$$

gdzie u - energia wewnętrzna właściwa.

Jeżeli wyznaczmy pochodną lokalną energii wewnętrznej z równania (117), wprowadzimy otrzymane wyrażenie do zależności (138) oraz założymy, że prędkość względna ruchu płynu jest różna od zera tylko na powierzchni S' , to otrzymamy uogólnione równanie bilansu energii wewnętrznej dla ruchu postępowego

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u dV = - \int_{S'} \rho u (\vec{w} - \vec{w}_s) \cdot \vec{n} dS + \int_V \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) dV - \int_V (P:T) dV + \int_V \rho Q dV + \int_V \rho \epsilon' dV \quad (139)$$

Wielkość $P:T$ oznacza objętościowe źródło energii wewnętrznej wytwarzanej w jednostce objętości w wyniku działania sił tarcia.

Wykorzystując związek (127b), zakładając $\vec{w} = \vec{w}_s$, $\epsilon' = 0$ oraz wy-

korzystając własność elementu płynu i uwzględniając działania ciśnienia p_0 otrzymamy równanie różniczkowe bilansu energii wewnętrznej

$$\rho \frac{du}{dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) - (p - p_0) \text{div} \bar{w} + \mu_v (\text{div} \bar{w})^2 + 2\mu \dot{T}^2 + \rho Q \quad (139a)$$

gdzie: T - temperatura,

λ - współczynnik przewodnictwa cieplnego,

$$p = p(\rho, T) \cdot$$

$$u = u(\rho, T) \cdot$$

Zwykle przyjmuje się, że współczynnik przewodzenia ciepła jest wielkością stałą. Jednak dla cieczy anizotropowej /własność fizyczna takiej cieczy zależy od obranego kierunku w objętości V / wielkość λ zależy od tensora T i zgodnie ze wzorem (97) jest tensorem drugiego rzędu.

Jeżeli założymy $\mu_v = 0$ oraz nie uwzględnimy działania ciśnienia p_0 , to równanie (139) można zapisać w innej postaci

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho \bar{w} \text{grad} u + \text{div}(\lambda \text{grad} T) - p \text{div} \bar{w} + 2\mu \dot{T}^2 + \rho Q \quad (140)$$

Zgodnie z tym równaniem zmiana energii wewnętrznej zachodzi przez konwekcję, przewodnictwo cieplne, ściśliwość płynu oraz dysypację energii mechanicznej. Wielkość Φ (137) jest mała i uwzględnia się ją w pewnych szczególnych przypadkach.

Dla płynu nieściśliwego równanie (139) upraszcza się do postaci

$$\rho \frac{du}{dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + 2\mu \dot{T}^2 + \rho Q \quad (141)$$

gdzie: $p = p(T) \cdot$

$$u = u(T) \cdot$$

W obliczeniach praktycznych wygodne jest operowania polem temperatury. Wymaga to wyrażenia energii wewnętrznej przez ciepło właściwe i temperaturę. W tym celu należy wykorzystać równanie stanu

$$u = u(v, T) \quad (142)$$

Z równania tego wynika, że

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \frac{dv}{dt} \quad (143)$$

gdzie $v = \frac{1}{\rho}$ - objętość właściwa,

Z termodynamiki klasycznej wynika, że pochodna

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = c_v \quad (144)$$

jest ciepłem właściwym w stałej objętości.

Pochodną du określa się z termodynamicznego równania stanu procesu odwracalnego

$$du = Tds - pdv \quad (145)$$

gdzie s - entropia.

Rozwiązując to równanie względem ciśnienia otrzymamy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T - p \quad (146)$$

Wykorzystując zależność

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \quad (147)$$

oraz wprowadzając wyrażenie (146) do równania (143) i przechodząc z objętości właściwej na gęstość otrzymamy

$$\frac{du}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho} \left[-T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + p \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right] \quad (148)$$

Wykorzystując równanie ciągłości (40) otrzymamy zależność określającą lewą stronę równania (139)

$$\rho \frac{du}{dt} = c_v \rho \frac{dT}{dt} + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \text{div} \vec{w} - p \text{div} \vec{w} + \quad (149)$$

Zastępując pochodną energii wewnętrznej we wzorze (140) wyrażeniem (149) otrzymamy równanie bilansu energii cieplnej dla cieczy newtonowskiej

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \text{div} \vec{w} + \text{div}(\lambda \text{grad} T) + 2\mu \vec{\dot{T}} : \vec{\dot{T}} + \rho Q \quad (150)$$

Zgodnie z tym równaniem temperatura elementu płynu zmienia się na skutek przewodności cieplnej, efektów rozszerzania się objętości oraz zjawiska dysypacji lepkiej. Równanie (150) można zastosować do cieczy nienewtonowskich, jeżeli zamiast lepkości μ użyjemy lepkości pozornej μ_a .

Jeżeli płyn jest nieściśliwy, tj. $\rho = \text{const}$, to $\text{div} \vec{w} = 0$ i równanie (150) przyjmie postać

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + 2\mu_a \vec{\dot{T}} : \vec{\dot{T}} + \rho Q \quad (151)$$

lub przy pominięciu energii dysypacji

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \rho Q \quad (152)$$

gdzie: Q - wydajność źródła ciepła,

Równanie (152) przy $\rho, c_v, \lambda = \text{const}$ oraz $Q=0$ dla płynu "samoroźnego" $\bar{w}=0$ uproszcza się do równania nieustalonego przewodnictwa ciepła

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T \quad (153)$$

gdzie $a = \frac{\lambda}{\rho c_v}$ - współczynnik dyfuzji temperaturowej przy stałej objętości /współczynnik dyfuzji energii wewnętrznej/.

Bilans energii wewnętrznej całkowitej opisany jest równaniem

$$\rho \frac{du}{dt} = + \rho \operatorname{div} \bar{w} + \Phi - \operatorname{div} \bar{q} + \rho Q \quad (154)$$

Strumień energii $\bar{q}$ dla płynów anizotropowych określa się z równania

$$\bar{q} = -\lambda(T, T) \operatorname{grad} T \quad (155)$$

Jeżeli energia wewnętrzna zależy nie tylko od wartości temperatury w danym momencie lecz również od "historii" temperaturowej elementu płynu, to strumień energii w płynie określa się z zależności

$$\bar{q} = -\lambda \operatorname{grad} T - \tau \bar{q} \quad (156)$$

gdzie: $\tau = a/w_q^2$ - czas relaksacji,

w_q - prędkość rozschodzenia się ciepła mająca skończoną wartość.

W termodynamice klasycznej prędkość w_q jest wielkością pomijalnie małą. W przypadku płynów z pamięcią ta odgrywa znaczną rolę.

Wobec dowolności wyboru objętości równanie różniczkowe energii całkowitej można zapisać w prostej postaci

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{j}_e = \rho \epsilon_e \quad (157)$$

gdzie: $e = e_k + e_r + \psi + u$ - energia całkowita,

$\bar{j}_e$ - wektor gęstości strumienia energii całkowitej,

ϵ_e - wydajność źródeł energii całkowitej odniesiona do jednostki objętości i jednostki czasu.

Zgodnie z zasadą zachowania energii całkowitej energia nie powstaje ani nie zanika lecz przechodzi z jednej postaci w drugą. Wobec powyższego w równaniu bilansu energii całkowitej (157) nie powinno być ani źródeł ani upustów energii / $\epsilon_e = 0$ /. Wówczas równanie (157) przyjmuje postać swą równaniem Umowa

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{J}_e = 0 \quad (158)$$

Zgodnie z tym równaniem lokalna zmiana objętościowego stężenia energii równa jest dywergencji wektora gęstości strumienia energii. Wektor J_e nazywany jest wektorem Umowa.

1.2.11. Równanie bilansu entropii

Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki entropia s jest jedną z dwóch funkcji $/s, T/$ stanu, tj. takim parametrem, który można wyrazić przez inne parametry stanu. Podstawowym problemem termodynamiki jest określenie równania bilansu entropii stanowiącego pełny opis makroskopowego stanu układu. Przyjmuje się, że entropia całkowita jest wielkością addytywną.

Po zróżniczkowaniu po dt równania (145) otrzymamy równanie/ równanie Maxwell dla termodynamiki klasycznej/

$$\frac{du}{dt} = T \frac{ds}{dt} - p \frac{dv}{dt} \quad (159)$$

Ze wzoru (159) wynika, że dla płynu nieściśliwego wzrost energii wewnętrznej odbywa się kosztem wzrostu entropii. Wykorzystując równanie (154) otrzymamy bilans energii cieplnej wyrażonej przez entropię

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\Phi}{T} + \frac{\rho}{T} Q + \frac{1}{T} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \quad (160)$$

Ostatni człon prawej strony równania (160) wyznacza się z pochodnej iloczynu dwóch funkcji

$$\operatorname{div}\left(\frac{\lambda}{T} \operatorname{grad} T\right) = \frac{1}{T} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \frac{\lambda}{T^2} (\operatorname{grad} T)^2 \quad (161)$$

Wobec powyższego równanie (160) przyjmie postać

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\rho}{T} Q + \frac{\Phi}{T} + \operatorname{div}\left(\frac{\lambda}{T} \operatorname{grad} T\right) + \frac{\lambda}{T^2} (\operatorname{grad} T)^2 \quad (162)$$

Zakładając, że brak jest reakcji chemicznych $/Q=0/$, składowe antysymetryczne tensorów T oraz S nie występują, to dla ruchu postępowego otrzymamy uproszczoną postać równania (160)

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\rho}{T} (\dot{T} : \dot{T}) + \frac{1}{T} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \quad (163)$$

Równanie (163) słuszne jest dla płynów jednorodnych, w których nie

występują zjawiska sprzyjające powstaniu powierzchni rozdziału lub inne czynniki wywołujące niejednorodność.

Biorąc pod uwagę relację

$$\frac{d}{dt} \int_V f(\vec{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} dV + \int_S f(\vec{r}, t) w_n dS \quad (164)$$

oraz całkując równanie (162) na całą objętość ograniczoną powierzchnią S otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = \int_V \left[\frac{\lambda}{T} (\text{grad } T)^2 + \frac{\rho}{T} Q + \frac{1}{T} \Phi \right] dV + \int_S \lambda \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} dS \quad (165)$$

Równanie (165) wskazuje, że prędkość zmian entropii równa jest sumie prędkości tworzenia się entropii na skutek dyfuzji ciepła, źródłowości procesu i dysypacji energii mechanicznej oraz strumienia entropii przez powierzchnię S w wyniku dopływu ciepła zewnętrznego do obszaru V drogą przewodnictwa cieplnego przez powierzchnię płynną S .

Równanie bilansu entropii można przedstawić w postaci prostszej, typu równania (157). W tym celu zmianę entropii właściwej pełnej należy przedstawić w postaci sumy dwóch składników

$$ds = (ds)_e + (ds)_i \quad (166)$$

gdzie: $(ds)_e$ - zewnętrzna /odwracalna/ zmiana entropii wywołana wzajemnym oddziaływaniem płynu z otoczeniem,

$(ds)_i$ - wewnętrzna zmiana entropii powstająca wewnątrz objętości.

W oparciu o zależność (166) można równanie całkowe bilansu entropii właściwej /przypadającej na jednostkę masy/ zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = - \int_S \vec{j}_s dS + \int_V \rho \epsilon dV \quad (167)$$

Stosując do równania (167) twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego otrzymamy

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_s - \rho \epsilon \right) dV = 0 \quad (168)$$

gdzie: $\vec{j}_s$ - pełny strumień entropii odniesiony do jednostki masy,

$\rho \epsilon$ - intensywność źródła entropii /wydajność źródła/ odniesiona do jednostki objętości i jednostki czasu.

Źródło entropii określone jest wyrażeniem /dla procesów nieodwracalnych $\rho \epsilon > 0$ /

$$\rho \epsilon = - \frac{\bar{q}}{T} \text{grad } T + \frac{\mu_v (\text{div } \vec{w})^2}{T} + \frac{S^2 \kappa : \dot{T}^2}{T} + \frac{5 \kappa^2 (\text{rot } \vec{w} - 2\vec{\omega})^2}{T} + \frac{\mu_o (\text{div } \vec{\omega})^2}{T} + \frac{M^2 \omega^2}{T} + \frac{M^2 \omega^2}{T} \geq 0 \quad (169)$$

Wobec wzorów (96) oraz (97) dla płynów izotropowych /wszystkie ten-

sory (97) stają się skalarami pomnożonymi przez tensor jednostkowy/ a zależności (169) szereg związków liniowych pomiędzy strumieniami i siłami termodynamicznymi

$$\bar{q}_i = -\lambda \text{grad } T - p T \text{rot} \bar{\omega} \quad (170)$$

$$\bar{S}^i = 2\mu \bar{T}^i; \bar{S}^a = 2\mu_r (\bar{Q} - \bar{\omega}) \quad (171)$$

$$\bar{M}^i = 2\mu_s \bar{\omega}^i; \bar{M}^a = 2\mu_a \bar{\omega}^a \quad (172)$$

1.2.12. Warunki graniczne

Podstawowym zagadnieniem mechaniki płynów, znajdujących się pod działaniem sił i momentów zewnętrznych, jest określenie ruchu każdej cząstki /elementu/ płynu oraz sił i momentów wewnętrznych w każdym punkcie przestrzeni zajętej przez płyn w każdym momencie. Szczególnie ważnym problemem praktycznym jest wyznaczenie ruchu płynu w sąsiedztwie ciała stałego. Rozwiązanie zagadnienia realizuje się metodami teoretycznymi i doświadczalnymi. Analiza teoretyczna polega na rozwiązaniu układu odpowiednich równań wiążących parametry określające ruch płynu z zadanymi odpowiednimi warunkami granicznymi.

Dysponuje się równaniem ciągłości, ruchu i energii

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho + \rho \text{div} \bar{w} &= 0 \\ \rho \frac{d\bar{w}}{dt} &= \rho \bar{F} - \rho \text{grad } p + \mu \Delta \bar{w} + \left(\frac{1}{3} \mu + \gamma \nu\right) \text{grad} \text{div} \bar{w} + \mu_r \text{rot} (\bar{\omega} - \text{rot} \bar{\omega}) \\ \rho \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \rho \bar{M}^i + (\mu_s + \mu_s - \gamma \mu) \text{grad} \text{div} \bar{\omega} + (\mu_s + \mu_a) \Delta \bar{\omega} + 2\mu_s (\text{rot} \bar{w} - 2\bar{\omega}) \quad (173) \\ \rho \frac{d\bar{u}}{dt} &= \rho \bar{Q} - \text{div} \bar{q}_i + \bar{S}_\mu : \bar{T} + \bar{M} : \bar{\omega} \end{aligned}$$

w których zawarte są parametry $\rho, \bar{w}, \bar{\omega}, T, p, Q, \bar{F}, \bar{M}^i, \{\mu\}, \lambda$. Układ równań (173) nie jest zamknięty i w celu jego zamknięcia należy dołączyć dodatkowe równania opisujące parametry fizykochemiczne, składowe sił i momentów oraz źródła energii

$$f_n(\rho, \bar{w}, \bar{\omega}, T, p, Q, \bar{F}, \bar{M}^i, \{\mu\}, \lambda) = 0 \quad (174)$$

Układ równań (173) zawiera równania o pochodnych cząstkowych zających nieskończoną liczbę rozwiązań. Fizycznie realizowalny proces wymaga sformułowania warunków granicznych, jednoznacznie określających proces fizyczny. Warunki graniczne zawierają w sobie warunki początkowe i warunki brzegowe. Warunki początkowe określa się przez podanie funkcji opisujących parametry w pewnej, stosownie dobranej chwili $t=t_0$ lub $t=t_0$. W zagadnieniach, gdzie rozpetruje się ruch ustalony lub sprowadzony do ustalonego, problem warunków początkowych

nie istnieje. Warunki brzegowe stawiane są na powierzchni ciała stałych ograniczających płyn lub znajdujących się w nim i z reguły dotyczą prędkości płynu oraz strumienia ciepła. W przypadku cieczy doskonałej i ruchu postępowego wprowadza się jeden warunek

$$w_K = 0 \quad (175)$$

Jest to warunek nieprzenikalności ścianek.

W przypadku płynu lepkiego wprowadza się warunek przyklejenia się płynu do ścianki

$$\bar{w}(\bar{r}_s, t) = \bar{w}_s \quad (175a)$$

gdzie: $\bar{r}_s$ - wektor wodzący punkt na ścianie,

$\bar{w}_s$ - wektor prędkości ruchu ścianki,

$\bar{w}$ - wektor prędkości płynu w danym punkcie.

Zgodnie z tym warunkiem pomiędzy powierzchnią ciała stałego istnieją siły szczypania cząsteczkowego.

Na powierzchni swobodnej powinien być spełniony warunek

$$\bar{S} \cdot \bar{w} = 0 \quad (176)$$

Normalna składowa prędkości cieczy jest zgodna z kierunkiem prędkości przemieszczania powierzchni rozdziału, a wektor $\bar{w}$ dla powierzchni etycznych do powierzchni swobodnej jest skierowany wzdłuż wewnętrznej normalnej i jest liczbowo równy ciśnieniu na powierzchni swobodnej / $\bar{T}_{En} = -p_0$, $\bar{T}_{Kt} = 0$.

Dodatkowe warunki graniczne dotyczą prędkości kątowej elementów płynu w pobliżu ścianki. Warunki te opisują mechanizm wpływu granicy rozdziału na pole prędkości kątowej $\bar{\omega}$. Podobnie do warunku (175a) mamy dodatkowy warunek

$$\bar{\omega}(\bar{r}_s, t) = \bar{\omega}_s \quad (177)$$

gdzie $\bar{\omega}_s$ - zadany wektor ruchu obrotowego punktu ścianki.

W przypadku, gdy powierzchnia rozdziału nie wpływa na ruch elementów płynu, wprowadza się warunek zaniku tensora antysymetrycznego S_{μ}^{α} .

Wprowadza się ponadto warunki brzegowe związane ze strumieniem ciepła.

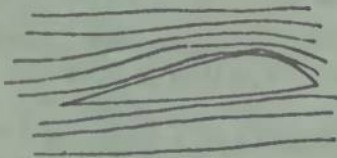
1.2.13. Rodzaje ruchów płynów lepkich

Obserwacje doświadczalne zachowania się płynów rzeczywistych przy różnych prędkościach/ po raz pierwszy dokonał Reynolds w roku 1883 - 1885/ wykazują, że w cieczy występują dwa rodzaje płynów:

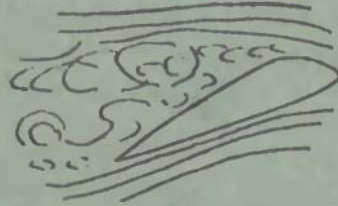
- uwarstwiony,

- burzliwy.

W przepływie uwarstwowym warstwy cieczy nie mieszają się, lecz ślizgają się po sobie. Sąsiednie strugi składają się z elementów płynu pozostających zawsze wewnątrz danej strugi. Poszczególne strugi płyną w izolacji jedna od drugiej. W przepływie uwarstwowym przenoszenie pędu odbywa się drogą procesów molekularnych tarcia, przewodnictwa i dyfuzji. Przepływ uwarstwiony jest stabilny i zachowuje tę własność dla małych prędkości ruchu płynu. Ze wzrostem prędkości płynu przepływ przestaje być stabilny i występują charakterystyczne poprzeczne przemieszczanie strug płynu. Powstaje przepływ burzliwy. Przep-



Rys. 31. Przepływ uwarstwiony



Rys. 32. Przepływ burzliwy

ływ taki jest zdecydowanie niestabilny i nieuporządkowany. Przenoszenie pędu odbywa się w wyniku chaotycznego przemieszczania się elementów płynu mających składowe prostopadłe do ruchu wzdłużnego elementów płynu. Występowanie składowych normalnych i stycznych potęguje wymianę ciepła w przepływającym płynie.

Struktura burzliwości jest skomplikowana. Tory elementów płynu są złożone i dla opisu ruchu płynu należy wyznaczyć tory każdego elementu płynu. Zachodzi konieczność całkowania równań ruchu, a więc stosuje się sumaryczne opisanie statystyczne. Buduje się wygładzony obraz ruchu przez uśrednienie pola prędkości i temperatury oraz uśrednienie torów elementów płynu.

Przepływ burzliwy ma większe znaczenie praktyczne niż przepływ uwarstwiony.

1.2.14. Przepływ burzliwy

Pierwsze próby teoretycznego opisu zjawiska burzliwości podjął Reynolds. Oparł się on na regułach uśredniania ruchu burzliwego względem czasu. Z pomiarów uzyskuje się wielkość chwilową/faktyczną/ parametru. Wielkość ta w wyniku chaotycznego ruchu elementów płynu doznaje pewnych pulsacji, które mogą być odfiltrowane przez stosowanie operatora bieżącej średniej

$$L_T(A) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} A(\bar{r}, t) dt = \bar{A}(\bar{r}, t) \quad (178)$$

$$L_T(A') = 0; L_T\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} L_T(A),$$

gdzie: A - parametr,
 $[0, T]$ - przedział uśrednienia,
 $\bar{A}$ - wielkość uśredniona,
 A' - wielkość chwilowa.

Wielkość chwilową można zapisać w postaci sumy

$$A(\bar{r}, t) = \bar{A}(\bar{r}, t) + A'(\bar{r}, t) \quad (179)$$

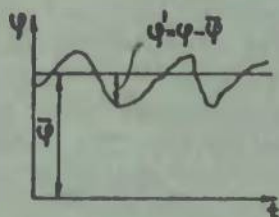
gdzie $A'(\bar{r}, t)$ - pulsacja wielkości A .

Jeżeli wszystkie uśrednione parametry opisujące ruch bursliwy nie zależą od czasu, lecz tylko od miejsca, to występuje quasi-ustalony ruch bursliwy.

Reynolds w swoich badaniach wykazał, że obszary przepływu można rozgraniczyć używając pewnej kombinacji parametrów geometrycznych, fizykochemicznych i kinetycznych. Wprowadził liczbę bezwymiarową

$$Re = \frac{w \cdot l \cdot \rho}{\mu} \quad (180)$$

nazwaną później liczbą Reynoldsa. Liczba ta jest miarą stosunku sił bezwładności do sił lepkości występujących w rozpatrywanym przepływie. Przy małych wartościach tej liczby nie bierze się pod uwagę ruchu bezwładnościowego. Przyjmuje się, że siły wywołujące ten ruch są małe w porównaniu do sił lepkości. Przy dużych wartościach liczby Reynoldsa siły bezwładności znacznie przewyżsają siły lepkości, jednak mogą występować przy dużych gradientach zmian lepkości



Rys. 33. Parametr przepływu burzliwego

znaczące siły tarcia. Jeżeli lepkość nie jest duża i małe są gradienty prędkości, to siły lepkości pomijają się i do opisu ruchu stosujemy równania opisujące ruch płynów *zaczynających* *złożonych*

W celu oceny intensywności pulsacji prędkości w kierunku x, y oraz wprowadzono średniokwadratową prędkość pulsacji jako wielkość proporcjonalną do energii kinetycznej składowych pulsacji przepływu płynu

$$\overline{|w'|}^2 = \frac{w_x'^2 + w_y'^2 + w_z'^2}{3} \quad (181)$$

lub

$$\overline{|\vec{w}'|^2} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |\vec{w}'|^2 dt \quad (182)$$

Jeżeli w każdym punkcie przestrzeni zajmowanej przez poruszający się płyn $\overline{w_x^2} = \overline{w_y^2} = \overline{w_z^2} = \text{const}$ oraz $\overline{w_x w_y} = \overline{w_x w_z} = \overline{w_y w_z} = 0$, to zachodzi przepływ burzliwy izotropowy. Jeżeli równości powyższe występują we wszystkich punktach przestrzeni, to przepływ izotropowy jest jednorodny /homogeniczny/.

Charakter wpływu burzliwości na przepływ płynu określa stopień burzliwości

$$Tr = \frac{1}{\bar{w}} \sqrt{\frac{1}{3}(\overline{w_x'^2} + \overline{w_y'^2} + \overline{w_z'^2})} \quad (183)$$

gdzie: $\bar{w}$ - pełna uśredniona prędkość przepływu burzliwego w elemencie płynu,

Tr - stopień burzliwości /turbulencja/.

Ważną charakterystyką jest również pierwiastek kwadratowy średnich kwadratów pulsacji prędkości $\sqrt{\overline{w_x'^2}}$, $\sqrt{\overline{w_y'^2}}$ oraz $\sqrt{\overline{w_z'^2}}$. Wielkości te odniesione do prędkości $\bar{w}$ /unormowane/ stanowią miarę intensywności burzliwości

$$T_x = \frac{\sqrt{\overline{w_x'^2}}}{\bar{w}}; \quad T_y = \frac{\sqrt{\overline{w_y'^2}}}{\bar{w}}; \quad T_z = \frac{\sqrt{\overline{w_z'^2}}}{\bar{w}} \quad (184)$$

Wprowadzając te wielkości do wzoru (183) otrzymamy nową postać wzoru określającego stopień burzliwości

$$Tr = \sqrt{\frac{1}{3}(T_x^2 + T_y^2 + T_z^2)} \quad (185)$$

Burzliwość ma charakter wirowy, a pulsacje parametrów charakteryzują się statystyczną więzią. Miara ilościową tej więzi jest współczynnik korelacji pulsacji w punktach strumienia. Dla dwóch punktów objętości, dwupunktowy współczynnik korelacji wzajemnej ma postać:

$$\begin{aligned} R_{w_i w_j} &= \overline{w_{i1} w_{j2}} / (\sqrt{\overline{w_{i1}^2}} \cdot \sqrt{\overline{w_{j2}^2}}) \\ R_{w_i p} &= \overline{p_1 w_{i2}} / (\sqrt{\overline{p_1^2}} \cdot \sqrt{\overline{w_{i2}^2}}) \\ R_{T w_i} &= \overline{T_{i1} w_{i2}} / (\sqrt{\overline{T_{i1}^2}} \cdot \sqrt{\overline{w_{i2}^2}}) \\ R_{T_i T_j} &= \overline{T_{i1} T_{j2}} / (\sqrt{\overline{T_{i1}^2}} \cdot \sqrt{\overline{T_{j2}^2}}) \end{aligned} \quad (186)$$

Pełną charakterystyką statystyczną pulsacji parametrów w przepływie burzliwym, zgodnie z teorią funkcji korelacyjnej, będą wielowymia-

rowe współczynniki korelacji. Zwykle ogranicza się do dwu- lub trójwymiarowych współczynników i w celu pełnego opisu przepływu burzliwego należy dysponować znaczną liczbą tych współczynników. Jako charakterystykę przepływu burzliwego wprowadzono "skalę burzliwości"

$$L = \int_0^{\infty} R dr \quad (187)$$

Skala burzliwości jest wymiarem liniowym charakterystycznym długości odcinka strumienia, na którym pulsacje parametrów są statystycznie zależne. Przy $r \rightarrow 0$ $L \rightarrow 0$ i otrzymujemy jednopunktowy współczynnik korelacji

$$R = \overline{w_x w_y} / (\sqrt{\overline{w_x^2}} \cdot \sqrt{\overline{w_y^2}}) \quad (188)$$

który dla przepływu burzliwego izotropowego przyjmie postać

$$R = \overline{w_x w_y} / \overline{w_x^2} = \overline{w_x w_y} / (\overline{w^2} \cdot \overline{r^2}) \quad (189)$$

Analiza korelacyjna pulsacji parametrów jest pracochłonna i w wielu przypadkach jest niemożliwa do przeprowadzenia. Do celów obliczeń praktycznych nie ma potrzeby znać pulsacji ciśnienia, prędkości, temperatury lub naprężeń stycznych, a wystarczy znać wartości parametrów uśrednionych w czasie. Jeżeli dokonamy uśrednienia dla długiego odcinka czasu, to nieustalony ruch burzliwy sprowadza się do ruchu burzliwego prawie ustalonego.

1.2.15. Równanie zachowania masy, pędu i energii ruchu burzliwego

W płynach rzeczywistych lepkość występuje niezależnie od rodzaju przepływu, a więc wyprowadzony układ równań (173) dla płynów rzeczywistych słuszny będzie dla przepływu uwarstwionego i burzliwego. Jednak dla przepływu burzliwego wszystkie człony układu równań (173) podlegają operacji uśrednienia (178).

Uśrednione w czasie równanie ciągłości (39) dla przepływu burzliwego ma postać /pulsacje prędkości jako efekt ściśliwości płynu/

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\xi} \bar{w}) = 0 \quad (190)$$

Podczas wyprowadzenia równania (190) wykorzystano zależność

$$\bar{\xi} \bar{w} = \bar{\xi} \bar{w} + \bar{\xi}' \bar{w}' \quad (191)$$

Analogicznie uśrednione w czasie równanie zachowania pędu (64) ma postać

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{dt} = \bar{\rho} \bar{\mathbf{F}} - \text{grad } \bar{p} + \text{Div}(\bar{\mathbf{S}}_\mu + \bar{\mathbf{S}}^b) \quad (192)$$

Podczas wyprowadzenia równania (192) wykorzystano zależność

$$\overline{\rho w_x w_x} = \overline{m_x w_x} = \overline{(m_x + m_x')(\bar{w}_x + w_x')} = \bar{w}_x \bar{m}_x + \bar{w}_x m_x' + \bar{w}_x' \bar{m}_x + \bar{w}_x' m_x' \quad (193)$$

gdzie — — symbol uśrednienia w czasie.

Równanie (192) nosi nazwę równania Reynoldsa dla uśrednionego ruchu burzliwego cieczy newtonowskiej. Tensor $\mathbf{S}^b$ jest symetrycznym tensorem naprężeń burzliwych

$$\bar{\mathbf{S}}^b = -\overline{\rho' \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}'} = \begin{vmatrix} -\overline{\rho' w_x'^2} & -\overline{\rho' w_x' w_y'} & -\overline{\rho' w_x' w_z'} \\ -\overline{\rho' w_y' w_x'} & -\overline{\rho' w_y'^2} & -\overline{\rho' w_y' w_z'} \\ -\overline{\rho' w_z' w_x'} & -\overline{\rho' w_z' w_y'} & -\overline{\rho' w_z'^2} \end{vmatrix} = \bar{\rho} \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} - \overline{\rho' \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}}} \quad (194)$$

Jeżeli ciecz jest nieściśliwa, to $\bar{\mathbf{S}}^b = \rho(\bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{w}})$ i równanie (192) upraszcza się do postaci

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{dt} = \bar{\rho} \bar{\mathbf{F}} - \text{grad } \bar{p} + \text{Div}(\bar{\mathbf{S}}_\mu + \bar{\mathbf{S}}^b) \quad (195)$$

Uśrednione w czasie równanie zachowania energii mechanicznej i energii cieplnej ruchu burzliwego przyjmą postacie

$$\bar{\rho} \frac{d}{dt}(\bar{\rho} \bar{w}^2 + \bar{\varphi}) = \text{div}[(\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}}^b) \bar{\mathbf{w}}] - \text{tr}[(\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}}^b) \bar{\mathbf{T}}] \quad (196)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho} \bar{c}_v \bar{T} = \bar{\rho} \bar{Q}(t) + \text{div}(\bar{\lambda} \text{grad } \bar{T}) - \text{div} \bar{q}^b + \bar{\Phi} + \bar{\Phi}^b \quad (197)$$

gdzie: $\bar{q}^b = \bar{q}^b(\rho, c_v, l, \bar{T}, \text{grad } \bar{T})$ - dodatkowy strumień energii cieplnej przepływający przez powierzchnię płynną do obszaru płynnego powstały w wyniku pojawienia się przepływu burzliwego,

$\bar{\Phi}^b$ - funkcja burzliwej dysypacji energii mechanicznej.

Funkcję $\bar{\Phi}^b$ wyznacza się z zależności

$$\bar{\Phi}^b = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial w_i'}{\partial x_j} \frac{\partial w_j'}{\partial x_i} - \frac{\partial w_i'}{\partial x_i} \frac{\partial w_j'}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 [2w_{ij}'^2 - (w_{ij}' - w_{ji}')^2] \quad (198)$$

Z równania (197) wynika, że w przepływie uwarstwionym wymiana ciepła zachodzi na skutek przewodnictwa cieplnego. W przepływie burzliwym w wyniku ciągłego przemieszczania się cząstek płynu decydującą rolę odgrywa konwekcyjna wymiana ciepła. Stąd wniosek, że wymiana ciepła w przepływie burzliwym jest wielokrotnie wyższa niż wymiana ciepła w przepływie uwarstwionym.

Jeżeli założymy, że parametry fizyczne płynu są stałe oraz brak jest sił masowych i źródeł masy, to równanie (197) przyjmie postać

$$e_v \varrho \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{w} \text{grad } \bar{T} \right) = \lambda \text{div grad } \bar{T} - \text{div} \bar{q}^b + \bar{\Phi} + \bar{\Phi}^b \quad (199)$$

gdzie: $\bar{q}^b = C_v \varrho [\bar{w} \bar{T}] - \bar{w} \bar{T}$,
 $(\bar{w} \bar{T})$ - wektor.

Przy wyprowadzeniu równania (199) skorzystano z reguły uśredniania

$$(\overline{\bar{w} \bar{T}}) = \bar{w} \bar{T} - (\bar{w} \bar{T} - \overline{\bar{w} \bar{T}}) = (\bar{w} \bar{T}) - \bar{w} \bar{T} \quad (200)$$

Stosując uśrednienie po czasie do równania (165) można otrzymać równanie całkowite bilansu entropii dla przepływu burzliwego.

Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki każda przemiana fizyczna zachodzi w cieczy rzeczywistej z rozproszeniem energii, a więc jest procesem nieodwracalnym. Entropia objętości cieczy rzeczywistej i otoczenia, razem wziętych, wzrasta. Przyrost entropii elementu płynu rzeczywistego będącego w ruchu wyraża się sumą wymiany entropii z otoczeniem i entropii tworzącej się w wyniku przemiany fizycznej.

Składniki pierwszy i trzeci prawej strony równania (165) są większe od zera lub równe zero. Wobec powyższego równanie (165) można zapisać w postaci nierówności wyrażającej drugą zasadę termodynamiki w odniesieniu do przepływu cieczy rzeczywistej

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho s dV - \int_S \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial n} dS - \int_V \varrho \frac{Q}{T} dV \equiv \int_V \left[\frac{\partial (\varrho s)}{\partial t} + \text{div} \left(\frac{\lambda}{T} \text{grad } T \right) - \varrho \frac{Q}{T} \right] dV \geq 0 \quad (201)$$

Dla dowolnej objętości V z nierówności entropii oraz równania (166) wynika różniczkowa postać nierówności entropii

$$\varrho \frac{ds}{dt} - \text{div} \left(\frac{\lambda}{T} \text{grad } T \right) - \varrho \frac{Q}{T} = \frac{\lambda}{T^2} (q \text{grad } T)^2 + \frac{1}{T} \text{tr} (\dot{S}_\mu^2 : \dot{T}^6) \geq 0 \quad (202)$$

Dla dowolnej powierzchni nierówność entropii można zapisać w postaci

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varrho s dV \geq \int_S \varrho s (\bar{w} - \bar{w}_e) (-\bar{n}) dS + \int_S \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial n} dS + \int_V \varrho \frac{Q}{T} dV \quad (203)$$

Jeżeli zastosujemy uśrednienie (178) do wzoru (203) oraz wykonamy

pewne przekształcenia i założymy, że w obszarze przepływu cieczy rzeczywistej nie występują powierzchnie osobliwe, to otrzymamy nierówność entropii dla przepływu burzliwego

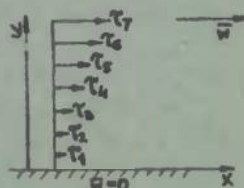
$$\frac{D}{Dt} \int_V \bar{\rho} s dV \geq \int_S (\bar{\rho} s \bar{w}_n - \bar{\rho} s \bar{w}_s) (\bar{n}) dS + \int_S \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} dS + \int_V \frac{\bar{g} \bar{Q}}{\bar{T}} dV \quad (204)$$

Równania (190, 192, 196, 197, 199, 204) nie stanowią układu zamkniętego i zachodzi potrzeba dołączenia dodatkowych zależności wiążących składniki równań (192, 196, 197) oraz (199), które pojawiły się w równaniach w wyniku uśrednienia przepływu burzliwego. Pojawienie się ich uwarunkowane jest pulsacją ciśnienia, prędkości, temperatury oraz parametrów hydrodynamicznych w przepływie burzliwym cieczy. Konstrukcja tych zależności opiera się na różnych hipotezach oraz związkach empirycznych /Deissler, Kármán, Prandtl, Taylor/.

1.2.16. Naprężenie tarcia

Tarcie w przepływie uwarstwionym pojawia się jako wynik dyfuzji cząstek przenoszących pęd z warstwy do warstwy. Wywołuje to zmianę prędkości przepływu. Pojawia się ruch względny cząstek /elementów/ w warstwach przepływającego płynu.

Tarcie w przepływie burzliwym pojawia się w wyniku strat energii elementów cieczy na zderzenia wzajemne i chaotyczne ich przemieszczanie się. W przepływach, gdy parametry nie doznają pulsacji $\psi' = 0$, obowiązuje wzór



Rys. 34. Naprężenie tarcia

$$\tau_u = -\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \quad (205)$$

gdzie: τ_u - naprężenie styczne,
 $\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}$ - gradient prędkości,
 μ - współczynnik lepkości dynamicznej.

W "zamrożonym" płynie naprężenie tarcia nie istnieje. Płyn w takim stanie przypomina ciało stałe. Naprężenia styczne występujące w bryle ciała stałego są proporcjonalne do wielkości deformacji, a siły wewnętrzne mają charakter sił sprężystych. Stąd wniosek, że efekt tarcia w cieczy zależy od gradientu prędkości, a dla ciała stałego jest funkcją ciśnienia normalnego. W ruchu burzliwym, zgodnie ze wzorem (192), wypadkowe naprężenie styczne jest sumą dwóch naprężeń

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_u + \tilde{\tau}_b \quad (206)$$

gdzie $\tilde{\tau}_b$ - naprężenie burzliwe.

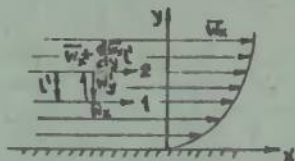
Boussinesq na podstawie hipotezy więzi pomiędzy naprężeniem burzliwym $\tilde{\tau}_b$ i uśrednioną prędkością zaproponował wzór

$$\tau_b = -\rho \nu^b \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \quad (207)$$

Współczynnik ν^b nosi nazwę kinematycznego współczynnika lepkości burzliwej. Współczynnik ten nie jest cechą fizyczną płynu, lecz zależy od intensywności ruchu burzliwego. Najprostszym przypadkiem jest założenie stałości parametru ν^b . Założenie takie jest dopuszczalne i utworzone prawidłowości teoretyczne są potwierdzane doświadczeniem. Jednak w większości przypadków założenie $\nu^b = \text{const}$ prowadzi do rozbieżności pomiędzy teorią a doświadczeniem. Zgodnie ze wzorem (195) przy założeniu $Q = \text{const}$, uśrednione naprężenie tarcia określa relacja

$$\bar{\tau}_{xy} = -\rho \overline{w'_x w'_y} \quad (208)$$

której postać nie zależy od jakichkolwiek konkretnych założeń co do struktury burzliwości. Prandtl na podstawie analogii pomiędzy burzliwym i cząsteczkowym przenoszeniem pędu zaproponował hipotezę "drogi mieszania". Zgodnie z tą hipotezą element płynu w warstwie 1 o prędkości $\bar{w}_x$ w wyniku burzliwej pulsacji w'_y przenika bez oddziaływania z innymi elementami płynu do warstwy 2 na głębokość l , gdzie prędkość wynosi $\bar{w}_x + \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \cdot l$. Element płynu po zmieszaniu się z płynem warstwy 2 ma prędkość pulsacji w'_x . Jeżeli wielkości w'_x oraz w'_y są tego samego rzędu, to zgodnie z hipotezą Prandtla $w'_y = a w'_x = a l \left(\frac{d \bar{w}_x}{dy} \right)$ i wzór (208) przyjmie postać



Rys. 35. Przepływ burzliwy z nierównomiernym rozkładem prędkości w_x

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_b &= -\rho \overline{w'_x w'_y} = -\frac{\rho}{T} \left(\frac{d \bar{w}_x}{dy} \right)^2 \int_0^T l^2 a dt = -\rho l^2 \left(\frac{d \bar{w}_x}{dy} \right)^2 = \\ &= -\rho l^2 \left| \frac{d \bar{w}_x}{dy} \right| \left(\frac{d \bar{w}_x}{dy} \right) = -\rho \nu^b \left(\frac{d \bar{w}_x}{dy} \right) \end{aligned} \quad (209)$$

gdzie: a - współczynnik,

1 - długość drogi zmieszania /analog drogi swobodnej przepływu cząstek w teorii kinetycznej gazów/.

Znak $||$ występuje, ponieważ naprężenie tarcia określone jest gradientem prędkości.

Wielkość l charakteryzuje istniejące w przepływie burzliwym swobodne przemieszczanie się elementów płynu z jednej warstwy do drugiej. Jest to jedna z charakterystyk wewnętrznego mechanizmu przepływu burzliwego. Wielkość l zależy od odległości od ścianki. W obszarze oddalonym od ścianki i znajdującym się poza oddziaływaniem zewnętrznym obowiązuje zależność

$$l = \chi y \quad (210)$$

gdzie χ - stała uniwersalna Prandtla-Kármána.

Kármán na podstawie hipotezy podobieństwa pulsacji prędkości we wszystkich punktach strumienia burzliwego zaproponował inną postać równania.

$$l = -\chi_1 \frac{d\bar{w}_x/dy}{d^2\bar{w}_x/dy^2} \quad (211)$$

Wzory (210) oraz (211) potwierdzone są doświadczalnie dla przepływów burzliwych w pobliżu ścianki. Natomiast w rdzeniu wyniki obliczone i pomierzone różnią się znacznie.

Wprowadzając wielkości τ_u oraz τ_b wyrażone wzorami (205) i (209) do wzoru (206) otrzymamy

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right) - \rho l^2 \left| \frac{d\bar{w}_x}{dy} \right| \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right) \quad (212)$$

Zgodnie ze wzorem (209) w pobliżu ścianki $\tau_u \gg \tau_b$ i naprężenie styczne w podwarstwie przyściennej określa relacja

$$\tau = (\tau)_{y=0} = \tau_u = \mu \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right) \Big|_{y=0} \quad (213)$$

Naprężenie burzliwe znika ($\tau_b = 0$), ponieważ znikają pulsacje prędkości

$$\mu_b = - \frac{\rho \overline{w'_x w'_y}}{\frac{d\bar{w}_x}{dy}} = 0 \quad (214)$$

gdzie μ_b - dynamiczny współczynnik lepkości burzliwej.

W obszarach oddalonych od ścianki wobec dużej intensywności przemieszczania $\tau_b \gg \tau_u$ i rozpoczynając od pewnej odległości od ścianki w obszarze burzliwym, naprężenie tarcia wyznacza się ze wzoru

$$\tau_{xy} = \tau_b = \left| \mu_b \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right) \right| \quad (215)$$

W pewnej odległości od ścianki istnieje obszar, dla którego naprężenia τ_u oraz τ_b są tego samego rzędu. Obszar ten nazwano warstwą buforową.

Strumień przepływający wzdłuż ścianki można rozbić na obszar przepływu bursliwego, warstwę buforową oraz podwarstwę przyścienną.

Ogólne zależności wiążące $\bar{S}^b$ oraz $\bar{q}_v^b$ z tensorem prędkości deformacji $\bar{T}$ mają postacie

$$\bar{S}^b = 2\beta \eta^2 \sqrt{2\text{tr} \bar{T}^2} \cdot \bar{T}^3 \quad (216)$$

$$\bar{q}_v^b = -\gamma \epsilon c_v l^2 \sqrt{2\text{tr} \bar{T}^2} \cdot \text{grad} \bar{T} \quad (217)$$

gdzie β, γ - stałe.

Wzory (216) oraz (217) stanowią tensorowe postacie teorii drogi zmieszania Prandtla. Wzory te znacznie się upraszczają dla ruchu płaskiego. Przykładowo wzór (216) przyjmie postać

$$\bar{\tau}_{xy} = 2l^2 \left| \frac{d\bar{w}_y}{dy} \right| \cdot \left| \frac{\bar{\epsilon}_x}{\bar{\epsilon}_z} \frac{\bar{\theta}_z}{\bar{\epsilon}_y} \right| \quad (218)$$

W wyniku uśrednienia równania zachowania energii (199) w przepływie burzliwym pojawia się dodatkowy uśredniony strumień energii cieplnej $\bar{q}_v^b$ i dla zamknięcia układu równań (190, 192, 197, 199) konieczne jest wprowadzenie dodatkowych zależności opisujących więź pomiędzy $\bar{q}_v^b$ i uśrednioną temperaturą $\bar{T}$. Dla przepływu uwarstwionego znika $\bar{q}_v^b$ i strumień energii cieplnej przez powierzchnię płynną oblicza się z równania Fouriera /przy $\lambda = \text{const}/$

$$\bar{q}_v = -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \quad (219)$$

gdzie: λ - współczynnik przewodnictwa cieplnego,
 $\frac{\partial \bar{T}}{\partial n}$ - gradient temperatury.

Na podstawie analogii do wzoru (219), strumień $\bar{q}_v^b$ dla przepływu bursliwego oblicza się z zależności

$$\bar{q}_v^b = -\lambda^b \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} = -\lambda^b \cdot \text{grad} \bar{T} \quad (220)$$

gdzie λ^b - współczynnik bursliwej przewodności ciepła.

Współczynnik λ^b nie jest cechą fizyczną płynu, lecz zależy od współrzędnych, kierunku i charakteru ruchu bursliwego płynu. Proponowane są różne wzory do obliczenia składników strumienia $\bar{q}_v^b$. Prandtl i Taylor na podstawie podobieństwa procesów przenoszenia pędu i energii zapro-

ponowali zależności analogiczne do wzoru (209)

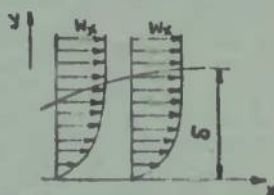
$$\bar{q}_y^b = -\vartheta c_v l^2 \left| \frac{d\bar{w}_x}{dy} \right| \left(\frac{d\bar{T}}{dy} \right) = -\lambda^b \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (221)$$

Wprowadzając do wzoru (221) zamiast 1 wyrażenie (211) Kármán otrzymał zależność

$$\bar{q}_y^b = -\vartheta c_v \chi^2 \left| \frac{(d\bar{w}_x/dy)^3}{(d^2\bar{w}_x/dy^2)^3} \right| \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (222)$$

1.2.17. Warstwa przyścienna

Obszar znajdujący się w bezpośrednim sąsiedztwie ścianki nazywano warstwą przyścienną. Siły lepkości są w tym obszarze co najmniej tego samego rzędu co siły masowe. W obszarze poza warstwą graniczną gradient prędkości, a więc i siły tarcia są małe. Przepływ jest swobodny i nielepki. Ścianka przeciwdziała przemieszaniu się płynu i obszar znajdujący się w pobliżu ścianki charakteryzuje się przepływem uwarstwionym. Do obszaru tego



Rys. 36. Warstwa przyścienna

przenikają pulsacje, jednak są one statystycznie niezależne, a więc naprężenie styczne nie powstają. Główną część warstwy przyściennej stanowi jądro burzliwe. Prędkość wzdłuż warstwy przyściennej wzrasta w miarę oddalenia się od ścianki i asymptotycznie zbliża się do prędkości $\bar{w}_\infty$ /prędkość przepływu swobodnego/. Odległość od ścianki do punktu warstwy przyściennej o prędkości zbliżonej do prędkości $\bar{w}_\infty$ nazywano grubością warstwy przyściennej. Ze wzrostem prędkości grubość warstwy przyściennej maleje.

1.2.18. Równanie Prandtla

Ze względu na małą grubość warstwy przyściennej w porównaniu z wymiarami ścianki lub ciała stałego znajdującego się w płynie można uprościć równanie różniczkowe ruchu płynu i wymiany ciepła w tym obszarze. W przypadku przepływu osiowoosymetrycznego i przy założeniu, że $F = 0$ oraz parametry fizykochemiczne μ, c_p, λ są stałe, po pominięciu pewnych składników, układ równań uprości się do postaci

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \varphi w_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi w_y}{\partial y} = 0 \quad (223)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) \quad (224a)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) \quad (224b)$$

$$c_v \varphi \left(\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + w_x \frac{\partial p}{\partial x} + w_y \frac{\partial p}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2 \quad (225)$$

W warstwie przyściennej zachodzi zmienność parametrów

$$y = 0 + \delta \quad (226a)$$

$$x = 0 + l \quad (226b)$$

$$w_x = 0(w_{x_0}) + w_s(x, t); w_y = 0(w_{y_0}) + w_y|_{y=\delta} \quad (226c)$$

$$y = \infty; w_s = w_\infty(x, t) \quad (226d)$$

$$T = T_0 + T_{\delta_4} \quad (226e)$$

$$y = \infty; T_{\delta_4} = T_\infty(x, t) \quad (226f)$$

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0; \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} \neq 0; \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y \rightarrow \infty} = 0; \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \neq 0 \quad (226g)$$

gdzie: δ - grubość hydrodynamiczna warstwy przyściennej,
 δ_4 - grubość cieplna warstwy przyściennej.

Jeżeli współczynnik lepkości kinematycznej równy jest współczynnikowi przewodności temperaturowej ($\nu = a$), to profile pola prędkości i temperatury pokrywają się.

Rząd wielkości poszczególnych składników w układzie równań (223+225) jest różny. Ocenę rzędu wielkości składników można dokonać w sposób pokazany dla dwu składników:

$$\text{- składnik A, } \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} = f(w_\infty/l^2),$$

$$\text{- składnik B, } \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = f(w_\infty/\delta^2).$$

Ponieważ wielkość δ jest bardzo mała, to w drugim równaniu układu równań (224) dla warstwy przyściennej składnika A można nie brać pod uwagę. Podobne postępowania wykonane dla wszystkich składników upraszcza równania (223+225). Otrzymany układ równań słuszny dla warstwy przyściennej

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi w_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi w_y}{\partial y} = 0 \quad (227)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \quad (228)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (228a)$$

$$c_v \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + w_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 \quad (229)$$

Równanie (229) jest inną postacią równania zachowania energii całkowitej dla płaskiej warstwy przyściennej przy $(c_v, \mu, \lambda) = \text{const}$

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (c_v T + 0.5 w_x^2) + w_x \frac{\partial}{\partial x} (c_v T + 0.5 w_x^2) + w_y \frac{\partial}{\partial y} (c_v T + 0.5 w_x^2) \right\} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu w_x \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \quad (230)$$

Z równania (228a) wynika, że w warstwie przyściennej ciśnienie jest stałe wzdłuż normalnej do ścianki i jest równe wartości ciśnienia przepływu nielepkiego na granicy warstwy. W przypadku ruchu ustalonego i cieczy nieściśliwej równanie (228) daje się dodatkowo uprościć. Jeżeli z równania (227) wyznaczmy składową w_y

$$w_y = - \int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \quad (231)$$

a z równania (230) dla przepływu na zewnątrz warstwy granicznej wyznaczmy składową gradientu ciśnienia $\left(\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \vec{r} = 0, (x, y, z = x, y) \right)$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = w_\infty \frac{dw_\infty}{dx} \quad (232)$$

i podstawimy do równania (228) zamiast odpowiednich składników, to otrzymamy wzór

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} - \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) \frac{\partial w_x}{\partial y} = w_\infty \frac{dw_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \quad (233)$$

nazywany równaniem Prandtla dla warstwy granicznej. Równanie to wyraża w postaci matematycznej równowagę sił bezwładności, ciśnienia i sił tarcia wewnętrznych w warstwie granicznej.

W obliczeniach przybliżonych można pominąć siłę najmniej istotną. Ciśnienie jest siłą wewnętrzną, równoważącą pozostałe siły i w obliczeniach nie powinna być pominięta. Jeżeli nie uwzględnimy w równaniu (233) sił tarcia wewnętrznych, to otrzymamy równanie ruchu cieczy doskonałej. Pomijając siłę bezwładności otrzymamy równanie ruchu cieczy o dużej lepkości.

W zagadnieniach praktycznych może zaistnieć przypadek, że powierzchnia ciała stałego stykająca się z warstwą graniczną jest przepusz-

czalna/porowata/. Wówczas pojawia się składowa normalna prędkości cieczy na powierzchni ciała stałego określona warunkami granicznymi

$$w_y = \pm w_0(x, t) \text{ przy } y=0 \quad (234)$$

gdzie: $+w_0(x, t)$ - prędkość dopływu cieczy do warstwy granicznej przez porowatą powierzchnię,

$-w_0(x, t)$ - prędkość odpływu cieczy z warstwy granicznej przez porowatą powierzchnię.

Wobec warunku (234), dla $w_0(x, t)$ równanie (233) przyjmie postać

$$-w_0 \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} \quad (235)$$

Warunek (235) wiąże ze sobą drugie pochodne prędkości cieczy na powierzchni ciała stałego, gradient ciśnienia na zewnątrz granicy warstwy przyściennnej oraz prędkość odpływu cieczy.

Jeżeli zróżniczkujemy równanie (235) po y oraz skorzystamy z równania ciągłości dla $\varphi = \text{const.}$, to otrzymamy inny warunek

$$-w_0 \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \nu \left(\frac{\partial^3 w_x}{\partial y^3} \right)_{y=0} \quad (236)$$

wiążący ze sobą drugą i trzecią pochodną prędkości cieczy oraz prędkość $w_0(x)$.

Jeżeli uwzględnimy we wzorze (227) wielkość w_0 , to

$$w_y = -w_0 - \int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \quad (237)$$

i równanie (233) można zapisać w innej postaci, wygodnej do przybliżonych obliczeń charakterystyk warstwy granicznej

$$\frac{\partial}{\partial x} [w_x(w_\infty - w_x)] + \frac{\partial}{\partial y} [w_y(w_\infty - w_x)] = -\frac{dw_\infty}{dx} (w_\infty - w_x) + \nu \frac{\partial^2 (w_\infty - w_x)}{\partial y^2} \quad (238)$$

Dla ruchu nieustalonego cieczy nieściśliwej w układzie współrzędnych nieruchomo związanych z poruszającym się ciałem stałym równanie typu (238) przyjmie postać

$$\frac{\partial}{\partial t} (w_\infty - w_x) + \frac{\partial}{\partial x} [w_x(w_\infty - w_x)] + \frac{\partial}{\partial y} [w_y(w_\infty - w_x)] + \frac{\partial w_\infty}{\partial x} (w_\infty - w_x) - \nu \frac{\partial^2 (w_\infty - w_x)}{\partial y^2} = 0 \quad (239)$$

Warunki graniczne dla powierzchni porowatej są następujące:

$$w_x = 0; \quad w_y = -w_0 \quad \text{przy } y=0;$$

$$w_x = w_\infty(x, t) \quad \text{przy } y \rightarrow \infty;$$

$$w_x = w_\infty(x, y) \quad \text{przy } t=0$$

1.2.29. Równania całkowe warstwy przyściennej

Jeżeli w obliczeniach technicznych nie wymaga się wyznaczenia rozkładu parametru w przekroju lub objętości aparatu, to całkowe jest uśrednienie pola parametru. Traci się jednak wówczas wiele informacji i dlatego konieczne są dodatkowe zależności empiryczne.

Stosując do układu równań (227+229) uśrednienie po powierzchni otrzymamy równanie całkowe przybliżonej teorii warstwy przyściennej.

Jeżeli założymy, że parametry fizykochemiczne są stałe, to równanie (228) dla ruchu ustalonego przyjmie postać

$$\int_0^{\delta} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} dy = -\frac{1}{\rho} \int_0^{\delta} \frac{\partial p}{\partial x} dy + \nu \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} dy \quad (240)$$

Równanie to można przekształcić do innej postaci

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} w_x w_x dy - \int_0^{\delta} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta} w_x w_y dy - \int_0^{\delta} w_x \frac{\partial w_y}{\partial y} dy = -\frac{1}{\rho} \int_0^{\delta} \frac{\partial p}{\partial x} dy + \nu \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} dy \quad (241)$$

W równaniu (241) łatwo można wyeliminować nieznaną składową prędkości w_y . Przez scałkowanie równania ciągłości i pomnożenie przez $(w_x)_{y=0} = w_{\delta}$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta} w_x w_y dy = (w_x w_y)_{y=\delta} = - \int_0^{\delta} w_{\delta} \frac{\partial w_x}{\partial x} dy = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} w_{\delta} w_x dy + \frac{\partial w_{\delta}}{\partial x} \int_0^{\delta} w_x dy \quad (242)$$

Jeżeli scałkujemy równanie Bernoulliego dla zewnętrznej warstwy granicznej

$$-\frac{1}{\rho} \int_0^{\delta} \frac{\partial p}{\partial x} dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \delta = \frac{\partial w_{\delta}}{\partial x} \int_0^{\delta} w_{\delta} dy \quad (243)$$

i wprowadzimy otrzymaną zależność oraz zależność (242) do równania (241), także na podstawie równania (227) zamienimy pochodną $\frac{\partial w_y}{\partial y}$ na $-\frac{\partial w_x}{\partial x}$ i dokonamy uproszczeń, to równanie (241) przyjmie postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} w_x w_x dy - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} w_{\delta} w_x dy + \frac{\partial w_{\delta}}{\partial x} \int_0^{\delta} w_x dy = \int_0^{\delta} \frac{\partial w_{\delta}}{\partial x} w_{\delta} dy - \nu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (244)$$

Równanie to nazywane jest wzorem całkowym Kármána dla cieczy nieściśliwej. Wadą równania (244) jest obecność δ określonego warunkowo.

Podobną operację całkowania można przeprowadzić dla równania (229). W przypadku podobnych założeń /parametry fizykochemiczne są stałe, ruch ustalony/ całka równania zachowania energii (229) przyjmie postać

$$\rho c_p \left[\int_0^{\delta} w_x \frac{\partial T}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} w_y \frac{\partial T}{\partial y} dy \right] - \int_0^{\delta} w_x \frac{\partial p}{\partial x} dy = \lambda \int_0^{\delta} \frac{\partial T}{\partial y} dy + \mu \int_0^{\delta} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 dy \quad (245)$$

Całkując przez części wyrazy ujęte w nawiasach kwadratowych oraz biorąc pod uwagę relację (231) otrzymamy

$$\int_0^{\delta_t} w_y \frac{\partial T}{\partial x} dy + \int_0^{\delta_t} w_y \frac{\partial T}{\partial y} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_t} w_x T dy - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_t} T_{\delta_t} w_x dy \quad (246)$$

Wprowadzając powyższą zależność do wzoru (245) oraz wykonując odpowiednie przekształcenie otrzymamy równanie całkowe

$$\rho c_v \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_t} w_x T dy - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta_t} T_{\delta_t} w_x dy + \frac{\partial T_{\delta_t}}{\partial x} \int_0^{\delta_t} w_x dy + \int_0^{\delta_t} \rho w_x w_{\delta_t} \frac{\partial w_{\delta_t}}{\partial x} dy \right] = - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} - \left[\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 \right]_{y=0} \quad (247)$$

W celu opisanego przeniesienia pędu i energii w warstwie granicznej należy łącznie rozwiązać równanie (244) oraz równanie (247).

Jeżeli scałkujemy równanie typu (238), to otrzymamy

$$\int_0^{\delta_\infty} \rho \frac{\partial}{\partial x} w_x (w_\infty - w_x) dy + \int_0^{\delta_\infty} \rho \frac{\partial}{\partial y} [w_x (w_\infty - w_x)] dy = - \int_0^{\delta_\infty} \rho \frac{dw_\infty}{dx} (w_\infty - w_x) dy + \mu \int_0^{\delta_\infty} \frac{\partial^2 (w_\infty - w_x)}{\partial y^2} dy \quad (248)$$

gdzie $w|_{y=0} = w_0$ i $w|_{y>\delta} = w_\infty$.

Uwzględniając wzór (231) oraz warunek (234) otrzymamy inną postać tego równania

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_\infty} \rho w_x (w_\infty - w_x) dy - \int_0^{\delta_\infty} \rho \frac{\partial}{\partial y} \left[w_0 + \int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right] (w_\infty - w_x) dy + \frac{dw_\infty}{dx} \int_0^{\delta_\infty} \rho (w_\infty - w_x) dy = \tau_0 \quad (249)$$

gdzie $\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0}$

Jeżeli do wzoru (249) wprowadzimy oznaczenia

$$\int_0^{\delta_\infty} \frac{w_x}{w_\infty} \left(1 - \frac{w_x}{w_\infty} \right) dy = \delta_{xx} \quad (250)$$

$$\int_0^{\delta_\infty} \left(1 - \frac{w_x}{w_\infty} \right) dy = \delta_x \quad (251)$$

to otrzymamy inną postać wzoru całkowego Kármána

$$\frac{d}{dx} (\rho w_\infty^2 \delta_{xx}) + \frac{dw_\infty}{dx} (\rho w_\infty \delta_x) + \rho w_0 w_\infty = \tau_0 \quad (252)$$

Wykonując operację różniczkowania i dzieląc wszystkie wyrazy przez ρw_∞^2 otrzymamy równanie zachowania pędu w postaci bezwymiarowej dla płaskiej warstwy granicznej

$$\frac{d}{dx} \delta_{xx} + \frac{dw_\infty}{dx} \delta_{xx} (2 + H) + \frac{w_0}{w_\infty} = \frac{\tau_0}{\rho w_\infty^2} \quad (253)$$

gdzie: δ_{xx} - miara liniowa straty pędu w warstwie,

Równanie to dla cieczy doskonałej, nieściśliwej oraz ruchu bezwrotnego i potencjalnych sił masowych upraszcza się do postaci

$$\bar{\Gamma} = -\text{grad} \left(0,5 \bar{w}^2 + \frac{P}{\rho} + \psi \right) \quad (259)$$

Jeżeli założymy, że siły masowe są siłami grawitacyjnymi, a nie ustalony wirowy ruch cieczy nieściśliwej nie jest zakłócany obecnością ciała stałego, to równanie (109) przyjmie postać

$$-\text{grad } \bar{\Psi} + \nu \Delta \bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{\Omega} \times \bar{w} \quad (260)$$

gdzie $\bar{\Psi} = 0,5 \bar{w}^2 + \frac{P}{\rho} + gz$

W przypadku cieczy doskonałej barotropnej oraz ruchu bezwrotnego równanie (260) przyjmie postać całki /równania/ Lagrangea

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + 0,5 \bar{w}^2 + \int \frac{dP}{\rho} + \psi' = c(t) \quad (261)$$

gdzie $c(t)$ - funkcja jednostkowa dla dowolnego punktu przepływu potencjalnego.

Szczególnym przypadkiem równania (261) jest równanie Eulera, dla którego $c(t) = \text{const}$

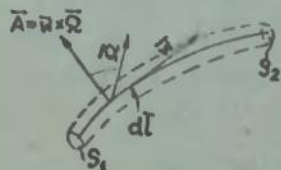
$$0,5 \bar{w}^2 + \int \frac{dP}{\rho} + \psi' = \text{const} \quad (262)$$

W przypadku cieczy doskonałej o stałej gęstości energię potencjalną ciążenia przypadającą na jednostkę masy określa wyrażenie $\frac{v^2}{2}$.

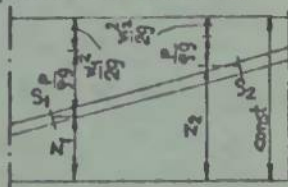
Równanie (260) jest słuszne dla rurki prądu oraz dla irrotacyjnego modelu przepływu płynu. mnożąc skalarowo poszczególne wyrazy tego równania przez element $d\bar{l}$ otrzymamy zależność

$$-d\bar{\Psi} + \nu \Delta \bar{w} d\bar{l} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} d\bar{l} \quad (263)$$

Z równania (263) element łuku $d\bar{l}$ wybrano dla ustalonego momentu, co pozwoliło zastąpić iloczyn skalarowy $\text{grad } \bar{\Psi} \cdot d\bar{l}$ różniczką $d\bar{\Psi}$ wzdłuż kierunku $d\bar{l}$. Wyrażenie $(\bar{\Omega} \times \bar{w}) \cdot d\bar{l}$ znika, gdy wektor



Rys. 38. Równanie Bernoulliego dla cieczy lepkiej



Rys. 39. Interpretacja geometryczna równania (264)

$d\vec{l}$ ma kierunek linii prądu lub linii wirowej. Jeżeli dodatkowo założymy, że ciecz jest doskonała i barotropna, a ruch jest ustalony, to równanie (263) po scałkowaniu przyjme postać równania Bernoulliego

$$0,5\bar{w}^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \psi' = C \quad (264)$$

Stała C tego równania zmienia się wraz ze zmianą linii prądu lub linii wirowej.

Całkując równanie (263) wzdłuż linii prądu od l_1 do l_2 dla danego momentu czasu t , otrzymamy wyrażenie

$$\psi_1 - \psi_2 + \nu \int_{l_1}^{l_2} \Delta \bar{w} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} d\vec{l} \quad (265)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$-\frac{1}{g} \nu \int_{l_1}^{l_2} \Delta \bar{w} \cdot d\vec{l} = h_s; \quad \frac{1}{g} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} d\vec{l} = h_i$$

gdzie: h_s - wysokość równoważna energii mechanicznej, którą oddaje lub pobiera jednostka masy w jednostce czasu,

h_i - wysokość równoważna pracy sił bezwładności warunkowana istnieniem idealnego przyspieszenia,

do równania (265) otrzymamy

$$\text{dif} \left(0,5 \frac{\bar{w}^2}{g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) = h_s + h_i \quad (266)$$

Wielkość h_s określa straty energii mechanicznej w wyniku nieodwrotnego procesu zamiany w ciepło. W procesie izentropowym energia ta jest równa ciepłu odprowadzonemu przez powierzchnię otaczającą obszar na drodze przewodnictwa cieplnego. Wielkość h_i wyraża odwracalny proces przemiany energii w nieustalonym przepływie cieczy i jest dodatnia dla przepływów przyspieszonych, a ujemna dla przepływów hamowanych ($\partial \bar{w} / \partial t < 0$). Dla ustalonego ruchu cieczy równanie (266) przyjme postać równania Bernoulliego i nazywane jest podstawowym równaniem hydromechaniki cieczy rzeczywistej

$$\text{dif} \left(0,5 \frac{\bar{w}^2}{g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) = h_s \quad (267)$$

Przepływ ustalony cieczy można rozpatrywać jako zbiór elementarnych rurek prądu. Możemy składować równanie (266) przez kasowe natężenie przepływu (4d) oraz przez przyspieszenie i całkując na cały przekrój strumienia otrzymamy

$$\int_S \text{dif} \left(0,5 \frac{\bar{w}^2}{g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) \rho g \bar{w} d\vec{S} = \int_S h_s \rho g \bar{w} d\vec{S} + \int_S h_i \rho g \bar{w} d\vec{S} \quad (268)$$

Zależność tę można przedstawić w innej postaci

$$\text{dif} \left(\frac{1}{2g} G \int_S \bar{w}^3 dS + \frac{P}{\rho g} + z \right) = \frac{1}{\rho g} \left[\int_S h_s g \bar{w} dS + \int_S h_i g \bar{w} dS \right] \quad (269)$$

Całka lewej części tego równania oznacza strumień energii kinetycznej przy nierównomiernym rozkładzie prędkości w przekroju S_p . Wprowadzając pojęcie średniej prędkości strumienia (47), rzeczywiście strumień energii kinetycznej można zastąpić strumieniem uśrednionym. Otrzymamy ostateczną postać równania Bernoulliego dla cieczy lepkiej i nieściśliwej oraz przepływu nieustalonego o skończonych wymiarach objętości przepływu

$$\text{dif} \left(\alpha \frac{w_{\text{sr}}^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z \right) = H_s - H_i \quad (270)$$

gdzie: $\alpha = \frac{\int_S \bar{w}^3 dS}{w_{\text{sr}}^3 S}$ - współczynnik energii kinetycznej /współczynnik Cariolisa/

$$H_s = \frac{1}{\rho g} \int_S h_s g \bar{w} dS \quad (271)$$

$$H_i = \frac{1}{\rho g} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{\bar{w}^2}{2} dS = \frac{1}{\rho g} \frac{dG}{dt} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\alpha_0}{S} dt \quad (272)$$

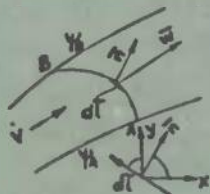
α_0 - współczynnik pędu [$\alpha_0 \neq f(t)$],

w_{sr} - średnia prędkość przepływu cieczy.

1.2.21. Potencjał sespolony

Rozpatrując równanie linii prądu (4) oraz równanie ciągłości (42) dochodzimy do wniosku, że równanie linii prądu można zapisać w postaci

$$d\psi = -w_y dx + w_x dy \quad (273)$$



Rys. 40. Strumień objętości cieczy

gdzie: $w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$; $-w_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$,

ψ - potencjał prądu,

ψ - potencjał prędkości.

Z równania (273) wynika, że potencjał prądu /funkcja prądu/ jest stały wzdłuż każdej linii prądu. Wobec wzoru (273) strumień objętości cieczy (46) oblicza się ze

wzoru /dla ruchu płaskiego/

$$\dot{\gamma} = \int_{l_1}^{l_2} \vec{w} \vec{n} dS = \int_{l_1}^{l_2} -w_y dx + w_x dy = \int_{l_1}^{l_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (274)$$

gdzie l - dowolna linia łącząca punkty na liniach prądu $l(\psi)$.

W ruchu bezwrotnym potencjał prądu spełnia równanie Laplace'a

$$\Delta\psi = 0 \quad (275)$$

a związek pomiędzy składnikami potencjału ψ i potencjału prędkości φ ujęto równaniem Cauchyego-Riemanna

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad (276)$$



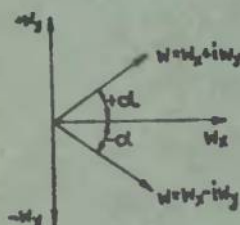
Rys. 41. Siatka hydrodynamiczna

Z równania (276) wynika, że każda krzywa rodziny $\psi = \text{const.}$ przecina się pod kątem prostym z dowolną krzywą rodziny $\varphi = \text{const.}$ Zgodnie z teorią funkcji zespolonej potencjały φ oraz ψ tworzą liczbę zespoloną

$$W(z) = \varphi(z) + i\psi(z) \quad (277)$$

nazwaną potencjałem zespolonym. Różniczkując potencjał $W(z)$ względem zmiennej niezależnej z otrzymamy

$$\frac{dW(z)}{dz} = w_x - iw_y \quad (278)$$



Rys. 42. Prędkość przepływu i prędkość zespolona

Pochodną tę nazwano prędkością zespoloną, a sprzężoną z nią liczbę zespoloną

$$W = w_x + iw_y \quad (279)$$

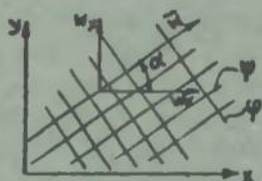
nazwano prędkością przepływu.

Funkcje $\varphi(z)$ oraz $\psi(z)$ są sprzężone i dla każdego przepływu, określonego potencjałem zespolonym, można utworzyć przepływ sprzężony

$$W_s(z) = -iW(z) = \frac{W(z)}{i} \quad (280)$$

Zgodnie ze wzorem (277) i dotychczasowymi stwierdzeniami możemy dojść do fizycznej interpretacji liczby zespolonej i funkcji zespolonej. Każda liczba zespolona $z=x+iy$ reprezentuje punkt na płaszczyźnie przepływu (Oxy), a każda funkcja zespolona $W(z)$ reprezentuje dowolny przepływ płaski. Powyższe stwierdzenia odnoszą się również do przepływów przestrzennych. Łatwo również możemy dojść do wniosku, że nałożeniu przepływów odpowiada superpozycja odpowiednich potencjałów. Badanie przepływu otrzymanego w wyniku superpozycji, a szczególnie określenie jego linii prądu przeprowadza się analitycznie lub graficznie. W pierwszym przypadku badamy potencjał zespolony, a w drugim - obraz graficzny /widmo hydrodynamiczne/. Dowolną powierzchnię prądu, a w przepływie płaskim - linię prądu, możemy zawsze traktować jako ściankę materialną o identycznym kształcie $[(\vec{w} \cdot \vec{n}) = 0]$.

Jeżeli w przepływie płaskim pojawia się zamknięta linia prądu, to



Rys. 43. Prąd jednorodny pod kątem do osi x

mamy prawo traktować przepływ na zewnątrz niej jako opływ materialnej figury płaskiej /profilu/ ograniczonej tą linią. Kształtowanie zamkniętej linii $\sum \psi_i = 0$ odbywa się przez superpozycję szeregu potencjałów zespolonych.

Potencjał zespolony $W(z) = u + iv$ określa przepływ jednorodny/prąd jednorodny/ z prędkością $w_x = u_x = w_\infty$.

Jeżeli o jest liczbą zespoloną, to potencjał zespolony $W(z) = (w_x + iw_y)z$ reprezentuje prąd jednorodny pod kątem do osi x .

Potencjał zespolony $W(z) = \frac{i\gamma}{2\pi} \ln(z)$ określa źródło $+\dot{V}$ lub upust $-\dot{V}$. Linie proste przechodzące przez środek współrzędnych określają potencjał prądu $\psi = \frac{\gamma}{2\pi} \theta = \text{const}$, a współśrodkowe okręgi są obrazem graficznym stałego potencjału prędkości o równaniu $\varphi = \frac{\gamma}{2\pi} \ln r = \text{const}$. Jeżeli w punktach płaszczyzny przepływu z_k znajdują się źródła lub upusty o strumieniu objętości $+\dot{V}$ lub $-\dot{V}$, Rys. 44. Źródło płaskie to zgodnie z zasadą superpozycji potencjał zespolony ma postać



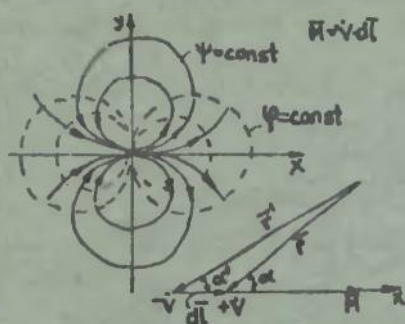
Rys. 44. Źródło płaskie

$$W(z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^n \dot{V}_k (z - z_k) \quad (281)$$

W przypadku ciągłego rozkładu punktów osobliwych odosobnionych/źródło lub upust/wzdłuż prostej $(-1, 1)$ potencjał zespolony ma postać

$$W(z) = \frac{i}{4\pi} \int_{-1}^1 \dot{V} \ln(z - f) df \quad (282)$$

Potencjał zespolony $W(z) = -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{M}{z}$ określa przepływ nazywany dipolem. Układ taki możemy otrzymać jako wynik superpozycji źródła i upustu o mocach $+\dot{V}$ oraz $-\dot{V}$ umieszczonych w odległości $d\vec{l} \rightarrow 0$. Iloczyn $\dot{V} \cdot d\vec{l} = \vec{M}$ nazywany momentem dipola. Obraz graficzny przepływu przedstawionego dipolem stanowią okręgi stałego potencjału prądu $\psi = \text{const}$ rozmieszczone wzdłuż osi y i stykające się ze sobą i podobnymi okręgami $\psi = \text{const}$ rozmieszczonymi wzdłuż osi x . Wspólnym punktem zetknięcia jest początek układu współrzędnych. Jeżeli na płaszczyźnie Oxy w punktach z_k umieszczone są dipole o



Rys. 45. Dipol

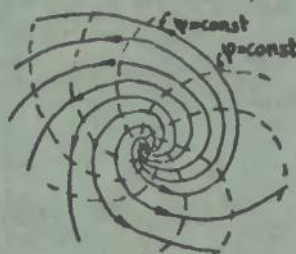
momentach M_k i tworzą z osią rzeczywistą Ox kąty α_k , to zgodnie z zasadą superpozycji potencjał zespolony ma postać

$$W(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{M_k \cdot e^{i\alpha_k}}{z - z_k} \quad (283)$$

Potencjał zespolony $W(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$ reprezentuje wir punktowy. Podczas takiego ruchu ciecz we wszystkich punktach płaszczyzny przepływu jest bezwirowa, są wyjątkiem punktu $x=0, y=0$, gdzie prędkość jest



Rys. 46. Wir punktowy/strumień cyrkulujący/



Rys. 47. Źródło wiru

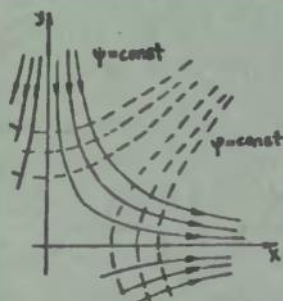
nieskończenie duża. Przyrost potencjału o kąt 2π jest cyrkulacją Γ przepływu. Jeżeli w płaszczyźnie Oxy są izolowane wiry, to zgodnie z zasadą superpozycji powstały przepływ określony jest potencjałem

$$W(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \ln(z - z_k) \quad (284)$$

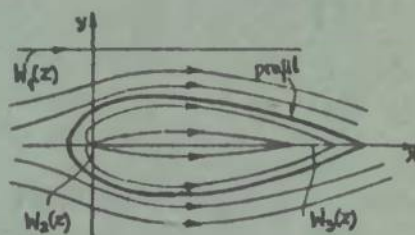
gdzie: z_k - punkty wirowe,

Γ_k - intensywność wiru punktowego.

Potencjał zespolony $W(z) = \frac{V-i\Gamma}{2\pi} \ln z$ reprezentuje źródło wiru. Jest to superpozycja źródła i wiru punktowego. Linie $\psi = \text{const}$ i $\varphi = \text{const}$ są spiralami logarytmicznymi nawijającymi się na początek współrzędnych,



Rys. 48. Przepływ w narożu



Ryz. 49. Profil

w przypadku $\psi = \text{const}$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a w przypadku $\varphi = \text{const}$ w kierunku przeciwnym. Również i w tym przypadku obowiązuje zasada superpozycji.

Potencjał zespolony $W(z) = az^2$ reprezentuje przepływ w narożu. Superpozycja potencjałów zespolonych $W_1(z) = w_\infty z$ oraz $W_2(z) = \frac{V}{2\pi} \ln z$ reprezentuje opływ ciała stałego. Jeżeli dodatkowo dołączymy potencjał zespolony $W_3(z) = \frac{V}{4\pi} \int_1^z \ln(z-\xi) d\xi$, to superpozycja daje linię zamkniętą - profil. Superpozycja potencjałów zespolonych $W_1(z) = w_\infty z$, $W_2(z) = \frac{V}{2\pi} \ln z$ oraz $W_3(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ przy założeniu, że środek wiru i dipola znajdują się w początku układu odniesienia, daje potencjał zespolony nazywany potencjałem Żukowskiego i reprezentuje oyrkulacyjny opływ koła. Na profilu koła mogą występować jedynie składowe styczne prędkości.

1.2.22. Podstawowe twierdzenia mechaniki cieczy

1.2.22.1. Działania sił chwilowych

Równanie ruchu cieczy doskonałej znajdującej się w polu działania statycznych i dynamicznych sił masowych i powierzchniowych ma następującą postać

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}' - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{1}{\rho} \text{grad } p' \quad (285)$$

Czwilowe siły masowe $\vec{F}'$ oraz powierzchniowe p' o dużej wartości modułu działają przez krótki moment Δt . Całkując równanie (285) dla przedziału czasu od $t=0$ do $t=\Delta t$ i pomijając działanie sił stat.

nach otrzymany

$$\bar{w}' - \bar{w} = \int_0^t \bar{F}' dt - \int_0^t \frac{1}{\rho} \text{grad} p' dt = \bar{J} - \text{grad} \left(\frac{\bar{\pi}}{\rho} \right) \quad (286)$$

gdzie: $\bar{w}, \bar{w}'$ - prędkość cząstek po działaniu i przed działaniem sił $\bar{F}'$,

$\bar{J}$ - impuls sił masowych,

$\bar{\pi}$ - impuls sił powierzchniowych /impuls ciśnienia chwilowego/.

Z analizy równania (286) wynika szereg twierdzeń:

- jeżeli znajdzie impulsowa zmiana pola prędkości, to w każdym punkcie cieczy powstaną chwilowe ciśnienia,
- jeżeli ciecz do chwili działania sił impulsowych była w ruchu bezwrotnym, to pozostaje w ruchu bezwrotnym po działaniu tych sił,
- jeżeli do wszystkich cząstek /elementów/ cieczy przyłożymy jednakowe chwilowe ciśnienia, to nie znajdzie zmiany prędkości,
- żadnym doбором chwilowych sił ciśnienia nie można ani stworzyć, ani zniszczyć ruchu wrotnego.

1.2.22.2. Energia kinetyczna ruchu bezwrotnego

Energię kinetyczną cieczy poruszającej się z jednoznacznym potencjałem prędkości wyznacza się z zależności

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int_V \rho \bar{w}^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \rho (\text{grad} \psi)^2 dV = \frac{1}{2} \int_S \rho \psi \text{grad} \psi d\bar{S} - \frac{1}{2} \int_V \rho \psi \Delta \psi dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_S \rho \psi \text{grad} \psi d\bar{S} = \frac{1}{2} \int_S \rho \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\bar{S} = \frac{1}{2} \int_L \rho \psi d\psi \quad (287) \end{aligned}$$

gdzie $\bar{w}$ - prędkość ruchu potencjalnego.

Ze wzoru (287) wynika, że energia kinetyczna ruchu bezwrotnego zależy wyłącznie od ruchu na granicach objętości V . Jeżeli na granicach $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ lub $\psi = \text{const}$, to ciecz w objętości V znajduje się w bezruchu i $E_k = 0$. Energia kinetyczna cieczy nieściśliwej poruszającej się w objętości jednorodnej z potencjałem prędkości jest mniejsza od energii kinetycznej w każdym innym ruchu pod warunkiem, że na granicach objętości ciecz jest w ruchu jednakowym z bezwrotnym, natomiast wewnątrz są wiry. Warunek ten można zapisać w postaci

$$\text{grad} \psi \cdot \bar{n} = \bar{w}' \cdot \bar{n} \quad (288)$$

$\bar{w}'$ - prędkość ruchu różnego od potencjalnego.

Tworząc różnicę energii kinetycznej obu tych ruchów

$$E'_k - E_k = \frac{1}{2} \rho \int_V \bar{w}^2 dV - \frac{1}{2} \rho \int_V (\text{grad} \varphi)^2 dV = \rho \int_V \text{grad} \varphi (\bar{w} - \text{grad} \varphi) dV + \frac{1}{2} \rho \int_V (\bar{w} - \text{grad} \varphi)^2 dV \quad (289)$$

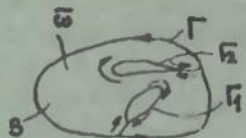
gdzie E'_k - energia kinetyczna ruchu różnego od potencjalnego, oraz bierąc pod uwagę zależność (288) dochodzimy do wniosku, że

$$E'_k - E_k = \frac{1}{2} \rho \int_V (\bar{w} - \text{grad} \varphi)^2 dV > 0 \quad (290)$$

Wzór (290) stanowi treść twierdzenia Thomsona.

1.2.2c.3. Własności dynamiczne wirów

Jeżeli w przestrzeni zajętej przepływającą cieczą istnieją punkty,



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + 2 \int_S \Omega_n ds$$

Rys. 50. Cyrkulacja w objętości trójspójnej

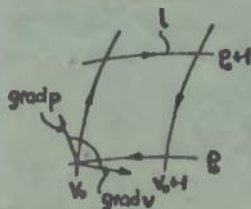
dla których $\bar{w} \neq 0$, to elementy cieczy w tych punktach znajdują się w ruchu wirowym. Powstaje wir o określonej cyrkulacji prędkości (15). Cyrkulacja wzdłuż linii zamkniętej równa jest sumie cyrkulacji dla odcinków tej linii. Zmiana kierunku obejścia linii zmienia znak cyrkulacji. Jeżeli ciecz jest nieściśniala, siły masowe są poten-

cjalne, a linia, wzdłuż której obliczamy cyrkulację jest zamknięta, to wprowadzając do pochodnej cyrkulacji przyśpieszenie wyznaczone z równania Eulera (75) otrzymamy równanie Bjerknessa

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_L \text{grad} \varphi' d\bar{l} - \oint_L \frac{1}{\rho} \text{grad} \rho d\bar{l} = - \oint_L \frac{1}{\rho} d\rho = - \oint_L v dp \quad (291)$$

gdzie $v = \frac{1}{\rho}$ - objętość właściwa.

Zgodnie z równaniem (291) przestrzeń przepływu można rozbić na szereg jednostkowych izobaroizosterycznych rurek. Dla każdej rurki



Rys. 51. Izobaroizosteryczna rurka jednostkowa



Rys. 52. Kontur $L = L' + L''$

grad $p = 1$ oraz grad $\Phi = 1$ i pochodna cyrkulacji równa jest jedności. Jeżeli linia zamknięta L obejmuje N' rurek dodatnich i N'' rurek ujemnych, to zgodnie z twierdzeniem Bjerknesa pochodna cyrkulacji wzdłuż takiej linii równa jest różnicy liczby dodatnich i ujemnych izobaroizosterycznych rurek jednostkowych przecinających obszar ograniczony linią L .

$$\frac{d\Gamma}{dt} = N' - N'' \quad (292)$$

gdzie: Γ - cyrkulacja,

N' - liczba jednostkowych rurek dodatnich,

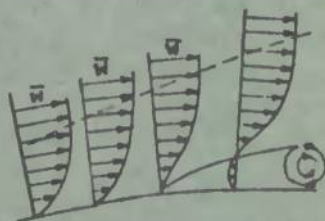
N'' - liczba jednostkowych rurek ujemnych.

Przecięcie się powierzchni izobarycznych i izosterycznych jest przyczyną powstawania wirów.

1.2.22.4. Twierdzenia dotyczące pól wirowych

Twierdzenia te sformułowano dla cieczy doskonałej barotropnej oraz potencjalnych sił masowych i dotyczą trwałości linii wirowych i wirowości w rurce wirowej. Jeżeli są spełnione powyższe założenia, to zgodnie z twierdzeniem Thomsona cyrkulacja prędkości wzdłuż zamkniętej linii L podczas ruchu cieczy pozostaje stała.

Jeżeli w obszarze płynnym ograniczonym linią L nie ma wirowości w danym momencie, to nigdy jej nie było w tym obszarze ani też nie może w nim się ona pojawić. Jest to twierdzenie Lagrange'a o ruchu potencjalnym.



Rys. 53. Oderwanie się warstwy przysciennej

Jeżeli elementy cieczy tworzą w pewnym momencie czasu linię wirową, to linia ta jest zachowana podczas całego dalszego ruchu, a intensywność dowolnej rurki wirowej podczas ruchu pozostaje stała. Są to twierdzenia Helmholtza o trwałości linii wirowych i natężenia wirowości w rurce wirowej. Zgodnie z powyższym twierdzeniem przyczyną powstania wirów i ich zaniku jest więc lepkość.

Wiry tworzą się głównie w pobliżu ścianek ciał stałych. Zanik wirów uwarunkowany jest dysypacją energii mechanicznej, a więc dowolna wirowość, która powstała wewnątrz cieczy ma tendencję do zaniku.

1.2.23. Ruch falowy cieczy. Energia fal

Na ściankach $w_n=0$ i linie prądu nie mogą wychodzić z granicy podziału ani też wchodzić, a więc linie muszą być zamknięte. Ciecz może być w spoczynku albo w ruchu wirowym. Jeżeli w objętości cieczy zawartej w naczyniu i ograniczonej powierzchnią swobodną powstaje ruch wirowy, to zachodzi zmiana kształtu powierzchni swobodnej i wytwarzają się fale. Ruch falowy charakteryzuje się drgającym ruchem cząstek cieczy. Jeżeli brak jest wirowości, to przyczyną powstania ruchu falowego mogą być siły masowe, siły kapilarne lub siły przyciągania księżyca i słońca. Ruch falowy cieczy wywołuje się zmianą powierzchni swobodnej lub przez nadanie różnym cząstkom cieczy różnych prędkości/działywanie sił chwilowych/.

Jeżeli ciecz doskonała nieściśliwa o stałej gęstości jest w powolnym ruchu bezwirowym, siły masowe są potencjalne, a oś z skierowana ku górze, to równanie Lagrange'a (261) uprości się do postaci

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz \quad (293)$$

Funkcja $c(t)$ występująca we wzorze (261) właściwa została do potencjału φ .

W wyniku wymuszenia ruch falowy odbywa się na powierzchni swobodnej, której równanie w momencie t ma postać

$$z = \zeta(x, y, t) \quad (294)$$

Przyjmując, że ciśnienie p we wzorze (293) jest nadwyżką ciśnienia nad ciśnieniem atmosferycznym p_0 na powierzchni swobodnej, dochodzimy do wniosku, że przy $z = \zeta(x, y, t)$ spełniony jest warunek

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} + g\zeta = 0 \right|_{z=\zeta(x, y, t)} \quad (295)$$

Wyznaczona z równania (295) wielkość ζ

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (296)$$

określa kształt powierzchni swobodnej, a więc rodzaj ruchu falowego. Różniczkując wielkość ζ po t otrzymamy równanie ruchu falowego

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t^2} \quad (297)$$

Równanie to można łatwo przekształcić do innej postaci

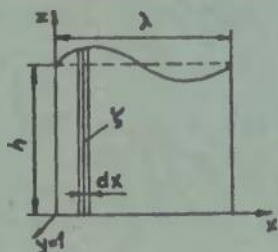
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (298)$$

W ruchu okresowym funkcja φ składa się z dwóch członów

$$\varphi(x, y, z, t) = \cos(\sigma t + \epsilon) \Phi^*(x, y, z) \quad (299)$$

Funkcja Φ^* spełnia warunek $\Delta \Phi^* = 0$ oraz $\frac{\partial \Phi^*}{\partial \eta} = 0$, a równanie przekształci się do postaci

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \Phi^* \quad (300)$$



Rys. 54. Energia fal

Z przedstawionych wzorów wynika, że prędkość i ciśnienie w każdym punkcie cieczy będącej w ruchu falowym zmienia się harmonicznie.

Cząsteczki cieczy w ruchu falowym przenoszą energię. Energia ta jest sumą energii kinetycznej ruchu cząstek i energii potencjalnej siły masowej.

Energię kinetyczną ruchu falowego elementów cieczy określa wyrażenie

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \int_S (\text{grad } \varphi)^2 dS = \frac{1}{2} \rho \int_L \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\bar{l} = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx \quad (301)$$

a energię potencjalną ruchu falowego elementów cieczy wyznaczają się z zależności

$$E_p = \rho \int_L \varphi \frac{\gamma}{2} g dx = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda \varphi^2 dx \quad (302)$$

1.2.24. Zjawiska nietypowe występujące podczas ruchu cieczy

1.2.24.1. Kawitacja

Kawitacją nazywamy zjawisko pojawiania się w cieczy obszarów wypełnionych parą lub gazem. Ciecz rzeczywista słabo przenosi naprężenia rozciągające, a występujący przepływ cieczy rzeczywistej ma cechy przepływu niestabilnego. Po przekroczeniu pewnego ciśnienia $p_{\min}$ może powstać nieciągłość strugi. Tworzą się obszary wypełnione parami cieczy lub gazem. Zjawisko kawitacji można traktować jako proces wrzenia cieczy pod obniżonym ciśnieniem. Powstanie obszarów

nieciągłości zachodzi w tych przypadkach, gdy dowolny profil porusza się w cieczy z dużą prędkością, a na profilu są karby. Ciśnienie p_{min} , poniżej którego występuje zjawisko kawitacji, jest funkcją ilości przepuszczonego gazu, szybkości przepływu cieczy, wielkości sił kapilarnych, odległości od ścianki ciała stałego oraz innych parametrów.



Rys. 55. Kawitacja

Kawitację charakteryzuje współ-

czynnik k

$$k = \frac{2(p - p_{min})}{\rho w^2} \quad (303)$$

gdzie p_{min} - ciśnienie wrzenia cieczy.

Rodzaj kawitacji zależy od wartości tego współczynnika. Jeżeli $k \gg 1$ to obszar zastoju ma ograniczone wymiary i może ulec rozmyciu z utworzeniem się wiru. Zjawisko takie ma miejsce dla ilorazu gęstości pary i cieczy w przybliżeniu równym jedności. Obszar zastoju nie ulega rozmyciu dla $\rho_{pary} / \rho_{cieczy} \ll 1$.

1.2.24.2. Uderzenie hydrauliczne

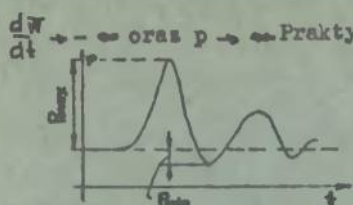
Uderzeniem hydraulicznym nazywamy gwałtowny wzrost/obniżenie/ ciśnienia w rurociągu wypełnionym przepływającą cieczą, który powstaje w wyniku nagłej zmiany prędkości cieczy.

Zjawisko kawitacji ma charakter procesu nieustalonego gasnącego. Przejście od ruchu do spoczynku oraz wzrost ciśnienia trwa pewien odcinsek czasu. Ciecz po zamknięciu zaworu zatrzymuje się natychmiast, jednak na skutek bezwładności pozostałej masy cieczy ulega ściśnięciu. Ciśnienie w cieczy wzrasta gwałtownie. Wzrasta również naprężenie rozciągające w ściankach rury. Stan taki przekazuje się wzdłuż rurociągu, przy czym w cieczy występują fale naprężeń sprężystych.

Uprozczone równanie dynamiki uderzenia hydraulicznego można wyprowadzić z równania ruchu cieczy lepkiej nieściśliwej (263). Przy założeniu, że wzrost ciśnienia wywołany zostaje przez lokalne przyspieszenie cieczy/człon inercyjny równania (263) / otrzymany uproszczony postać równania

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (304)$$

Zgodnie z tym równaniem przy natychmiastowym zamknięciu zaworu



Rys. 56. Zmiana ciśnienia podczas uderzenia hydraulicznego

Praktycznie jest to niemożliwe, ponieważ ani ciecz nie jest absolutnie nieściśliwa, ani ścianki rury nie są absolutnie недеformowalne. Wobec powyższego do wyznaczenia p oraz $\frac{dp}{dt}$ należy dołączyć równanie ciągłości cieczy

$$\frac{d}{dt}(\xi S dt) = 0 \quad (305)$$

Rozwiązanie równań (304) oraz (305) przy założeniu, że ciecz i materiał ścianki podlegają prawu Hooke'a, daje wzór na szybkość rozprzestrzenienia się fali uderzeniowej

$$c = \frac{\sqrt{E_c / \rho}}{\sqrt{1 + (D/\delta) \cdot (E_c / E_m)}} \quad (306)$$

gdzie: c - szybkość rozprzestrzenienia się fali uderzeniowej,

E_m - moduł sprężystości materiału ścianki,

E_c - moduł sprężystości cieczy,

D - średnica rurociągu,

δ - grubość ścianki rury.

Wzrost ciśnienia powstały w wyniku uderzenia hydraulicznego oblicza się ze wzoru

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot c \cdot w \cdot 2L}{2t_z} = \frac{2\rho w L}{t_z} \quad (307)$$

gdzie: L - długość rury,

t_z - czas zamykania zaworu.

Z równania (307) wynika, że w celu uniknięcia uderzenia hydraulicznego, zaworu nie należy zamykać gwałtownie.

1.2.25. Opory przepływu

Reakcja płynu na ciało stałe omywane strumieniem cieczy jest równa zero dla cieczy doskonałej i różna od zera dla cieczy rzeczywistej. Reakcja ta składa się z wypadkowej sił stycznych, wywołanych lepkością, występujących na powierzchni ciała stałego S'

$$\bar{P}_{\mu r} = \int_{S'} \bar{\tau}_{\tau t}(s') ds \quad (308)$$

gdzie: $\bar{\tau}_{\tau t}$ - lokalne naprężenie styczne na powierzchni ciała stałego,

oraz wypadkowej lokalnych ciśnień normalnych do poszczególnych elementów powierzchni opływającego ciała stałego

$$\bar{P}_{nn} = \int_{S'} \bar{\tau}_{nn}(S') dS \quad (309)$$

gdzie $\bar{\tau}_{nn}$ - lokalne ciśnienie na powierzchni ciała stałego.

Opor całkowity jest sumą składowych

$$\bar{P}_n = \bar{P}_{nr} + \bar{P}_{nn} \quad (310)$$

Składowa $\bar{P}_{nr}$ jest równoległa do kierunku ruchu ciała stałego. Składowa $\bar{P}_{nn}$ jest prostopadła do ruchu i stanowi siłę nośną. Pojawia się ona, gdy przepływ jest pod kątem do osi lub płaszczyzny symetrii bryły.



Rys. 57. Siła hydrodynamiczna działająca na powierzchnię ciała stałego

Siła nośna pojawia się, gdy bryła jest niesymetryczna /płat nośny/.

Jeżeli wykorzystamy zależność $\bar{\tau}_t = \mu \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right)_{y=0}$, to wypadkową sił stycznych wyznacza się na podstawie wyrażenia

$$\bar{P}_{nr} = \int_{S'} \mu \left(\frac{d\bar{w}_x}{dy} \right)_{y=0} dS \quad (311)$$

Przy spełnieniu pewnych założeń, siłę $\bar{P}_{nn}$ można wyznaczyć z zależności

$$\bar{P}_{nn} = - \int_{S'} p \bar{n} dS = \int_{S'} 0,5 \rho \bar{w}^2 \bar{n} dS \quad (312)$$

W obliczeniach praktycznych używa się bezwymiarowego współczynnika oporu c_x zamiast oporu całkowitego

$$c_x = c_{xr} + c_{xn} = \frac{\bar{P}}{0,5 \rho_\infty \bar{w}_\infty^2 S'} \quad (313)$$

gdzie: ∞ - dotyczy strumienia nadbiegającego,

S' - powierzchnia charakterystyczna opływającego ciała,

c_{xr} - współczynnik oporu tarcia,

c_{xn} - współczynnik oporu ciśnieniowego.

Współczynnik oporu jest funkcją wielu zmiennych

$$c_x = f(Re, Tr(185), \text{kształt ciała}) \quad (314)$$

1.2.26. Podobieństwo procesów fizycznych w mechanice płynów

Problemy praktyczne mechaniki płynów rozwiązywane są teoretycznie lub wyjaśniane są na podstawie pomiarów doświadczalnych wykonanych przy użyciu modelu obiektu. Wynikają dwa zagadnienia: jak powinien być zbudowany model obiektu oraz jak należy przeliczać otrzymane wyniki pomiarów doświadczalnych. Zagadnienia te są ujęte teorią podobieństwa procesów fizycznych, w której rozróżniamy podobieństwo geometryczne, dynamiczne, cieplne, energetyczne i inne.

Wymiary liniowe obiektu i modelu różnią się wielkością skali

$$l_{\text{obektu}} = m_l \cdot l_{\text{modelu}} \quad (315)$$

gdzie $m_l = \text{const}$ - skala wymiarów liniowych.

Wzór (315) określa podobieństwo geometryczne modelu i obiektu.

Jeżeli przepływy są nieustalone, to warunek podobieństwa względem skali czasu ma postać

$$t_{\text{obektu}} = m_t \cdot t_{\text{modelu}} \quad (316)$$

gdzie $m_t = \text{const}$ - skala czasu.

Podobieństwo kinematyczne, dynamiczne oraz cieplne istnieją tylko przy spełnieniu wzoru (315). Podobieństwa te mają postać

$$\bar{w}_{\text{obektu}} = m_w \cdot \bar{w}_{\text{modelu}} \quad (317)$$

$$\bar{f}_{\text{obektu}} = m_f \cdot \bar{f}_{\text{modelu}} \quad (318)$$

gdzie: $m_w = \text{const}$ - skala podobieństwa kinematycznego,
 $m_f = \text{const}$ - skala podobieństwa dynamicznego.
 $\bar{f}$ - siła.

Odnosząc parametry fizyczne do wybranych wartości charakterystycznych tych parametrów otrzymamy wielkości bezwymiarowe

$$\bar{r}^* = \frac{r}{L_0}; \bar{w}^* = \frac{w}{w_0}; \bar{p}^* = \frac{p}{p_0}; \bar{F}^* = \frac{F}{G_0}; \bar{t}^* = \frac{t}{t_0}; \bar{\theta}^* = \frac{\theta}{\theta_0}; \bar{\mu}^* = \frac{\mu}{\mu_0}; \\ \bar{T}^* = \frac{T}{T_0}; \bar{c}_v^* = \frac{c_v}{c_{v,0}}; \bar{\lambda}^* = \frac{\lambda}{\lambda_0}; \bar{S}_{\mu}^* = \frac{S_{\mu,0}}{\mu_0 \cdot w_0}; \bar{V}^* = \frac{V}{L_0^3} \quad (319)$$

gdzie: 0 - indeks oznaczający wielkość charakterystyczną,

* - indeks oznaczający wielkość bezwymiarową.

Wielkości charakterystyczne są dobierane dla każdego konkretnego zagadnienia w sposób dowolny. Mają one jednak na celu uproszczenie równania oraz warunków granicznych.

Parametry fizyczne powiązane są ze sobą równaniami różniczkowymi opisującymi zasadę zachowania masy, pędu i energii. W wyniku podobieństwa parametrów fizycznych równania wiążące parametry bezwymiarowe mają charakter ogólny. Zbiór parametrów fizycznych rozpatrujemy jako konkretne rozwiązanie równań różniczkowych opisujących proces. Rozwiązaniu temu odpowiadają konkretne warunki graniczne w postaci bezwymiarowej /stałe lub zależności funkcyjne/. Zapisanie równań różniczkowych w postaci bezwymiarowej pozwala wyrazić kryteria określające rozpatrywane zjawiska. Kryteria te wyrażone są w postaci kompleksów bezwymiarowych /liczby kryterialne/.

Jeżeli na podstawie wielkości charakterystycznych utworzymy liczby bezwymiarowe, to równania zachowania masy, pędu i energii przyjmą odpowiednio postacie

$$\frac{1}{S} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \text{div}^*(\varphi^* \vec{w}^*) = 0 \quad (320)$$

$$\frac{1}{S} \varphi^* \frac{\partial \vec{w}^*}{\partial t^*} + \varphi^* (\vec{w}^* \text{grad}^* T^*) \vec{n}^* - \frac{1}{Fr} \varphi^* \vec{F}^* - Eu \text{grad}^* \vec{p}^* + \frac{1}{Re} \text{Div}^* \vec{S}_{\mu}^* \quad (321)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Sh} \varphi^* c_v^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \varphi^* c_v^* (\text{grad}^* T^*) \vec{w}^* - \frac{1}{Pe} \text{div}^* (\lambda^* \text{grad}^* T^*) - \\ & - \frac{Br}{Pr} Eu \cdot T^* \left(\frac{\partial p^*}{\partial T^*} \right)_v \text{div}^* \vec{w}^* + \frac{Br}{Re Pr} \text{tr} (\vec{S}_{\mu}^* \text{grad}^* \vec{w}^*) \end{aligned} \quad (322)$$

gdzie: $S = \frac{L_0 w_0}{\nu_0}$ - liczba Strouhala,

$Re = \frac{\rho_0 w_0 L_0}{\mu_0}$ - liczba Reynoldsa,

$Fr = \frac{w_0^2}{g_0 L_0}$ - liczba Frouda,

$Pr = \frac{c_{p0} \mu_0}{\lambda_0}$ - liczba Prandtla,

$Eu = \frac{p_0}{\rho_0 w_0^2}$ - liczba Eulera,

$Br = \frac{\mu_0 w_0^2}{\lambda_0 T_0}$ - liczba Brinkmana,

$Pe = \frac{\rho_0 w_0 L_0 c_{p0}}{\lambda_0}$ - liczba Pecleta,

v^* - objętość bezwymiarowa

Kompleksy bezwymiarowe /liczby kryterialne/ wchodzące do równań (320+322) stanowią kryteria podobieństwa i mają odpowiedni sens fizyczny:

- S - iloraz siły bezwładności ruchu ustalonego i ruchu nieustalonego,
- Re - iloraz siły bezwładności i siły lepkości,
- Fr - iloraz siły bezwładności i siły ciężkości,
- Eu - iloraz siły powierzchniowej ciśnienia i siły bezwładności,
- Pr - iloraz strumienia ciepła wywołanego tarciami i strumienia ciepła przenoszonych w procesie przewodnictwa,
- Br - iloraz prędkości dysypacji energii mechanicznej występującej w wyniku działania sił lepkości i energii przenoszonych w procesie przewodnictwa cieplnego,
- Pe - iloraz strumienia ciepła przenoszonych konwekcją i strumienia ciepła przenoszonych w procesie przewodnictwa cieplnego.

Układ równań (320+322) dla modelu i obiektu będzie jednakowy, jeżeli równe są kryteria podobieństwa

$$S_m = S_o; Re_m = Re_o; Fr_m = Fr_o; Pr_m = Pr_o; Br_m = Br_o; Eu_m = Eu_o. \quad (323)$$

Jednak w niektórych przypadkach /np. reakcja chemiczna/ dodatkowe równania bezwymiarowe zamykające układ równań (320+322) nie są jednakowe dla modelu i obiektu, a więc pomimo spełnienia warunku (323) nie udaje się uzyskać pełnego podobieństwa dynamicznego.

Jeżeli dominującym procesem podczas ruchu ciepła jest konwekcja naturalna, to równanie (321) w postaci bezwymiarowej przyjmie postać

$$\frac{1}{5} \epsilon \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \epsilon (\bar{w} \text{ grad } \bar{w}) \bar{w} = \frac{1}{Re} \mu \Delta \bar{w} - \frac{Gr}{Re} \beta_p g \text{ dif } T \quad (324)$$

gdzie: $\beta_p = \frac{\beta}{(\beta)_o}$,

$$Gr = \frac{g_o (\rho_o)^2 l_o^3 \text{ dif } T_o}{\mu_o^2} \quad - \text{liczba Grashofa.}$$

Liczba Grashofa określona jest ilorazem siły wyporu i siły lepkości.

1.3. GAZY

1.3.1. Podstawowe własności gazu

Ciecz i gaz różnią się pomiędzy sobą stopniem ściśliwości. W warunkach, gdy własności tej nie uwzględnia się w modelu zjawiska lub nie decyduje ona o zachowaniu się płynu, to rozwiązania równań ruchu są jednakowe dla cieczy i dla gazu.

Ilościową oceną ściśliwości jest izotermiczny współczynnik ściśliwości α_T

$$\alpha_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad (1)$$

gdzie v - objętość właściwa.

Współczynnik ten dla cieczy zmienia się w zakresie 10^{-9} do $10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$, maleje ze wzrostem ciśnienia i warstwa ze wzrostem temperatury. Dla gazów współczynnik ściśliwości znacznie zmienia się ze zmianą ciśnienia i temperatury. Jako ilościową ocenę zmian wprowadzono współczynnik β_p określony relacją

$$\beta_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \quad (2)$$

Gaz rzeczywisty jest lepki. Współczynnik dynamiczny lepkości opisuje zależność

$$\mu = \frac{1}{3} \bar{c} \bar{m} \bar{l} \quad (3)$$

gdzie: $\bar{c}$ - średnia prędkość gazu,
 $\bar{l}$ - droga swobodna.

W zakresie umiarkowanych ciśnień współczynnik μ jest stały, natomiast ulega zmianom dla gazów rozrzedzonych i wysokich ciśnień. Długość drogi swobodnej cząstki /elementu/ gazu jest rzędu 10^{-5} cm , co pozwala traktować gaz jako ośrodek ciągły. W wyniku nieuporządkowanego ruchu cząstek gaz rozszerza się we wszystkie strony, a więc nie ma określonej objętości i wypełnia kształt pojemności zamykającej gaz. Ścianki pojemności doznają znacznych oddziaływań siłowych wynikających z chaotycznego ruchu cząstek gazu. Dowolna siła przyłożona do granicznej powierzchni zamykającej gaz wywołuje jego uporządkowany ruch. Przy niskich prędkościach ruchu gazu, w wyniku małych zmian ciśnienia, współczynnik ściśliwości zmienia się nieznacznie i do opisanego zachowania się gazu mogą być użyte równania sto-

rowane dla cieczy nieściśliwej. Praktycznie można nie brać pod uwagę współczynnika ściśliwości w przedziale prędkości gazu $1-150$ m/s, co odpowiada zmianie liczby Macha w zakresie $Ma_{\infty} = 0-0,45$. Przy prędkościach dźwiękowych i naddźwiękowych ruchu gazu ciśnienie zmienia się znacznie, co wywołuje zmianę gęstości i temperatury gazu. Do opisu zachowania się gazu w tych przypadkach używa się równań stosowanych dla cieczy ściśliwej. Przy dużych prędkościach ruchu gazu występują zmiany fizykochemicznych własności gazu. Zachodzą procesy dysocjacji i rekombinacji cząstek gazu. Dalszy wzrost prędkości ruchu gazu lub ruchu ciała stałego w gazie wywołuje termojonizację gazu.

Ciepło doprowadzone do gazu służy na zwiększenie energii ruchu postępowego i obrotowego cząstek gazu oraz energii drgań atomów, a także na wykonanie pracy przeciwdziałającej siłom wzajemnego przyciągania atomów, w wyniku czego wzrasta ciepło właściwe gazu. Ze wzrostem temperatury wzrasta współczynnik przewodnictwa cieplnego oraz dynamiczny współczynnik lepkości. Charakter zmian tych parametrów staje się bardzo skomplikowany, jeżeli występuje w gazie proces termojonizacji. Gaz przestaje być termicznie i kalorycznie doskonałym i równanie stanu ma postać

$$P = \frac{R_0}{f(p,T)} \rho T \quad (4)$$

gdzie: R_0 - uniwersalna stała gazowa,

$f(p,T) = M_{\text{śr}}$ - średnia masa cząsteczkowa gazu.

Entalpia takiego gazu zależy od ciśnienia i temperatury.

Zachowanie się gazu przy prędkościach naddźwiękowych opisuje gazodynamika. Prędkość rozchodzenia się małych zaburzeń w gazie ma wartość skończoną. Powstają zjawiska falowe. Podczas rozchodzenia się małych zaburzeń w gazie, spiętrzenia i rozrzedzenia zachodzą też szybko, że wymiana ciepła pomiędzy cząsteczkami nie zachodzi i proces ruchu gazu przebiega adiabatycznie.

Lepkość nie odgrywa roli podczas przepływu gazu i jej wpływ zachowuje się tylko w cienkich warstwach granicznych. Przy małych prędkościach ruchu gazu nie uwzględnia się zmian ciepła właściwego z temperaturą oraz nie uwzględnia się zjawiska promieniowania.

Noboc powyższych epostrzeżeń dynamikę gazów można zdefiniować jako hydrodynamikę dużych prędkości i małych przestrzennych zasięgów działania, a równaniami dynamiki gazów są równania cieczy doskonałej ściśliwej nie podlegającej działaniu zewnętrznych sił masowych.

W dalszych rozważaniach przyjęto uważać gaz jako płyn homogeniczny jednokontinualny.

1.3.2. Podstawowe równania termodynamiczne

Mechanika gazów ściśliwych, nielepkich i nie przewodzących ciepła wykorzystuje równania klasycznej termodynamiki procesów quasi-statycznych. Natomiast w przypadku gazów rzeczywistych na podstawie termodynamiki klasycznej można jedynie określić początkowy i końcowy stan gazu. W tym przypadku użyteczna jest termodynamika procesów nieodwracalnych.

Podstawowymi równaniami, z których korzysta się w dynamice gazów doskonałych, w sensie termodynamicznym, jest równanie stanu gazu

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (5)$$

gdzie R - stała gazowa,

oraz równanie opisujące pierwszą i drugą zasadę termodynamiki. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki energia układu termodynamicznego równa jest sumie ciepła doprowadzonego do układu i pracy mechanicznej wykonanej na układzie przez otoczenie

$$dQ = du + d(0,5 \bar{w}^2) + d\left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (6)$$

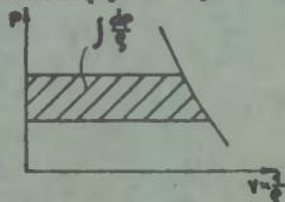
Wprowadzając do równania (6) entalpię określoną zależnością

$$di = du + d\left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (7)$$

otrzymamy inną postać równania

$$dQ = di + d(0,5 \bar{w}^2) \quad (8)$$

W przypadku procesów quasi-ustalonych zachodzących wystarczająco wolno, tak że przebieg ich można rozpatrywać jako ciąg stanów równowagowych ośrodka gazowego, praca mechaniczna zużyta na zmianę objętości gazu. Można więc przyjąć, że $d(0,5 \bar{w}^2) = 0$ i ciepło dostarczone do gazu zostaje zużyte na podniesienie energii wewnętrznej i na pracę rozszerzenia objętości



Rys. 58. Przepływ gazu na wykresie $p-v$

$$dQ = du + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = di - \frac{1}{\rho} dp \quad (9)$$

Wzór (9) stanowi treść pierwszej zasady termodynamiki,
Wprowadzając do wzoru (9) entalpię (7) oraz wyrażając składniki
otrzymanego równania przez ciepło właściwe otrzymamy równanie

$$C_p dT = C_v dT + R dT \quad (10)$$

które nosi nazwę wzoru Mayera

$$C_p - C_v = R \quad (11)$$

gdzie: $C_p = \left(\frac{dH}{dT}\right)_P$ - ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem,

$C_v = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V$ - ciepło właściwe w stałej objętości.

Ciepło dostarczone do gazu podczas skończonej przemiany zależy od
wszystkich stanów pośrednich, a więc dQ nie jest różniczką zupełną.
W termodynamice wykazano, że różniczką zupełną jest wyrażenie

$$ds = \frac{dQ}{T} = \frac{di}{T} - \frac{1}{\gamma T} dp \quad (12)$$

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - \frac{1}{T} \left[R dT - p d\left(\frac{1}{\gamma}\right) \right] \quad (12a)$$

$$ds = \frac{C_v}{T} dT + R \gamma d\left(\frac{1}{\gamma}\right) = R \left[\frac{1}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + \frac{d\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\frac{1}{\gamma}} \right] \quad (12b)$$

$$ds = \frac{R}{\gamma-1} \left[d \ln \frac{p}{\rho} - (\gamma-1) d \ln \gamma \right] \quad (12c)$$

gdzie s - entropia właściwa.

Podczas ruchu gazu rzeczywistego ciepło dQ jest sumą ciepła dostarczonego z zewnątrz przez granicę podziału oraz ciepła powstałego w objętości gazu w wyniku dysypacji energii mechanicznej

$$dQ = dQ_z + dQ_d \quad (13)$$

gdzie: dQ_z - ciepło dostarczone z zewnątrz,

dQ_d - ciepło powstające w wyniku dysypacji energii mechanicznej.

Jeżeli $dQ_d = 0$, to taki przepływ gazu nazywamy przepływem adiabatycznym, natomiast przy $ds = 0$ mamy przepływ izentropowy. W termodynamice procesów quasi-ustalonych $dQ_d = 0$ i przepływy adiabatyczne i izentropowe są równoważne.

Podczas przepływu gazu rzeczywistego nawet w układzie izolowanym

cieplnie, tj. bez wymiany ciepła z otoczeniem, w wyniku nieodwracalnego procesu dysypacji entropia nigdy nie maleje

$$ds \geq 0 \quad (14)$$

Równanie (14) stanowi treść drugiej zasady termodynamiki.

1.3.3. Pełny układ równań ruchu gazu ściśliwego, lepkiego i przewodzącego ciepło

W przypadku ruchu gazu rzeczywistego z umiarkowaną prędkością, gdy nie występują nieciągłości, obowiązują równania zachowania masy, pędu i energii stosowane dla cieczy rzeczywistych

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} + \text{div}(\rho \bar{w}) = 0 \quad (15)$$

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = \rho \bar{F} - \text{grad } p + \frac{1}{3} \mu \text{grad div } \bar{w} + \mu \Delta \bar{w} - \frac{2}{3} \text{div } \bar{w} \text{grad } \mu + 2T^2 \text{grad } \mu \quad (16)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = -T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_v \text{div } \bar{w} + \text{div}(\lambda \text{grad } T) + \dot{S}_{\mu i}^i : \dot{T}^i + \rho Q + \varepsilon \quad (17)$$

Jeżeli rozpatrujemy przypadek, w którym eizy masowa zewnętrzne są pomijalnie małe oraz założymy, że $\mu = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ oraz $Q = 0$, to po zamianie temperatury na ciśnienie termodynamiczne zgodnie z równaniem (5) otrzymamy nową postać równania zachowania energii

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{w}) = \frac{\lambda}{c_v} \text{div grad } \frac{p}{\rho} - \frac{R}{c_v} p \text{div } \bar{w} + \frac{R}{c_v} \dot{S}_{\mu i}^i : \dot{T}^i \quad (18)$$

Układ równań (15-17) dla rozpatrywanego przypadku przyjmie postać

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \rho w_i}{\partial x_i} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \text{grad } \bar{w}^2 + \text{rot } \bar{w} \times \bar{w} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \bar{w} + \frac{\nu}{3} \text{grad div } \bar{w} \quad (20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial p w_i}{\partial x_i} + (\kappa - 1) p \text{div } \bar{w} = (\kappa - 1) \sum_i \sum_j \dot{S}_{\mu ij}^i : \dot{T}^j + \frac{\lambda(\kappa - 1)}{R} \text{div grad } \frac{p}{\rho} + \varepsilon \quad (21)$$

$$p = \rho R T \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 (x, y, z) \quad (22)$$

Zamiast równaniem Clapeyrona układ (19+22) można uzupełnić innym równaniem stanu gazu

$$p = p(\vartheta, s) \quad (23)$$

gdzie p - ciśnienie termodynamiczne.

Przykładem konkretnej postaci zależności (23) dla gazu doskonałego może być wzór

$$p = e^{\frac{\vartheta}{c_v}} \vartheta^x \quad (24)$$

gdzie $x = \frac{c_p}{c_v}$ - wykładnik adiabaty Poissona.

Układ równań (19+22) składa się z pięciu różniczkowych równań skalarowych określających pięć nieznanych funkcji $\vartheta, p, \bar{w}$ i jest układem zamkniętym. Do zestawu zmiennych można dołączyć entropię s . Wzór analityczny do określenia entropii otrzymać można z zależności (12), która w wyniku całkowania przekształci się we wzór określający entropię z dokładnością do stałej

$$s = \frac{R}{x-1} \ln \frac{p}{\vartheta^x} + \text{const} \quad (25)$$

Zwiększenie układu zmiennych ($\vartheta, p, \bar{w}$) o wielkość s wymaga dołączenia do układu (15+17) równania zachowania entropii w postaci

$$\vartheta \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial s u_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\lambda}{T} \text{div grad } T + \frac{1}{T} \sum_i \sum_j (\dot{S}_{\mu ij}^s : \dot{T}_{ij}^s) \quad (26)$$

Wzór (25) jest podobny do zapisu matematycznego trzeciej zasady termodynamiki. Zgodnie z tą zasadą przejściu układu ze stanów mniej prawdopodobnych w bardziej prawdopodobne towarzyszy wzrost entropii. Prawdopodobieństwo termodynamiczne jest więc funkcją entropii. Biorąc pod uwagę addytywne własności entropii i uwzględniając prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń, otrzymamy wzór opisujący trzecią zasadę termodynamiki

$$s = k \cdot \ln \mathcal{P} \quad (27)$$

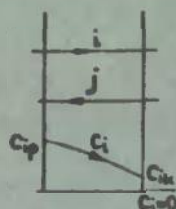
gdzie: k - stała uniwersalna Boltzmanna,

$\mathcal{P}$ - prawdopodobieństwo termodynamiczne.

Podczas ruchu gazu w wyniku cząsteczkowego przenoszenia masy występuje zjawisko wyrównania stężeń w objętości przepływającego gazu. Jest to proces nieodwracalny i stanowi jedno ze źródeł strat energii mechanicznej. Proces ten nazywany jest dyfuzją i określony jest współ-

czynnikiem dyfuzji D . Dla powietrza jako mieszaniny dwóch gazów używa się współczynnika dyfuzji binarnej.

Przenoszenie masy w wyniku dyfuzji występuje w obszarach z obniżonym stężeniem składnika. Równanie procesu dyfuzji dla i -tego składnika mieszaniny gazowej ma postać



$$\bar{m}_{id} = -\rho D \text{grad} c_i \quad (28)$$

gdzie: c_i - stężenie i -tego składnika,

D - współczynnik dyfuzji,

$\bar{m}_{id}$ - strumień masy i -tego składnika.

Rys. 59. Dyfuzja składnika i

Energię przenoszoną strumieniem masy $\bar{m}_{id}$ określa wyrażenie

$$q_{id} = \sum_{i=1}^N i_i \text{div}(\rho D \text{grad} c_i) \quad (29)$$

gdzie: $i_i = \left(\int_0^T c_p dT \right)_i + (i_{r.ch.})_i$ - uogólniona entalpia i -tego składnika,

$(i_{r.ch.})_i$ - ciepło reakcji chemicznej powstające w wyniku tworzenia się składnika i -tego.

Uwzględniając dyfuzyjne przenoszenie ciepła w równaniu bilansu energii otrzymamy nową postać równania

$$\rho \frac{d}{dt} (u + q_5 \bar{w}^2) = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \rho \bar{F} \cdot \bar{w} + \epsilon - \text{div}(\rho \bar{w}) - \frac{2}{3} \text{div}(\mu \bar{w} \text{div}(\bar{w})) + \text{div}(2\mu \bar{w} T^*) + \sum_{i=1}^N i_i \text{div}(\rho D \text{grad} c_i) \quad (30)$$

która, po wykonaniu operacji $\text{div}(2\mu \bar{w} T^*)$, przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} (u + q_5 \bar{w}^2) = & \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \rho \bar{F} \cdot \bar{w} + \epsilon - \text{div}(\rho \bar{w}) - \frac{2}{3} \text{div}(\mu \bar{w} \text{div}(\bar{w})) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w_x^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_y^2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w_z^2}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} [\mu (w_y \epsilon_z + w_z \epsilon_y)] + \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial y} [\mu (w_x \epsilon_z + w_z \epsilon_x)] + 2 \frac{\partial}{\partial z} [\mu (w_x \epsilon_y + w_y \epsilon_x)] + \sum_{i=1}^N i_i \text{div}(\rho D \text{grad} c_i) \quad (31) \end{aligned}$$

Podczas formułowania tych równań założono, że entalpia mieszaniny gazowej $i = \sum_{i=1}^N C_i i_i$ nie zmienia się w czasie reakcji chemicznej. Ciepło reakcji ujęto w ostatnim członie prawej strony wyrażenia określającego entalpię uogólnioną.

Równanie (30) można przekształcić do innej postaci. W tym celu należy z równania (7) wyznaczyć pochodną energii wewnętrznej u i wpro-

wadzić otrzymane wyrażenie do wzoru (30). Uwzględniając, że entalpia $i = u + \frac{p}{\rho} + i_{rch} + l_{ch}$ otrzymamy

$$\rho \frac{d}{dt} (i + 0,5 \bar{w}^2) = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \rho \bar{F} \bar{w} + \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{2}{3} \text{div}(\mu \bar{w} \text{div} \bar{w}) + \text{div}(2 \mu \bar{w} \bar{T}) \quad (32)$$

gdzie i_{rch} - entalpia reakcji chemicznej.

W równaniu tym opuszczono człon uwzględniający proces dyfuzyjnego przenoszenia ciepła oraz pominięto wpływ zjawiska promieniowania ($\dot{E}' = 0$). Jeżeli w równaniu (138-1.2.) wzór dotyczy części 1.2. / przeprowadzimy podobną zmianę energii wewnętrznej, jak to zostało przeprowadzone podczas wyprowadzenia równania (32), to dla stałych parametrów fizycznych równanie określające pochodną substancjalną ma postać

$$\rho \frac{di}{dt} = \frac{\lambda}{c_{p, \bar{w}}} \text{div grad } i + \frac{dp}{dt} + (\dot{S}_\mu \cdot \bar{T}) \quad (33)$$

gdzie $c_{p, \bar{w}}$ - średnie ciepło właściwe gazu.

Dla ruchu płaskiego, gdy $\mu = \text{const}$ równanie (33) przyjsie postać

$$\rho \frac{di}{dt} = \frac{dp}{dt} + 2\mu \left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}_y}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (\text{div} \bar{w})^2 + 4 \bar{w}_x^2 \right\} + \text{div} \left(\frac{\lambda}{c_{p, \bar{w}}} \text{grad } i \right) \quad (34)$$

Jeżeli wprowadzimy do równania (33) entropię określoną wzorem (12) i uwzględnimy zjawisko promieniowania rozgrzanego gazu, to otrzymamy równanie

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \lambda \text{div grad } T + (\dot{S}_\mu \cdot \bar{T}) + \dot{E}' \quad (35)$$

z którego wynika, że entropia gazu zależy wyłącznie od efektów dysypacyjnych, tzn. od lepkości i przewodnictwa cieplnego gazu termodynamicznie doskonałego.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że do układu równań (19+22) włączono równanie stanu gazu doskonałego. Jednak zachowanie się gazu rzeczywistego nie jest całkowicie zgodne z równaniem Clapeyrona, szczególnie dla dużych ciśnień. W równaniu Clapeyrona nie uwzględniono działania sił między cząsteczkowych oraz skończonej wielkości cząstek. Oba te czynniki odgrywają istotną rolę, jeżeli gaz jest zagęszczony i gdy cząstki gazu poruszają się z małą prędkością. Proponowana jest duża liczba różnych równań stanu gazu rzeczywistego. Przykładem tych równań może być równanie zaproponowane przez Dieterici

$$p = \frac{RT}{\frac{1}{\rho} - b} e^{-\frac{a}{RT}} \quad (36)$$

gdzie: a, b - stałe.

1.3.4. Dodatkowe funkcje niezależne

Opisując modelowo zachowanie się gazu uwzględniamy wiele wielkości charakteryzujących zjawisko. Zwykle dysponujemy równaniami zachowania masy, pędu i energii, które dają mniejszą liczbę równań skalarowych niż liczba poszukiwanych wielkości. Układ równań jest więc niesamknęty i w celu jego samknęcia należy dodać brakującą liczbę niezależnych funkcji dotyczących dodatkowych wielkości. Funkcje te można zapisać w postaci ogólnych zależności

$$\bar{F} = f_1(\bar{r}, t) \quad (37a)$$

$$\lambda = f_2(p, T) \quad (37b)$$

$$\mu = f_3(p, T) \quad (37c)$$

$$c_p = f_4(p, T) \quad (37d)$$

$$c_i = f_5(p, T) \quad (37e)$$

$$i = f_6(p, T) \quad (37f)$$

$$s = f_7(p, T) \quad (37g)$$

$$Q = f_8(p, T, c_i) \quad (37h)$$

$$c_v = f_9(p, T) \quad (37i)$$

Jeżeli podczas ruchu gazu wystąpi dysocjacja i jonizacja, to proces termodynamiczny w strumieniu gazu nie będzie adiabatyczny. Wymaga to uwzględnienia wymiany ciepła przez promieniowanie. Również równanie stanu gazu będzie w postaci równania, w którym średnia masa cząsteczkowa zmienia się ze zmianą temperatury i ciśnienia. Należy dodać do układu równań (37) dwa dodatkowe równania

$$E' = f_{10}(p, T) \quad (38a)$$

$$M_{gr} = f_{11}(p, T) \quad (38b)$$

Rozwiązywanie konkretnych zagadnień praktycznych wymaga, aby układ równań mechaniki gazu spełniał określone warunki graniczne, tj. warunki początkowe i brzegowe. Warunki początkowe mają sens tylko dla ruchu nieustalonego. Warunki brzegowe dotyczą granic rozdziału obszarów przepływu swobodnego i zakłóconego oraz określone są charakterem przepływu gazu na powierzchni ciała stałego. Jeżeli gaz jest nisliski i nie przenika przez powierzchnię ograniczającą, to spełniony jest warunek $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$. Jeżeli gaz jest lepki, a rozpatrujemy ruch w warstwie granicznej, to warunki graniczne dotyczą powierzchni

ciała stałego oraz zewnętrznego obszaru warstwy granicznej. Na powierzchni ciała stałego $\bar{w}=0$, a na granicy obszarów $\bar{w}=\bar{w}_\infty$ i $\delta_\mu=0$.

Mogą być formułowane inne warunki brzegowe i będą one określone wymaganiami konkretnych zagadnień praktycznych.

1.3.5. Układ uproszczonych równań ruchu gazu

Układ równań (15+22) lub (19+22) oraz (26) opisuje ogólny przypadek ruchu gazu, gdy zachodzą zjawiska dysocjacji i jonizacji gazu oraz występują efekty promieniowania ogrzanego gazu. Działają ponadto siły lepkości, przebiega reakcja chemiczna, a w procesie wymiany ciepła duży udział ma proces przewodnictwa cieplnego.

Jednak w zagadnieniach praktycznych, wyjaśniających zachowanie się gazu, można nie brać pod uwagę udziału niektórych zjawisk i w układzie równań (15+17) lub (19+22) oraz (26) odpowiednie składniki można pominąć.

Jeżeli gaz porusza się z małą prędkością, to siła tarcia jest mała i ciepło wytworzone przez gaz pokonywujący opory tarcia można pominąć. Otrzymamy układ równań dla gazu nielepkiego przewodzącego ciepło

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \bar{w} = 0 \quad (39)$$

$$\varrho \frac{d\bar{w}}{dt} = -\operatorname{grad} p \quad (40)$$

$$\varrho \frac{di}{dt} = \frac{\lambda}{C_{pi}} \operatorname{div} \operatorname{grad} i + \frac{dp}{dt} + \epsilon' \quad (41)$$

Do układu równań (39+41) należy dołączyć równanie stanu gazu (4) uwzględniające zależność średniej masy cząsteczkowej od temperatury i ciśnienia.

Dla małych prędkości gazu praca sił ciśnienia jest mała i można założyć, że $\frac{dp}{dt} = 0$. Równanie zachowania entropii uproszczy się do postaci

$$\varrho \frac{di}{dt} = \frac{\lambda}{C_{pi}} \operatorname{div} \operatorname{grad} i + \epsilon' \quad (42)$$

Jeżeli gaz jest nielepkki i nie przewodzący ciepła oraz pominiemy zjawisko promieniowania ($\epsilon'=0$), to w wyniku przekształcenia układu równań (39+41) otrzymamy

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} \bar{w} = 0 \quad (43)$$

$$\varphi \frac{d\bar{w}}{dt} = -\operatorname{grad} p \quad (44)$$

$$\varphi \frac{d}{dt} (0,5 \bar{w}^2 + c_v T) = -\operatorname{div} (p \bar{w}) \quad (45)$$

W wyniku elementarnych przekształceń równanie zachowania energii całkowitej z układu równań (43+45) przyjmie postać

$$c_v \varphi \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \bar{w} = 0 \quad (46)$$

Wyznaczając pochodną $\frac{dT}{dt}$ z równania Clapeyrona

$$\varphi \frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p - c_v} \left[\frac{dp}{dt} - \left(\frac{p}{\varphi} \right) \frac{d\varphi}{dt} \right] \quad (47)$$

oraz wprowadzając otrzymane wyrażenie do wzoru (46) otrzymamy równanie dopływu ciepła

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\varphi^{\kappa}} = C' \quad (48)$$

nazywane niekiedy warunkiem adiabatyczności w postaci różniczkowej. Z równania (48) otrzymamy

$$p = A \cdot \varphi^{\kappa} \quad (49)$$

gdzie A - stała charakterystyczna dla danego przepływu gazu.

Równanie (48) jest równaniem adiabaty /izentropy/ i określa stałość entropii poruszającego się gazu. Równanie to wynika bezpośrednio ze wzoru (35) dla przepływu gazu nielepkiego i nie przewodzącego ciepła, które można zapisać w postaci

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (50)$$

Równanie (50) jest słuszne dla ruchu bezwrotnego oraz ruchu wirowego, odnosi się do procesów ustalonych i nieustalonych, a więc ma charakter ogólny.

Dla ruchu ustalonego /przepływu/ gazu doskonałego przy założeniu $\bar{w} = 0$ układ równań (43+45) upraszcza się

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (51)$$

$$\operatorname{rot} \vec{w} \times \vec{w} = -\operatorname{grad} 0,5 \vec{w}^2 - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (52)$$

$$\operatorname{grad} 0,5 \vec{w}^2 = -c_v \operatorname{grad} T - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (53)$$

Wykorzystując określenie entalpii $i = c_v T + \frac{p}{\rho}$ równanie zachowania energii zapiszemy w postaci

$$-\operatorname{grad} 0,5 \vec{w}^2 = \operatorname{grad} i \quad (54)$$

Jeżeli wykorzystamy zależność (12) zapisaną dla ruchu ustalonego jako

$$\operatorname{grad} i = T \operatorname{grad} s + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (55)$$

oraz wprowadzimy otrzymaną zależność do wzoru (54), a wyznaczone z tego wzoru wyrażenie $\operatorname{grad} 0,5 \vec{w}^2$ wprowadzimy do równania (52), to otrzymamy

$$\operatorname{rot} \vec{w} \times \vec{w} = T \operatorname{grad} s \quad (56)$$

Jeżeli pomnożymy skalarowo obie strony równania (56) przez $\vec{w}$, to iloczyn skalarowy wektorów $\operatorname{rot} \vec{w} \times \vec{w}$ oraz $\vec{w}$ wobec ich ortogonalności jest równy zero. Ponieważ $T \neq 0$, to równanie (56) uprości się do postaci

$$\vec{w} \cdot \operatorname{grad} s = 0 \quad (57)$$

W ten sposób, kolejno przekształcając, układ równań (43+45) sprowadzono do jednego równania (56). Z równania tego wynika wniosek, że ruch bezwrotny koniecznie powinien być izentropowy w całości.

1.3.6. Równanie Bernoulliego

Jeżeli rzutujemy równanie ruchu ustalonego gazu doskonałego zapisane w postaci Lamba na kierunek prędkości, a więc na linię prądu, to, wobec zniknięcia wyrażenia $(\operatorname{rot} \vec{w} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$, otrzymamy

$$\text{grad}(0,5\bar{w}^2)d\bar{r} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot d\bar{r} + \text{grad } \phi' d\bar{r} = 0 \quad (58)$$

gdzie $d\bar{r} = \bar{w} \cdot dt$ - promień wodzący punkt na linii prądu.

Całkując powyższe wyrażenie otrzymamy równanie Bernoulliego

$$0,5\bar{w}^2 + qz + \int_p \frac{dp}{\rho \Phi(p)} = \text{const} \quad (59)$$

Równanie to słuszne jest wzdłuż rurki /linii/ prądu i z fizycznego punktu widzenia stanowi bilans energii kinetycznej, potencjalnej i wewnętrznej dla przepływu gazu bez tarcia i parametrach aerodynamicznych niezależnych od czasu. Równanie (59) wyraża prawo niezmienności energii. Stała równania Bernoulliego (59) nie zależy od czasu i jest ta sama dla całego pola przepływu gazu. Funkcja ciśnienia zależy od więzi pomiędzy gęstością i ciśnieniem. W rozważaniach przepływu gazu zaniedbujemy zazwyczaj siły masowe w stosunku do sił ciśnienia, co powoduje uproszczenie równania (59)

$$0,5\bar{w}^2 + \int_p \frac{dp}{\rho \Phi(p)} = \text{const} \quad (60)$$

Podczas badania ruchu gazu wzdłuż konkretnej linii prądu znamy stałą, a wielkości $\bar{w}$ oraz p podlegają określeniu. Rozwiązujemy równanie (60) łącznie z równaniem ciągłości.

1.3.7. Przepływ gazu płaski ustalony

Ruch płaski ustalony gazu doskonałego odbywa się w płaszczyźnie przepływu Oxy. Dla takiego ruchu $w_z = 0$ oraz $\Omega_x = \Omega_y = 0$. Uproszczony układ równań (39+41) opisujący zachowanie masy, pędu oraz energii dla takiego przepływu ma postać

$$\frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} = 0 \quad (61)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} 0,5\bar{w}^2 + w_y \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \quad (62)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} 0,5\bar{w}^2 - w_x \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \quad (63)$$

$$w_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho} + w_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\rho} = 0 \quad (64)$$

Równanie (61) wskazuje, że istnieje linia prądu. Jeżeli wprowadzimy do równania linii prądu

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} \quad (65)$$

składowe prędkości $\bar{w}$ w postaci

$$w_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad w_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (66)$$

to otrzymamy

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad (67)$$

Równanie (67) wskazuje, że potencjał prądu jest stały $\psi(x, y) = \text{const.}$ Wynika stąd wniosek, że linie prądu, które wobec ustalonego ruchu gazu, pokrywają się z torami cząstek gazu i pozostają nie zmienione podczas całego ruchu.

Jeżeli pomnożymy składowe w_x i w_y przez w_y i w_x oraz dodamy stronami otrzymane równania, to stały potencjał prądu określa zależność

$$w_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + w_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (68)$$

Rozwiązując układ równań (64) oraz (68) dochodzimy do wniosku, że jacobian układu równań musi być ograniczony i różny od zera, a więc istnieje analityczna zależność funkcji

$$\frac{p}{\rho} = \psi^x(\psi) \quad (69)$$

Łatwo można określić interpretację fizyczną funkcji ψ . Wystarczy wykorzystać wzór (25), z którego po dokonaniu przekształceń otrzymamy

$$S = C_p \ln \psi \quad (70)$$

Mnożąc równanie (62) przez w_x , a równanie (63) przez w_y oraz dodając stronami otrzymamy

$$w_x \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + w_y \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -w_x \frac{\partial}{\partial x} (0,5 \bar{w}^2) - w_y \frac{\partial}{\partial y} (0,5 \bar{w}^2) \quad (71)$$

Jeżeli do wyrazów lewej strony tego równania zastosujemy wzór $z^n dz = dz^{n+1} / (n+1)$ oraz wykorzystamy równanie (65), to wobec zależności

$$w_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + w_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (72)$$

po dokonaniu niezbędnych przekształceń otrzymamy

$$w_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \psi + \frac{w^2}{2} \right) + w_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \psi + \frac{w^2}{2} \right) = 0 \quad (73)$$

Warunek (73) jest spełniony, jeżeli

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \psi + \frac{w^2}{2} = i_0(\psi) \quad (74)$$

Łatwo można dojść do wniosku, że wielkość i_0 jest entalpią sabanowanego gazu ($w=0$)

$$i_0 = \frac{\kappa}{\kappa-1} p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} = c_p T_0 \quad (75)$$

Równanie (75) nazywane jest równaniem całkowym Bernoulliego. Słuszne jest ono dla adiabatyicznego przepływu gazu doskonałego, jeżeli pominie wpływ sił masowych na ruch gazu. Równanie to oznacza, że w przepływie ustalonym energetycznie izolowanym suma energii kinetycznej i potencjalnej pozostaje stałą wzdłuż rurki prądu. Równanie (75) ma zastosowanie szczególnie w tych przypadkach, gdy ściśliwość gazu odgrywa istotne znaczenie, tj. podczas ruchu gazu z prędkościami zbliżonymi do prędkości dźwięku.

Do opisu ruchu gazu z małymi prędkościami używa się równania Bernoulliego (75) dla cieczy nieściśliwej.

Równanie (75) dla izotermicznego przepływu gazu doskonałego redukuje się do postaci

$$\frac{w^2}{2} + RT_0 \ln p = C \quad (76)$$

Jeżeli z równania (75) wyznaczmy w^2 i podstawimy do równania (63) oraz wykorzystamy relację (66), to po dokonaniu pewnych przekształceń otrzymamy równanie

$$\Omega_2 = \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{w_x} \left(\frac{\partial i_0}{\partial y} - \frac{\kappa}{\kappa-1} p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -\rho \left(\frac{d i_0}{d \psi} - \frac{\kappa}{\kappa-1} p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \frac{d \psi}{d \psi} \right) \quad (77)$$

z którego wynika, że gdy $i_0 = \text{const}$ oraz $\psi = \text{const}$, prędkość kątowna $\Omega_2 = 0$, tj. ruch gazu jest bezwirowy. Dla takiego ruchu

$$\frac{d i_0}{d \psi} - \frac{\kappa}{\kappa-1} p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \frac{d \psi}{d \psi} = 0 \quad (78)$$

linie prądu są albo prostymi równoległymi, albo współśrodkowymi okręgami. Z praktycznego punktu widzenia ważnym przypadkiem jest ruch, dla którego $\Omega \neq 0$. Z dwu możliwych kombinacji parametrów i_0 i ψ w dynamice gazowej ważnym jest przypadek $\frac{d i_0}{d \psi} = 0$ oraz $\frac{d \psi}{d \psi} \neq 0$.

1.3.8. Prędkość dźwięku

Drobne zaburzenia prędkości, gęstości lub ciśnienia przenoszą się w gazie w postaci fal. Rozchodzą się one w gazie z pewną stałą prędkością. Przez odcinek czasu dt fala taka pokona drogę dx z prędkością

$$c = \frac{dx}{dt} \quad (79)$$

gdzie: dx – odległość przesunięcia się czoła fali,
 c – prędkość dźwięku w nieruchomym gazie.

Podczas rozchodzenia małych zaburzeń w gazie z prędkością dźwięku nie zawsze występują efekty akustyczne.

Jeżeli gaz porusza się, to ciśnienie i gęstość zależą od położenia elementu gazu względem układu odniesienia. W tym przypadku prędkość c nazywamy lokalną prędkością dźwięku. Prędkość tę można powiązać ze zmianami parametrów fizycznych gazu. Zależność taką otrzymujemy z równań zachowania masy i pędu zapisanych w postaci

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dw}{dx} = 0 \quad (80a)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = - \frac{dp}{dx} \quad (80b)$$

Równania te redukują się do jednego równania

$$c^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{dp}{d\rho} \Big|_s = \text{const} \quad (81)$$

Ponieważ podczas wyprowadzenia tego równania nie nakładano żadnych ograniczeń co do własności fizycznych gazu oraz zmian prędkości, to wzór (81) jest słuszny dla dowolnych małych zaburzeń powstających w dowolnym płynie /gaz lub ciecz/. Wynika stąd wniosek, że parametr c charakteryzuje ściśliwość płynu. Przyjęto, że jeżeli prędkość $w \leq 0,3c$, to gaz można traktować jako nieściśliwy, natomiast przy $w > 0,3c$ gaz uważamy jako ściśliwy.

W ośrodku nieściśliwym duże zmiany ciśnienia wywołują nieznaczne zmiany gęstości i fale dźwiękowe w takim ośrodku rozchodzą się z nieskończenie dużą prędkością. Dla cieczy nieściśliwej $\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0$ i $c = \infty$, więc małe zaburzenia w cieczy nieściśliwej rozchodzą się natychmiast do wszystkich punktów cieczy. Również z dużą prędkością, większą niż prędkość dźwięku, rozchodzą się w cieczy wymuszenia o dużej amplitudzie /fale uderzeniowe/.

W ośrodkach o dużej ściśliwości prędkość dźwięku jest znacznie mniejsza i ma wartość skończoną.

W zależności od warunków w jakich odbywa się przepływ gazu różniamy adiabatyczną i izotermiczną prędkość dźwięku.

W procesie adiabatycznym odbywającym się bez wymiany ciepła z otoczeniem adiabatyczną prędkość dźwięku oblicza się z zależności (48)

$$c = \sqrt{\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_s = \text{const}} = \sqrt{\chi \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\chi RT} \quad (48)$$

W procesie izotermicznym równanie stanu gazu ma postać $p = C$ i izotermiczną prędkość dźwięku oblicza się z zależności

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (49)$$

Rzeczywiste procesy aerodynamiczne, gdzie ciepło wydzielone w wyniku sprężania gazu falą dźwiękową nie przenika w sąsiednie warstwy gazu, mogą być traktowane jako procesy adiabatyczne.

Podstawowe znaczenie w problemach ustalonych dynamiki gazowej ma liczba Macha, określona ilorazem lokalnej prędkości gazu i lokalnej prędkości dźwięku

$$Ma = \frac{w}{c} \quad (50)$$

Klasyczna aerodynamika płynu nieściśliwego przyjmuje $c = \infty$ oraz $Ma = 0$, co oznacza nieskończone wolne przepływy płynu nieściśliwego.

1.3.9. Parametry krytyczne gazu

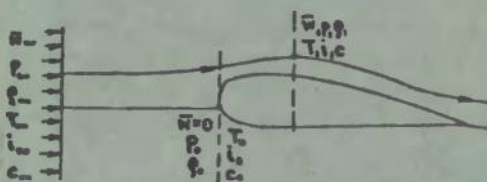
Strumień gazu opływający dowolną powierzchnię stałą opisany jest następującymi parametrami:

$w_\infty, p_\infty, T_\infty, i_\infty, c_\infty, \rho_\infty$ - parametry strumienia nadbiegającego,

$p_0, \rho_0, T_0, i_0, c_0$ - parametry w punkcie pełnego zahamowania,

w, p, ρ, T, i, c - parametry strumienia gazu w obszarze oddziaływania profilu.

Parametry epiętrzenia są stałe,



Rys. 60. Parametry strumienia gazu

Jeżeli strumień jest zahamowany całkowicie bez doprowadzenia energii mechanicznej, tj. dla izolowanego cieplnie przepływu izentropowego. W przypadkach rzeczywistych są straty na tarcie i parametry

te są zmienne.

Obok wymienionych parametrów występują w dynamice gazu parametry krytyczne, wywodzące się z pojęcia prędkości krytycznej. Gaz osiąga prędkość krytyczną, jeżeli jego prędkość w pewnym punkcie przepływu równa jest lokalnej prędkości dźwięku.

Jeżeli uwzględnimy zależności (69) oraz (82) w równaniu (74), to otrzymamy równanie Bernoulliego w postaci

$$0,5\bar{w}^2 + \frac{c^2}{\chi-1} = i_0 \quad (85)$$

gdzie: $\bar{w}$ - lokalna prędkość gazu,
 c - lokalna prędkość dźwięku.

Wykorzystując definicję prędkości krytycznej otrzymamy

$$w_k = c_k = \sqrt{2 \frac{\chi-1}{\chi+1} i_0} \quad (86)$$

gdzie: $\bar{w}_k$ - prędkość krytyczna gazu,
 c_k - prędkość krytyczna dźwięku.

Gaz przepływa z prędkością nadkrytyczną, gdy $w > c_k$, a z prędkością podkrytyczną, gdy $w < c_k$.

Jeżeli gaz jest zahamowany /punkt spiętrzenia/ lub wypływa z dużej pojemności przez mały otwór lub dyszę, to $\bar{w}=0$ i z równania (75) oraz (85) otrzymamy

$$c = \sqrt{i_0(\chi-1)} = \sqrt{c_p(\chi-1)T_0} \quad (87)$$

Ponieważ $\chi > 1$, to $c_k < c_0$.

Wprowadzając (75) oraz (86) do wzoru (85) otrzymamy nową postać równania Bernoulliego

$$\frac{\bar{w}^2}{2} + \frac{c^2}{\chi-1} = \frac{\chi+1}{\chi-1} \frac{c_0^2}{2} \quad (88)$$

Z równania tego wynika, że przy $p=0$

$$w_{\max} = \sqrt{2 i_0} = \sqrt{\frac{\chi+1}{\chi-1}} c_k = \sqrt{\frac{2\chi}{\chi-1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2\chi}{\chi-1} RT_0} \quad (89)$$

Jest to przypadek hipotetyczny, gdy gaz wypływa do obszaru z absolutną próżnią i energia potencjalna gazu sprężonego całkowicie przechodzi w energię kinetyczną. W warunkach próżni kosmicznej taki przypadek jest całkowicie realny.

Dalszy wzrost prędkości gazu powyżej prędkości $\bar{w}_{\max}$ doprowadziłby do "ujemnych ciśnień", a więc do zjawiska kavitacji, tj. do zjawiska naruszania ciągłości przepływu. Wobec powyższego na prędkość gazu

nałożono pewne ograniczenia

$$0 \leq \frac{w}{c} \leq \sqrt{\frac{\chi+1}{\chi-1}} \quad (90)$$

Dzieląc równanie (88) przez w^2 oraz wykonując niezbędne przekształcenia otrzymamy równanie

$$Ma^2 = \frac{2}{\chi-1} \lambda^2 \cdot \frac{1}{\frac{\chi+1}{\chi-1} - \lambda^2} \quad (91)$$

gdzie $\lambda = \frac{w}{C_w}$ - prędkość bezwymiarowa /"współczynnik prędkości"/, z którego wynika, że liczba Macha zmienia się w granicach $[0, \infty]$.

Jeżeli ruch gazu jest izentropowy $\frac{p}{\rho^\chi} = \text{const}$, to łatwo można wyprowadzić następującą zależność

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\chi = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\chi}{\chi-1}} = \left(\frac{2}{\chi+1}\right)^{\frac{\chi}{\chi-1}} \quad (92)$$

stosowane podczas analizy ruchu gazu w przewodach o zmiennym przekroju.

Dysponując gęstością krytyczną oraz prędkością krytyczną można obliczyć krytyczny strumień masowy przepływu gazu

$$G_* = \rho_* w_* S_* \quad (93)$$

Jeżeli uwzględnimy wyrażenie (92), to wielkość G_* można wyrazić przez parametry spiętrzenia

$$G_* = S_* \left(\frac{2}{\chi+1}\right)^{\frac{\chi}{\chi-1}} \cdot \sqrt{\frac{2\chi}{\chi-1}} \cdot \sqrt{p_0 \rho_0} = \left(\frac{2}{\chi-1}\right)^{\frac{\chi}{\chi-1}} \cdot \frac{p_0 c_p}{R T_0} \quad (94)$$

Wzór ten stosuje się w tych przypadkach, gdy $p/p_0 < p_*/p_0$. Jeżeli $p/p_0 > p_*/p_0$, to prędkość przepływu gazu jest mniejsza od krytycznej i G_* wyznacza się ze wzoru (48-1.2.), w którym występującą prędkość gazu w_{kr} wyznacza się ze wzoru Saint-Venanta

$$w_{kr} = \sqrt{\frac{2\chi}{\chi-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}}\right]} \quad (95)$$

Wzór ten wynika z przekształcenia równania Bernoulliego (88) i wykorzystania równań (5) oraz (69).

Wzory (94) oraz (95) otrzymano przy założeniu doskonałego przepływu izentropowego. W przypadkach rzeczywistych wprowadzono pojęcie współczynnika przepływu i wielkość G_* oblicza się ze wzoru

$$G_* = S_* c_G \cdot \left(\frac{2}{\chi+1}\right)^{\frac{\chi}{\chi-1}} \sqrt{\frac{2\chi}{\chi-1}} \cdot \sqrt{p_0 \rho_0} \quad (96)$$

gdzie: $C_G = \alpha \cdot \beta$ - współczynnik przepływu,
 α - współczynnik przewężenia przekroju,
 β - współczynnik prędkości.

Współczynnik β oblicza się ze wzoru

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\beta_1 + \beta_2}} \quad (97)$$

gdzie: β_1 - współczynnik równomierności rozkładu prędkości w przekroju,
 β_2 - współczynnik strat prędkości.

1.3.10. Funkcje mechaniki gazów

Poza parametrami aerodynamicznymi w mechanice gazów używane są funkcje aerodynamiczne, takie jak przepływ unormowany oraz funkcje prędkości bezwymiarowej.

Przepływ unormowany wyrażony jest ilorazem przepływu gazu przy prędkości $\bar{w}$ i krytycznego strumienia masowego gazu

$$q = \frac{G}{S} \cdot \frac{S_w}{G_w} = \frac{S_w}{S} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \lambda \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \frac{S_w}{S} \quad (98)$$

gdzie: S_w - przekrój poprzeczny strumienia w miejscu, w którym $w = c$.

Funkcja prędkości wyrażona jest ilorazem pędu w danym przekroju strumienia i pędu przy prędkości krytycznej strumienia

$$f(\lambda) = \frac{G \cdot w + q S}{\frac{\gamma+1}{2\gamma} G C_s} = \frac{G w + q S}{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_0 S q} \quad (99)$$

Używane są inne postacie tej funkcji

$$f_1(\lambda) = (\lambda^2 - 1) \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (100)$$

$$f_2(\lambda) = \frac{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2}{\lambda^2 + 1} \quad (101)$$

Podczas opracowania wyników pomiarów doświadczalnych używa się ponadto funkcji prędkości bezwymiarowej wyrażonych przez przepływ unormowany oraz ciśnienie.

Funkcja względnej prędkości ciśnienia strumienia ma postać

$$f_3(\lambda) = \frac{q w_0^2}{2 p_0} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \lambda^2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \lambda \cdot q \quad (102)$$

Funkcję wyrażającą zależność pomiędzy statycznym ciśnieniem, a wielkościami λ oraz q opisuje następująca relacja

$$f_4(\lambda) = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{p}{p_0 q} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \lambda^2\right) \quad (103)$$

Na podstawie podanych funkcji wykonywane są różne tablice obliczeniowe, które zamieszczone są w literaturze źródłowej.

1.3.11. Wzory izentropowe

Równanie Bernoulliego (59) słuszne jest dla dowolnej linii prądu lub linii wirowej, a stała tego równania zależy od konkretnej rozpatrywanej linii prądu lub linii wirowej.

Jeżeli przepływ gazu jest izentropowy, to równanie (25) / równanie zachowania energii/ przyjmie postać

$$0,5 \bar{w}^2 + i = C \quad (104)$$

Stałą C równania można wyrazić przez parametry strumienia nadbiegającego /nie zakłóconego obecnością ciała stałego/

$$C = 0,5 w_\infty^2 + i_\infty \quad (105)$$

Zgodnie z równaniem (74) stała C ma sens fizyczny. Oznacza ona entalpię w punkcie pełnego zanamowania strumienia. Można więc zapisać

$$i_0 = 0,5 w_\infty^2 + i_\infty = 0,5 w_\infty^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (106)$$

Wprowadzając określenie i_0 do wzoru (104) oraz zastępując entalpię i przez wyrażenie

$$i = c_p T = \frac{c_p}{R} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = c_v T + \frac{p}{\rho} \quad (107)$$

otrzymany równanie

$$0,5 \bar{w}^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (108)$$

z którego wynika wzór do obliczenia prędkości przepływu wzdłuż strumienia

$$w = C_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (109)$$

Ze wzoru (109) wynika, że prędkość maksymalną strumień gazu osiąga przy $i=0$, tj. gdy całe ciepło zużywa się na przyspieszenie ruchu gazu.

Wykorzystując różne wzory określające różne parametry aerodynamiczne otrzymamy szereg równań wiążących ze sobą te parametry. Wzory te noszą nazwę izentropowych i mają następujące postacie:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{C}{C_0}\right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} = \left(1 - \frac{\bar{w}^2}{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} C_0^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(1 - \frac{\bar{w}^2}{w_{max}^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_0^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (110)$$

$$\frac{P}{P_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{C}{C_\infty}\right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{Ma_\infty^2}{Ma_1^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (111)$$

$$\frac{w}{w_\infty} = 1 + \frac{1}{\kappa-1} \left(\frac{1}{Ma_\infty^2} - \frac{1}{Ma_1^2}\right) \quad (112)$$

We wzorach tych parametry gazu bez indeksów oznaczają wielkości lokalne. Równania (111) oraz (112) należy dopełnić zależnością (92).

Ponieważ parametry hamowania są stałe dla wszystkich punktów strumienia, można zapisać wzory izentropowe dla dowolnych punktów strumienia:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} \cdot \frac{Ma_2}{Ma_1} \quad (113a)$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} \cdot \frac{Ma_2}{Ma_1} \quad (113b)$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_2^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (113c)$$

Wzory izentropowe pozwalają obliczyć błąd jaki popełniamy, jeżeli gaz traktujemy jako cieczy nieściśliwą. Wystarczy rozłożyć w szereg prawą stronę wzorów (110) i utworzyć wyrażenie

$$\epsilon_P = \frac{P_0 - P}{P_0} = \frac{\kappa}{2} \frac{Ma_0^2}{2} + \dots \quad (114)$$

$$\epsilon_q = \frac{q_0 - q}{q_0} = \frac{Ma_0^2}{2} + \dots \quad (115)$$

$$\epsilon_T = \frac{T_0 - T}{T_0} = (\kappa-1) \frac{Ma_0^2}{2} + \dots \quad (116)$$

Ze wzorów (114-116) wynika, że dla gazu ściśliwego błąd wzrasta ze wzrostem liczby Macha.

Wzory izentropowe wyprowadzone zostały przy założeniu, że gaz porusza się przepływem izentropowym w warunkach izolacji cieplnej od

otoczenie, a więc parametry hamowania są stałe. W przepływach rzeczywistych są straty na tarcie, przepływy nie są izentropowe, parametry hamowania są zmienne i wzory izentropowe nie mogą być stosowane do obliczeń.

Wzory (111) oraz (112) mogą być użyte jedynie do określenia lokalnych wartości parametrów przepływu.

1.3.12. Podstawowe równania kinetyki gazu

Ustalony przepływ gazu doskonałego opisują równania

$$\varphi \operatorname{div} \bar{w} + \bar{w} \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad (117)$$

$$\bar{w} \operatorname{grad} \bar{w} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (118)$$

Równania te można sprowadzić do jednego równania. W tym celu należy z równania (117) oraz (118) wyeliminować wielkość $\frac{1}{\rho}$ oraz $\operatorname{grad} \varphi$ i $\operatorname{grad} p$. Jeżeli entalpia gazu nie jest stała w całym obszarze przepływu, to na podstawie równania (25) wyznaczmy $\operatorname{grad} p$ w postaci

$$\operatorname{grad} p = c^2 \operatorname{grad} \varphi + \frac{c^2 \rho}{c_p} \operatorname{grad} s \quad (119)$$

Analizując równanie (117), (118) oraz (119) dochodzimy do wniosku, że równania te dają się zastąpić równaniem w postaci

$$c^2 \operatorname{div} \bar{w} - \bar{w} (\bar{w} \operatorname{grad} \bar{w}) - \frac{c^2}{c_p} \bar{w} \operatorname{grad} s = 0 \quad (120)$$

Równanie (120) ma tę samą postać dla ruchu bezwirowego oraz wirowego. Jeżeli rozpatrujemy przepływ bezwirowy, to operujemy potencjałem prędkości φ . W przypadku ruchu wirowego używamy potencjału prądu ψ .

Zgodnie z warunkiem (57) równanie (120) można przepisać w postaci

$$c^2 \operatorname{div} \bar{w} - \bar{w} (\bar{w} \operatorname{grad} \bar{w}) = 0 \quad (121)$$

Jeżeli rozpatrujemy ruch, dla którego $i_0 = \text{const}$, to wyznaczając z równania Bernoulliego

$$0,5 \bar{w}^2 + \frac{c^2}{\kappa - 1} = i_0 = \text{const} \quad (122)$$

$\operatorname{grad} \bar{w}^2$ oraz wprowadzając otrzymane wyrażenie do równania (121) otrzymamy inną postać równania

$$c^2 \operatorname{div} \bar{w} + \bar{w} \left(\frac{1}{x-1} \operatorname{grad} c^2 \right) = 0 \quad (123)$$

Dla przepływu płaskiego w płaszczyźnie Oxy równanie (121) przyjmie postać

$$c^2 \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) - (i w_x + j w_y) \left[i \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) + j \left(w_y \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (124)$$

Grupując wyrazy przy różnych pochodnych otrzymamy quasi-liniowe równanie

$$(c^2 - w_x^2) \frac{\partial w_x}{\partial x} - w_x w_y \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) + (c^2 - w_y^2) \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (125)$$

nazywane podstawowym równaniem różniczkowym mechaniki gazów lub podstawowym równaniem kinetyki dla płaskiego przepływu gazu.

Jeżeli z równania (88) wyznaczymy wielkość c^2 i wprowadzimy otrzymane wyrażenie do wzoru (125), to otrzymamy

$$\left[(x+1)(c^2 - w_x^2) - (x-1)w_y^2 \right] \frac{\partial w_x}{\partial x} - 2w_x w_y \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) + \left[(x+1)(c^2 - w_y^2) - (x-1)w_x^2 \right] \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (126)$$

Dla przepływu potencjalnego $\bar{w} = \operatorname{grad} \varphi$, równanie (125) przyjmie postać

$$(w_x^2 - c^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2w_x w_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (w_y^2 - c^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (127)$$

Równanie to jest podstawowym równaniem różniczkowym mechaniki gazów dla ustalonego bezwirowego przepływu gazu doskonałego. W celu wyznaczenia wielkości φ , w_x oraz w_y należy rozwiązać układ równań (122) i (127) oraz uwzględnić warunek bezwirowości ruchu

$$\Omega_z = 0 \quad (128)$$

Jeżeli przepływ płaski jest przepływem wirowym, to wykorzystując równania

$$w_x = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right); \quad w_y = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \quad (129)$$

$$\Omega_z = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{x-1}{\rho} \cdot \rho \frac{d\rho}{d\psi} = \frac{x-1}{\rho} \cdot \rho \frac{1}{c_p} \frac{ds}{d\psi} = \frac{\rho}{R} \frac{ds}{d\psi} \quad (130)$$

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = \left(1 + \frac{x-1}{2} Ma^2 \right)^{-\frac{1}{x-1}} \quad (131)$$

$$s = c_v \ln \frac{\rho_0}{\rho} - R \ln \frac{\rho_0}{\rho} + \text{const} \quad (132)$$

$$\frac{d}{d\bar{w}}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) = -\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) \cdot \frac{M_0^2}{\bar{w}} \quad (133)$$

otrzymamy podstawowe równanie kinetyki ruchu wirowego

$$(w_x^2 - c^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2w_x w_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + (w_y^2 - c^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \chi R_g T [(\chi + 1) M_0^2 - 1] \frac{d\varrho}{d\psi} \quad (134)$$

Równanie (134) słuszne jest dla przepływu izolowanego energetycznie nieizentropowego.

Rozwiązanie równań (127) oraz (134) jest problemem trudnym i dla uproszczenia przekształceń matematycznych, przy zachowaniu ogólnego charakteru zjawiska, proponowane są uproszczone modele przepływu. W równaniach (127) oraz (134) gęstość gazu oblicza się z zależności

$$\varrho = \left(1 - \frac{\chi - 1}{2} \bar{w}^2\right)^{\frac{1}{\chi - 1}} \quad (135)$$

Model gazu fikcyjnego po raz pierwszy zaproponował Czapłygin. "Gas Czaplygina" ma $\chi = -1$, a gęstość oblicza się ze wzoru

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{w}^2}} \quad (136)$$

Potencjał prędkości dla takiego gazu wyznacza się z równania

$$(1 + w_y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2w_x w_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (1 + w_x^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (137)$$

Równanie to słuszne jest dla przepływu dźwiękowego. Dla przepływu naddźwiękowego Lawrentiew zaproponował inny model gazu. Gęstość takiego gazu zależy od charakteru przepływu. W przepływie dźwiękowym gęstość jest stała $\varphi = 1$, a w przepływie naddźwiękowym zależy od prędkości przepływu gazu i określa się z zależności $\varrho = (\sqrt{\bar{w}^2 - 1})^{-1}$. Wobec takich uproszczeń równania do obliczenia potencjału prędkości φ oraz potencjału prądu ψ przyjmą postać

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \delta \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (138)$$

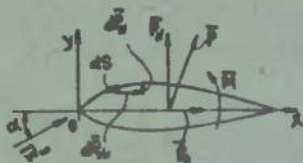
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\delta}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 1} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (139)$$

Równanie (138) oraz (139) słuszne są dla przepływu naddźwiękowego $\delta = 1$ oraz poddźwiękowego $\delta = 0$.

1.3.13. Współczynniki aerodynamiczne

Na ciało omywane strumieniem gazu działa w kierunku przepływu x siła aerodynamiczna, która jest sumą siły oporu czołowego i siły nośnej

$$P = P_{Dx} + P_{Nx} = P_{otr_x} + P_{op_x} + P_{Nx} \quad (140)$$



gdzie: $\vec{P}$ – siła aerodynamiczna,
 P_D – siła oporu czołowego,
 P_N – siła nośna,
 P_{otr} – siła oporu tarcia,
 P_{op} – siła oporu ciśnienia.

Dzieląc każdy wyraz równania

(140) przez ciśnienie dynamiczne

Rys. 61. Siły aerodynamiczne strumienia nadbiegającego oraz powierzchnię charakterystyczną ciała omywanego strumieniem gazu otrzymamy zapis równania (140) przez współczynniki. Jeżeli siły działają na profil prostoliniowy o wymiarach $b \times h$, to

$$C = C_x + C_N = \frac{(P - P_N) \sin \alpha}{\rho \infty w_\infty^2 S_p} + \frac{2(P_r - P_n) \cos \alpha}{\rho \infty w_\infty^2 S_p} \quad (141)$$

gdzie: C_x – współczynnik oporów,

C_N – współczynnik siły nośnej,

α – kąt natarcia strumienia nadbiegającego o prędkości w_∞ ,

p_p – ciśnienie pod profilem,

p_n – ciśnienie nad profilem,

S_p – powierzchnia charakterystyczna /dla płyty $S_p = b \times h$ /.

Współczynniki aerodynamiczne (141) zależą od kształtu ciała, kąta natarcia strumienia nadbiegającego, liczby Macha, liczby Reynoldsa oraz od stopnia burzliwości strumienia.

W zależności od kształtu ciała rozróżniamy ciała dobre przepływowe /płyta równoległa do kierunku w_∞ , cygaro balonu/ oraz ciała złe przepływowe /kula, walec, poprzecznie omywana płyta/.

Przy dużych prędkościach przepływu na opływ ciała wpływa ściśliwość płynu oraz chropowatość powierzchni ciała stałego omywanej gazem. Klasyfikację ciał opływowych oparto na ilorazie siły tarcia działającej na powierzchnię ciała stałego i siły ciśnienia działającej w kierunku strumienia napływającego. Jeżeli iloraz ten jest większy od jedności, to ciało jest opływowe. Wartość współczynnika oporu jest ma-

ła, a opływ zachodzi bez oderwania się strumienia od powierzchni ciała. Jeżeli iloraz ten jest mniejszy od jedności, to ciało jest ile opływowe. Główną część oporu stanowi opór ciśnienia, tj. opór wirowy.

Podczas przepływu może wystąpić oderwanie się warstwy strumienia od powierzchni profilu. Jeżeli spadek ciśnienia na warstwie jest większy od dopuszczalnej wartości granicznej dla danego przepływu, to w tym punkcie strumień gazu odchyła się od powierzchni ciała stałego i odrywa się z wytworzeniem obszaru, w którym gaz płynie w stronę przeciwną niż strumień główny. Przepływ po oderwaniu się od powierzchni jest nieustalony. W obszarze tworzą się wiry. Obszar przemieszcza się po powierzchni, a w strumieniu występuje silna pulsacja prędkości i parametrów przepływu.

1.3.14. Podobieństwo aerodynamiczne procesów fizycznych

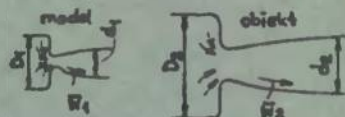
Charakterystyki aerodynamiczne procesów fizycznych można wyznaczyć albo przez rozwiązanie układu równań (15+17) lub (19+22,26), albo na podstawie pomiarów doświadczalnych. Formułowanie równań dla konkretnych kształtów przestrzeni zamykającej przepływ lub znajdujących się w strumieniu gazu nie obejmuje wielkości przestrzeni, a więc może ona mieć dowolne wymiary absolutne. Doświadczenie rzadko udaje się zrealizować dla strumienia lub ciała stałego wielkości naturalnej. Problem przeliczania charakterystyk aerodynamicznych, wyznaczonych na podstawie pomiarów zrealizowanych przy użyciu modelu na procesy fizyczne naturalnej wielkości, ujęto w teorii podobieństwa i modelowania. Teoria ta rozpatruje uogólnione zmiennne opisujące proces fizyczny. Zmiennne te wynikają z równań mechaniki gazu.

Z teorii podobieństwa i modelowania wynika, że przeliczanie charakterystyk jest możliwe, jeżeli procesy przepływu gazu są podobne. Jeżeli parametry aerodynamiczne pomierzone zostały w podobnych czasowo-przestrzennych warunkach, to praktyczny sens podobieństwa polega na możliwości wyrażenia tych parametrów dla jednego przepływu przez parametry drugiego przepływu. Przeliczanie parametrów polega na pomnożeniu ich przez współczynniki podobieństwa lub współczynniki przekształcenia.

Do niezależnych współczynników podobieństwa zalicza się skalę wymiarów geometrycznych (315-1.2), skalę czasu (316-1.2) oraz skalę temperatury

$$T_{\text{obiektu}} = M_T \cdot T_{\text{modelu}}$$

(142)



Rys. 62. Podobieństwo geometryczne

gdzie m_T - skala temperatury.

Współczynniki te określają źródło zasilania oraz prostotę i niezawodność pomiaru. Pozostałe współczynniki są wyrażone przez m_L, m_t oraz m_T .

Przykładowo, dla lepkości współczynnik przeliczenia wyrażono przez skalę temperatury

$$\eta_\mu = \frac{1}{\sqrt{m_T}} \quad (143)$$

gdzie m_μ - skala lepkości.

W zagadnieniach aeromechaniki używane są również bezwymiarowe kombinacje parametrów procesu fizycznego, nazywane liczbami kryterialnymi.

W procesach przepływu gazu duże znaczenie ma ściśliwość i dlatego wprowadzono nowe kryterium, nie stosowane w przypadku cieczy, charakteryzujące względne oddziaływanie ściśliwości na przepływ gazu. Kryterium tym jest liczba Macha

$$Ma_\infty = \frac{w_\infty}{c_\infty} \quad (144)$$

gdzie: w_∞ - prędkość przepływu gazu w strumieniu nadbiegającym /nie zakłóconym/,

c_∞ - prędkość dźwięku w nie zakłóconym strumieniu gazu

$$c_\infty = \sqrt{\kappa_\infty R_\infty T_\infty} \quad (145)$$

Liczba Macha określona jest ilorazem siły bezwładności i siły ciśnienia. Zależy ona od ściśliwości gazu.

Odnosząc parametry fizyczne do odpowiednich wielkości charakterystycznych otrzymamy parametry bezwymiarowe

$$\begin{aligned} \bar{v}^* &= \frac{\bar{v}}{L_0}; \bar{t}^* = \frac{t}{t_0}; \bar{w}^* = \frac{\bar{w}}{w_0}; \bar{p}^* = \frac{p}{p_0}; \bar{F}^* = \frac{F}{g}; \bar{s}^* = \frac{s}{s_0}; \bar{\mu}^* = \frac{\mu}{\mu_0}; \\ \bar{i}^* &= \frac{i}{c_{p,\infty} T_\infty}; \bar{T}^* = \frac{T}{T_\infty}; \bar{c}_p^* = \frac{c_p}{c_{p,\infty}}; \bar{\lambda}^* = \frac{\lambda}{\lambda_0}; \bar{S}_\mu^* = \frac{S_\mu}{\mu_0 w_0}; \bar{\Delta}^* = \frac{\Delta}{L_0^3} \end{aligned} \quad (146)$$

gdzie: ∞ - indeks oznaczający wielkość charakterystyczną określoną dla strumienia nadbiegającego nie zakłóconego,

L_0 - charakterystyczny wymiar liniowy, np. długość opływającego ciała stałego,

$*$ - indeks oznaczający wielkość bezwymiarową.

Wprowadzając parametry bezwymiarowe do równań zachowania masy, pędu oraz energii (15+17) oraz grupując wielkości bezwymiarowe w postaci kryteriów podobieństwa otrzymamy równania ($\xi^1=0, Q=0$)

$$\frac{1}{S} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \operatorname{div}^*(\rho^* \vec{w}^*) = 0 \quad (147)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \rho^* \frac{\partial \vec{w}^*}{\partial t^*} + \rho^* (\vec{w}^* \operatorname{grad}^*) \vec{w}^* - \frac{1}{Fr} \rho^* \vec{F}^* - \frac{1}{\chi_\infty Ma} \operatorname{grad}^* p^* + \\ + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{1}{3} \mu^* \operatorname{grad}^* \operatorname{div}^* \vec{w}^* + \mu^* \Delta^* \vec{w}^* - \frac{2}{3} \operatorname{div}^* \vec{w}^* \operatorname{grad}^* \mu^* + 2 T^* \operatorname{grad}^* \mu^* \right\} \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \rho^* c_v^* \left(\frac{1}{S} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \vec{w}^* \operatorname{grad}^* T^* \right) = (\chi_\infty - 1) T^* \left(\frac{\partial p^*}{\partial T^*} \right)_{v^*} \operatorname{div}^* \vec{w}^* + \frac{1}{Re Pr} \operatorname{div}^* (\lambda^* \operatorname{grad}^* T^*) + \\ + \frac{\chi_\infty (\chi_\infty - 1)^2}{R} (S \mu^* : T^*) \end{aligned} \quad (149)$$

Jeżeli wyrazimy energię przez entalpię, to otrzymamy równanie, które wyraża zasadę zachowania entalpii

$$\begin{aligned} \rho^* \left(\frac{1}{S} \frac{\partial i^*}{\partial t^*} + \vec{w}^* \operatorname{grad}^* i^* \right) = \frac{1}{S} \frac{(\chi_\infty - 1)}{\chi_\infty} \cdot \frac{dp^*}{dt^*} + \frac{1}{S} Ma^2 (\chi_\infty - 1) (S \mu^* : T^*) + \\ + \frac{Ma^2 (\chi_\infty - 1)}{Br Re} \frac{\lambda^*}{c_p^*} \operatorname{div}^* (\operatorname{grad}^* i^*) \end{aligned} \quad (150)$$

Do bezwymiarowego równania zachowania masy (147), pędu (148) oraz energii (150) należy dołączyć dodatkowe równanie mechaniki gazu (37), sprowadzone do postaci bezwymiarowej

$$\left(\frac{p_\infty}{\rho_\infty T_\infty} \right)^* = S^* T^* \quad (151a)$$

$$\lambda^* = f_1(p_\infty, p^*, T_\infty, T^*) \cdot \frac{1}{\lambda_\infty} \quad (151b)$$

$$\mu^* = f_2(p_\infty, p^*, T_\infty, T^*) \cdot \frac{1}{\mu_\infty} \quad (151c)$$

$$c^* = f_3(p_\infty, p^*, T_\infty, T^*) \cdot \frac{1}{c_{p_\infty}} \quad (151d)$$

$$i^* = f_4(p_\infty, p^*, T_\infty, T^*) \cdot \frac{1}{c_{p_\infty} T_\infty} \quad (151e)$$

Jeżeli rozpatrzymy dwa strumienie przepływające w zamkniętych kanałach lub omijające dwa geometrycznie podobne ciała stałe, to badane układy będą podobne, jeżeli spełniona jest równość kryteriów podobieństwa

$$S_1 = S_2; Fr_1 = Fr_2; \chi_{\infty 1} = \chi_{\infty 2}; Ma_1 = Ma_2; Re_1 = Re_2; Pr_1 = Pr_2; Br_1 = Br_2 \quad (152)$$

W konkretnych przypadkach modelowania zjawisk aeromechaniki nie zawsze udaje się spełnić wszystkie warunki podobieństwa i wówczas możemy mówić jedynie o niepełnym podobieństwie zjawisk. Siła aerodynamiczna, pęd lub strumień ciepła gazu zależą od wielu przebiegają-

cych równocześnie procesów, tak że nie należy dążyć do spełnienia maksymalnej liczby kryteriów. W praktyce realizuje się modelowanie przybliżone oparte na dwóch wzajemnie powiązanych własnościach procesów fizycznych rzeczywistych:

- należy proces realizować tak, aby stopniowo osłabiać wpływ pewnych czynników fizycznych na przebieg zjawiska,
- proces należy doprowadzić do takiego stanu, aby osłabić wpływ nie - których czynników fizycznych w pewnym zakresie ich zmian.

Kryterium podobieństwa Frouda nie ma istotnego wpływu na przepływ gazu i może być pominięte w modelowaniu zjawisk aeromechaniki.

Jeżeli gaz przepływa z małą prędkością ($Ma \leq 0,2 + 0,4$), to ściśliwość nie wpływa istotnie na ruch gazu, a więc kryterium podobieństwa Macha również można wyłączyć z zestawu (152).

Jeżeli ścianki ciała stałego są gładkie, to przy dużych liczbach Reynoldsa współczynnik oporu nie zależy od liczby Reynoldsa i liczbę tę można nie uwzględniać w zestawie (152).

1.3.15. Zakresy przepływu gazu

Jeżeli jako kryterium klasyfikacji przepływów przyjmiemy liczbę Reynoldsa, to wyróżniamy:

- przepływ gazu z formującą się warstwą przyścienną ($Re \gg 1$),
- przepływ gazu bez powstawania warstwy przyściennej ($Re \ll 1$).

Przepływ gazu w warunkach tworzenia się warstwy przyściennej określony jest liczbą Knudsen

$$Kn = \frac{l}{\delta} \quad (153)$$

gdzie: l - średnia swobodna droga cząstki gazu,
 δ - grubość warstwy.

W przepływach bez warstwy przyściennej liczbę Knudsen określa się w postaci

$$Kn = \frac{l}{L} \quad (154)$$

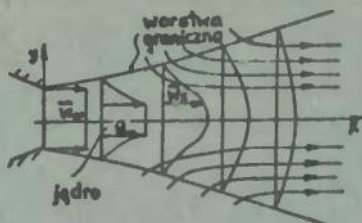
gdzie L - wymiar liniowy zjawiska przepływowego.

W zależności od wartości liczby Knudsen wyróżniamy:

- przepływ ciągły ($Kn \leq 0,01$),
- przepływ półciągły ($0,01 \leq Kn \leq 1$),
- przepływ przejściowy ($1 < Kn \leq 10$),
- przepływ swobodno-molekularny ($Kn > 10$).

W przepływie ciągłym, wobec małej długości drogi swobodnej - czą-

tek, zakłócenie wynikające ze zderzeń cząstek ze ścianką przekazywane są natychmiast na wszystkie cząstki gazu. Gaz traktowany jest jako zwarty ośrodek ciągły.



Rys. 63. Swobodny przepływ burzliwy

Zakres przepływu przejściowego charakteryzuje się tym, że w jednakowym stopniu zachodzi zderzenie sprężyste cząstek pomiędzy sobą i zderzenie cząstek ze ścianką.

W przepływie poślizgowym większe znaczenie ma zjawisko zderzenia cząstek pomiędzy sobą. Cząstki po zderzeniu się ze ścianką i odbiciu się przebiegają drogę współmierną z

wymiarem charakterystycznym zjawiska. W zakresie wartości wielkości L prędkość cząstek zmienia się nieustannie. Gaz nie przykleja się do ścianki zamykającej przepływ lub do ścianki ciała stałego umieszczonego w strumieniu gazu. Gaz w pobliżu granicy ślizga się po powierzchni z pewną małą prędkością, mniejszą od prędkości na granicy warstwy przyściennej. W pobliżu ścianki pojawia się składowa normalna odrywająca strumień gazu od ścianki. W zakresie takiego przepływu ruch gazu opisywać można układem równań (15-17), z tym jednak zastrzeżeniem, że warunki graniczne muszą uwzględniać ewentualne nieciągłości prędkości, temperatury oraz ciśnienia na powierzchni ciała stałego.

Jeżeli średnia droga swobodna jest dużo większa od wymiaru charakterystycznego, to gaz traktujemy jako ośrodek silnie rozrzedzony i hipoteza o ciągłości ośrodka nie może być zastosowana. Pojęcie liczby Reynoldsa nie ma sensu, ponieważ zderzenia cząstek są bardzo rzadkie, a więc lepkość praktycznie nie występuje. Należy rozpatrywać nie wpływ ciała gazem, a zjawisko uderzenia cząstek gazu o powierzchnię ciała stałego. Jednak w praktyce w przepływie swobodno-molekularnym zakłada się, że ilość cząstek jest wystarczająco duża i można operować makroskopowymi własnościami gazu określonymi dla całego przepływającego strumienia. Parametry przepływu takiego gazu określone są prawem rozkładu Maxwella.

Jeżeli jako kryterium klasyfikacji przepływów przyjmiemy liczbę Macha, to wyróżniamy:

- przepływ gazu, który można traktować jako przepływ cieczy nieściśliwej ($Ma \sim 0$),
- przepływ poddźwiękowy ($0 < Ma < 1$),
- przepływ mieszany ($Ma \sim 1$), w którym w różnych punktach pola prędkości może być $Ma > 1$ lub $Ma < 1$,
- przepływ nadźwiękowy ($Ma > 1$).

- przepływ hiperdźwiękowy ($Ma \gg 1$).

Wymienione przepływy zawarte są w zakresie zmian prędkości ruchu gazu i prędkości dźwięku

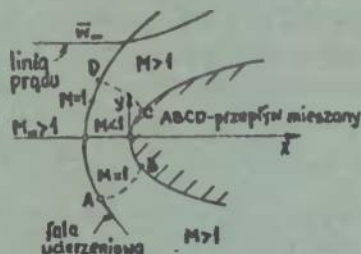
$$0 \leq \bar{w} \leq \bar{w}_{\max} \quad (155)$$

$$0 \leq c \leq c_0 \quad (156)$$

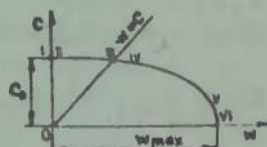
Równanie wiążące te wielkości wynika ze wzorów (85) oraz (86). Odpowiednie przekształcenie tych wzorów daje równanie wiążące prędkości (155) oraz (156)

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 + \left(\frac{\bar{w}}{\bar{w}_{\max}}\right)^2 = 1 \quad (157)$$

Równanie (157) nazywane jest równaniem elipsy prędkości i słuszne jest wzdłuż linii prądu.

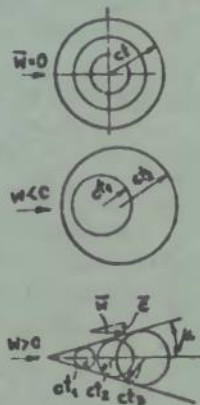


Rys. 64. Przepływy gazu



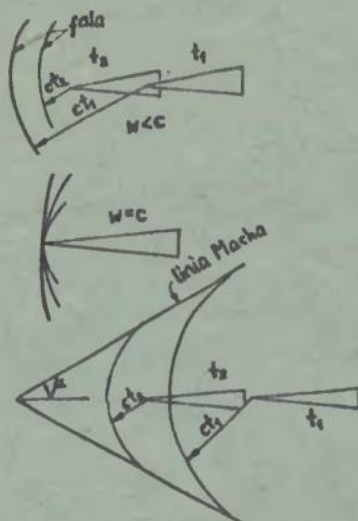
Rys. 65. Elipsa prędkości

Jeżeli w strumieniu gazu w czasie omijania przeszkody zmienia się ciśnienie, to przeszkodę taką nazywamy źródłem zakłócenia, a zmianę ciśnienia-zakłócenie. Zakłócenie takie w nieruchomym gazie $\bar{w}=0$ rozchodzi się w postaci sferycznych fal dźwiękowych. Jeżeli gaz opływający źródło zakłócenia ma prędkość $w < c$, to fala dźwiękowa przesuwana się w kierunku ruchu gazu. Środek feli przesuwana się z prędkością $w < c$, a wymuszenia będą rozprzestrzeniać się również w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu gazu. Jeżeli rozpatrujemy poruszające się ciało stałe, to przy $w < c$ najpierw usłyszymy falę dźwiękową, a później zoba-



Rys. 66. Fale dźwiękowe w gazie

czyły poruszające się ciało. W szczególnym przypadku ruchu gazu z



Rys. 67. Źródło zakłócenia

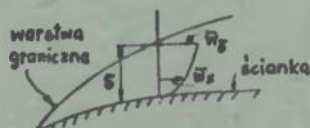
się z zależności

$$\sin \mu = \frac{1}{Ma} \quad (158)$$

gdzie μ - kąt zakłócenia.

1.3.15.1. Uwarstwiony przepływ gazu

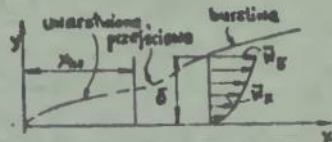
Przy opływie ciał stałych na skutek lepkości gazu w pobliżu powierzchni pojawia się cienka warstewka gazu, w której występuje gradient prędkości w kierunku normalnym do powierzchni. Mechanizm powstawania warstwy przyściennej i kształtowania się przepływu w tej warstwie jest złożony. Elementy gazu przyczepiają się do powierzchni ciała stałego tak, że ich prędkość względna jest równa zero. Nie może istnieć poślizg gazu, bo zjawisku temu musiałyby towarzyszyć nieograniczenie wielkie siły styczne. Gradient prędkości w warstwie maleje ze wzrostem odległości od powierzchni ciała. Wirowość ruchu ogranicza



Rys. 68. Parametry warstwy przyściennej

ze wzrostem odległości od powierzchni ciała. Wirowość ruchu ogranicza

się głównie do warstwy przyściennej. Grubość warstwy określa się umownie i nie jest ona stała, a narasta stopniowo w miarę oddalenia się od punktu zakłócenia. Obszar warstwy granicznej i strefa przepływu głównego nie są izolowane i wzajemnie oddziałują na siebie. Obszar oddziaływania nazwano warstwą przejściową, w której nieznaczony stan przepływu przechodzi w stan zrównoważony, charakteryzujący się rozwiniętym przepływem burzliwym. Grubość warstwy przejściowej określa się z zależności



Rys. 69. Rodzaje warstw

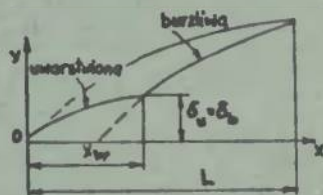
$$\delta_p^* = \frac{Re - Re_{kr}}{Re_p} \quad (109)$$

gdzie: Re, Re_{kr}, Re_p - lokalna, krytyczna i przejściowa liczba Reynolda,

δ_p^* - bezwymiarowa grubość warstwy przysciennej.

Kryterialne liczby Reynolda obliczono dla prędkości ruchu gazu na zewnętrznej granicy warstwy. W liczbach tych jako wymiaru liniowego użyto odpowiednio bieżącą grubość warstwy, początkową grubość warstwy oraz grubość warstwy przejściowej. W momencie powstawania grubość warstwy $\delta^* = 0$.

Przepływ w warstwie granicznej może być uwarstwiony lub burzliwy. W przepływie uwarstwowym drobne zakłócenia zanikają. Kinematyczna struktura nie zmienia się. Przepływ jest stabilny. Jeżeli drobne zakłócenia narastają, to kinematyczna struktura przepływu zmienia się i przepływ staje się nieustalony. W warstwie granicznej pojawia się przepływ burzliwy. Gradient ciśnienia oraz krzywizna i chropowatość powierzchni w znacznym stopniu wpływają na przejście przepływu uwarstwowego w burzliwy.



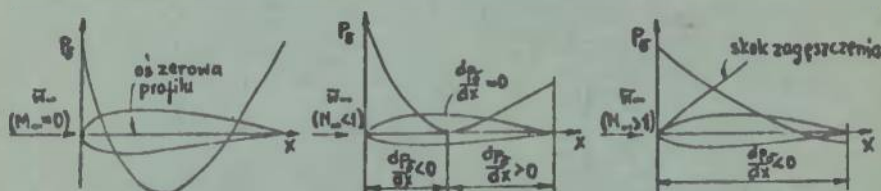
Rys. 70. Przejście uwarstwowanej warstwy granicznej w burzliwą

Bezpośrednią przyczyną przejścia przepływu uwarstwowego w burzliwy jest zakłócenie zewnętrzne oddziałujące głównie na rozkład ciśnienia w warstwie granicznej. Ciśnienie to jest sumą składników

$$P_c = P_{c_0} + P_a + P_d \quad (100)$$

gdzie: P_{c_0} - ciśnienie stanu ustalonego obliczone przy założeniu braku tarcia w gazie,

- p_0 - uśrednione ciśnienie wywołane burzliwością na granicy warstwy,
 p_a - uśrednione ciśnienie wywołane zaburzeniem akustycznym na granicy warstwy,
 p_d - uśrednione ciśnienie ruchu wirowego powstające na nierównościach powierzchni.



rys. 71. Zmiana ciśnienia na profilu

Równanie (160) po zróżniczkowaniu przyjmie postać

$$\frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial p_a}{\partial x} + \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial p_d}{\partial x} = 0 \quad (161)$$

Roszczególne składniki tego równania wyznacza się ze wzorów

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} \sim \delta \frac{w'^2}{l_s} \quad (162)$$

$$\frac{\partial p_a}{\partial x} \sim \frac{\rho_\infty w_\infty^2}{2} \frac{Eu_\infty}{l_a} \quad (163)$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial x} \sim \frac{\rho_d w_d'^2}{l_d} \quad (164)$$

gdzie: w' - średniokwadratowa wartość pulsacji prędkości gazu,

l - wymiar liniowy wiru,

δ - dotyczy granicy warstwy przejściowej,

∞ - dotyczy strumienia niezakłóconego,

a - dotyczy zakłócenia akustycznego,

d - dotyczy zakłócenia wywołanego chropowatością powierzchni.

Przepływ uwarstwiony gazu lepkiego doskonałego opisują równania ciągłości, ruchu oraz bilansu energii. Jeżeli założymy, że gaz spełnia uogólnioną hipotezę Newtona o liniowości tensora prędkości deformacji i tensora naprężeń, a ponadto:

- dynamiczny współczynnik lepkości gazu zależy tylko od absolutnej temperatury gazu,

- ciepło właściwe gazu jest stałe,
- współczynnik przewodnictwa cieplnego jest proporcjonalny do dynamicznego współczynnika lepkości /liczba Prandtla jest stałą fizyczną gazu/.

to równania ciągłości i równanie ruchu dla warstwy granicznej zapiszemy w postaci

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} = 0 \quad (165)$$

$$\rho \frac{\partial w_x}{\partial t} + \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{d p_x}{d x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \quad (166)$$

Równanie bilansu energii warstwy granicznej wynika z przekształceń równania (34), które możemy zapisać w postaci

$$\rho \frac{d i}{d t} = \frac{d p}{d t} + 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{\partial w_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2 \right\} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{\rho_r} \frac{\partial i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\rho_r} \frac{\partial i}{\partial y} \right) \right] \quad (167)$$

Analizując wyrazy $\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2$ oraz $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\rho_r} \frac{\partial i}{\partial y} \right)$ dochodzimy do wniosku, że są one wyższego rzędu niż pozostałe czony prawej strony równania (167). Zachowując te wyrazy równanie bilansu energii przyjmie postać

$$\rho \frac{d i}{d t} = \frac{d p}{d t} + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\rho_r} \frac{\partial i}{\partial y} \right) \quad (168)$$

Wyznaczając z równania (166) $\frac{d p}{d t}$

$$-\frac{d p}{d t} = -\frac{d p_x}{d t} = -w_x \frac{d p_x}{d x} = \rho w_x \left[w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \right] \quad (169)$$

oraz wprowadzając wyrażenie (169) do równania (168) otrzymamy

$$\frac{d i}{d t} = -\frac{w_x}{2} \frac{\partial w_x^2}{\partial x} - \frac{w_y}{2} \frac{\partial w_x^2}{\partial y} + \frac{w_x}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\rho_r} \frac{\partial i}{\partial y} \right) \quad (170)$$

Równanie to dla warstwy płaskiej można zapisać w postaci

$$\rho \frac{d}{d t} (i + 0,5 w_x^2) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{\rho_r} \frac{\partial}{\partial y} (i + 0,5 w_x^2) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho_r} \right) \frac{\partial w_x^2}{\partial y} \right] \quad (171)$$

Jeżeli wprowadzimy do tego równania określenie entropii nazowa-
nia (106)

$$i + 0,5 w_x^2 = i_0 \quad (172)$$

to równanie (171) przepisujemy w postaci ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$)

$$\varrho w_x \frac{\partial i_0}{\partial x} + \varrho w_y \frac{\partial i_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial i_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial w_x}{\partial y} \right] \quad (173)$$

$$\text{gdzie: } i_0 = c_p T_0 + 0,5 w_\infty^2 \quad (174)$$

W celu wyznaczenia rozkładu prędkości i temperatury w lepkiej warstwie granicznej należy rozwiązać łącznie równania (165, 166) oraz (173). Do układu tych równań należy dołączyć równanie stanu gazu w warstwie granicznej

$$P_0 = \varrho R T = \frac{x-1}{x} \varrho \cdot i \quad (175)$$

Jeżeli płaska powierzchnia jest izolowana cieplnie ($Pr=1$), to przy $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ równanie ruchu i bilans energii mają podobne postacie

$$\varrho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \varrho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \quad (176)$$

$$\varrho w_x \frac{\partial i_0}{\partial x} + \varrho w_y \frac{\partial i_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial i_0}{\partial y} \right) \quad (177)$$

Jeżeli wprowadzimy zmienne i_0 oraz w_x do równań (176) oraz (177)

$$\underline{i_0} = \frac{i_0 - i_{0c}}{i_{0\delta} - i_{0c}} ; \quad \underline{w_x} = \frac{w_x}{w_\delta} \quad (178)$$

gdzie i_{0c} - dotyczy temperatury ścianki,

to otrzymamy równania tożsamościowe równe sobie, ponieważ wielkości i_0 oraz w_x spełniają te same warunki graniczne

$$\underline{i_0} = 0 ; \quad \underline{w_x} = 0 \quad \text{dla } y=0 \quad (179a)$$

$$\underline{i_0} = 1 ; \quad \underline{w_x} = 1 \quad \text{dla } y=\delta \quad (179b)$$

Stąd wniosek, że funkcje te są sobie równe

$$\frac{i_0 - i_{0c}}{i_{0\delta} - i_{0c}} = \frac{w_x}{w_\delta} \quad (180)$$

a więc przy $Pr=1$ w warstwie granicznej profile prędkości i entalpii są podobne.

Jeżeli użyjemy temperatury hamowania oraz przyjmiemy $Pr=1$ i założymy liniową zależność pomiędzy lepkością i temperaturą, to równanie (177) przyjmie postać

$$\varrho w_x \frac{\partial T_0}{\partial x} + \varrho w_y \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) \quad (181)$$

gdzie $T_0 = T + \frac{W_x^2}{2c_p}$ - temperatura hamowania.

Jeżeli do równania (181) wprowadzimy nową zmienną $\underline{T}$

$$\underline{T} = \frac{T_0 - T_{0c}}{T_{0s} - T_{0c}} \quad (182)$$

to łatwo dojdziemy do wniosku, że otrzymane równanie (182) i równanie (176) są tożsamościowo równe, ponieważ wielkość $\underline{T}$ spełnia takie same warunki graniczne jak wielkości i_0 oraz $\frac{W_x}{W_{1s}}$

$$\underline{T} = 0 \text{ dla } y = 0 \quad (183a)$$

$$\underline{T} = 1 \text{ dla } y = \delta \quad (183b)$$

Z podobieństwa równań (176) oraz (181) wynika podobieństwo profili prędkości i temperatury w lepkiej warstwie granicznej pod warunkiem, że w warstwie granicznej gazu nie zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem.

Równanie (181) ma całkę

$$T_0 = \text{const} \quad (184)$$

lub

$$c_p T + 0,5 \bar{W}^2 = c_p T_0 + 0,5 W_{1s}^2 \quad (185)$$

Używając wzorów (75) oraz (76), całkę (185) można zapisać w postaci

$$\frac{T}{T_{1z}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \left(1 - \frac{W_x^2}{W_{1z}^2} \right) \quad (186)$$

gdzie i_z - oznacza przemianę izentropową.

Jeżeli liczba $Fr \neq 1$, to całka równania bilansu energii (167) przyjmie postać

$$\frac{T}{T_{1z}} = 1 + \sqrt{Pr} - \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \left(1 - \frac{W_x^2}{W_{1z}^2} \right) \quad (187)$$

gdzie $Pr = \frac{4\gamma}{9\gamma-5}$ - liczba Prandla dla gazu.

Warstwę graniczną, dla której parametry aerodynamiczne nie zmieniają się wzdłuż współrzędnej x ($\frac{d}{dx} \approx 0$) nazwano asymptotyczną warstwą graniczną.

Dla ruchu płaskiego układ równań (165+167) oraz warunki graniczne zapiszemy w postaci

$$\frac{d(\xi W_x)}{dy} = 0 \quad (188)$$

$$\varrho w_y \frac{dw_x}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{dw_x}{dy} \right) \quad (189)$$

$$\varrho w_y \frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{dT}{dy} \right) \quad (190)$$

$$w_x = w_y = 0; \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{dla } y=0 \quad (191)$$

$$w_x = w_\infty; \frac{\partial T}{\partial y} = 0; T = T_\infty \quad \text{dla } y=\delta \quad (192)$$

Jeżeli gaz ślizga się po powierzchni ciała stałego, a powierzchnia jest porowata, to warunek graniczny dla prędkości ruchu gazu na powierzchni ciała stałego ($y=0$) ma postać

$$w_x = w_{x0}; w_y = -w_0 \quad \text{dla } y=0 \quad (193)$$

gdzie: w_{x0} - składowa styczna prędkości gazu na powierzchni ciała stałego,

w_0 - składowa normalna prędkości ruchu gazu na powierzchni ciała stałego /prędkość przepuszczania gazu przenikalną powierzchnią/.

Równania (188), (189) oraz (190) opisują płaską warstwę graniczną. Przestrzenna warstwa graniczna występuje w pobliżu punktu spiętrzenia. Jeżeli powierzchnia ciała stałego w otoczeniu punktu spiętrzenia jest regularna, to umieszczając początek współrzędnych w punkcie $\bar{w}=0$, osie x, y w płaszczyźnie stycznej do powierzchni ciała stałego, a oś z prostopadle do tej płaszczyzny, otrzymamy układ równań dla trójwymiarowej warstwy granicznej

$$\text{div}(\varrho \bar{w}) = 0 \quad (194)$$

$$\varrho \bar{w} \text{grad } w_x = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial z} \right); \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (195)$$

$$\varrho \bar{w} \text{grad } w_y = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \quad (196)$$

$$\varrho c_p \bar{w} \text{grad } T = w_x \frac{\partial P}{\partial x} + w_y \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu c_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (197)$$

Układ równań (194-197) zamyka zależność

$$\mu = \mu(T) \quad (198)$$

Jeżeli równanie (195) pomnożymy przez w_x , a równanie (196) przez w_y oraz dodamy stronami, to otrzymamy

$$\varphi \bar{w} \operatorname{grad} i = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial i}{\partial z} \right) \quad (199)$$

W równaniu (195) oraz (196) wyrażenia $\mu \frac{\partial w_x}{\partial z}$ oraz $\mu \frac{\partial w_y}{\partial z}$ określają wzdłużną i poprzeczną składową lokalnego naprężenia tarcia na powierzchni ciała stałego.

Jeżeli przepływ na zewnątrz warstwy jest izentropowy, to

$$(\operatorname{rot} \bar{w}_g) \bar{w}_g + T_g \operatorname{grad} s = 0 \quad (200)$$

a w przypadku przepływu bez silnych nieciągłości równanie (200), upraszcza się do postaci

$$(\operatorname{rot} \bar{w}_g) \bar{w}_g = 0 \quad (201)$$

z którego wynika, że składowe wektora wirowości są równe zero. Na zewnątrz warstwy obowiązują wówczas wzory

$$-\frac{1}{\bar{g}_g} \frac{\partial p_g}{\partial l} = \bar{w}_g \frac{\partial \bar{w}_g}{\partial l} \quad (202)$$

$$\frac{p_g}{\bar{g}_g} + 0,5 \bar{w}_g^2 = \text{const} \quad (203)$$

gdzie l - element linii prądu.

Teoria warstwy granicznej jest teorią asymptotyczną i staje się ściłą, gdy $\mu \rightarrow 0$.

1.3.15.2. Przepływ burzliwy gazu

W pobliżu ścianki ciała stałego występuje lepka warstwa gazu, która nie jest całkiem uwarstwiona, ponieważ penetrowana jest przez wiry z sąsiedniej warstwy burzliwej. Pomiędzy warstwą przyścienną o przepływie uwarstwionym a zewnętrzną granicą warstwy granicznej pojawia się warstwa generująca pulsacje prędkości gazu. Ponadto warstwa ta oddzielona jest od bezwirowego strumienia gazu podwarstwą o przepływie nieustalonym i dużym stopniu burzliwości. Jeżeli burzliwość rozprzestrzenia się na cały przepływ, to w strumieniu gazu pojawiają się pulsacje przepływu. Jeżeli zewnętrzny strumień gazu jest burzliwy, to stabilizujący wpływ sił lepkości występujący w warstwie lepkiej zanika stopniowo i w rdzeniu burzliwym obserwuje się znaczny wpływ sił masowych. W występującej warstwie burzliwej w porównaniu z warstwą lepką profil prędkości jest bardziej uformowany, grubość

warstwy jest większa, a opór tarcia jest znacznie większy.

Parametry aerodynamiczne dla warstwy burzliwej mogą być zapisane w postaci

$$\xi = \xi_0 + \xi'; \quad p = p_0 + p'; \quad \bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}'; \quad \bar{Q} = \bar{Q}_0 + \bar{Q}' \quad (204)$$

Podstawiając wielkości (204) do układu równań (19+21) oraz wykonując operację uśrednienia (178-1.2) otrzymamy

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\xi_0 w_{i0} + \xi' w'_i}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (205)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{\bar{w}_0^2 + \bar{w}'^2}{2} \right) - [\bar{w}_0 \times \text{rot} \bar{w}_0] - [\bar{w}' \times \text{rot} \bar{w}'] = - \left(\frac{1}{\rho} \text{grad} p \right) + \nu \Delta \bar{w}_0 + \frac{\nu}{2} \text{grad} \text{div} \bar{w}_0 \quad (206)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\xi_0 w_{i0} + \xi' w'_i}{\partial x_i} \right) + (\chi - 1) (\rho_0 \text{div} \bar{w}_0 + \rho' \text{div} \bar{w}') = \\ = (\chi - 1) \sum_i \sum_j \left(\bar{S}_{ij}^2 : \bar{T}_{ij}^2 \right)' + \frac{\lambda(\chi - 1)}{R} \text{div} \text{grad} \left(\frac{\bar{p}}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (207)$$

Z układu równań (19+21) oraz (205+207) wynika nowy układ równań opisujący pulsację parametrów

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial (\xi_0 w'_{i0} + \xi' w'_{i0} + \xi' w'_i - \xi' w'_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (208)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}'}{\partial t} + \text{grad} \left[\frac{(2 \bar{w}_0 \bar{w}' + \bar{w}'^2 - \bar{w}'^2)}{2} \right] - [\bar{w}' \times \text{rot} \bar{w}_0] - [\bar{w}_0 \times \text{rot} \bar{w}'] - [\bar{w}' \times \text{rot} \bar{w}'] - \\ - [\bar{w}' \times \text{rot} \bar{w}'] = - \left(\frac{1}{\rho} \text{grad} p \right)' + \nu \Delta \bar{w}' + \frac{\nu}{2} \text{grad} \text{div} \bar{w}' \end{aligned} \quad (209)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\rho_0 w'_i + \rho' w_{i0} + \rho' w'_i - \rho' w'_i}{\partial x_i} \right) + (\chi - 1) (\rho' \text{div} \bar{w}_0 + \rho_0 \text{div} \bar{w}' + \rho' \text{div} \bar{w}' - \\ - \rho' \text{div} \bar{w}') = (\chi - 1) \sum_i \sum_j \left(\bar{S}_{ij}^2 : \bar{T}_{ij}^2 \right)' + \frac{\lambda(\chi - 1)}{R} \text{div} \text{grad} \left(\frac{p'}{\rho} \right)' \end{aligned} \quad (210)$$

Jeżeli do równania ruchu w układzie równań (208+210) zastosujemy operację rot oraz wprowadzimy podstawienie

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} \frac{c^2}{\chi - 1} - \frac{c^2}{\chi - 1} \text{grad} \frac{\xi}{\rho} \quad (211)$$

to otrzymamy równanie określające wirowość

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\zeta}'}{\partial t} - \text{rot} [(\bar{w}' \times \text{rot} \bar{\zeta}_0) + (\bar{w}_0 \times \text{rot} \bar{\zeta}') - (\bar{w}' \times \text{rot} \bar{\zeta}')] + \\ + (\bar{w}' \times \text{rot} \bar{\zeta}') = \text{rot} \left(\frac{c^2}{\chi - 1} \text{grad} \frac{\xi}{\rho} \right)' + \nu \Delta^2 \bar{\zeta}' \end{aligned} \quad (212)$$

Analiza przedstawionych równań doprowadza do następujących wniosków:

- pulsacyjne składowe parametrów strumienia gazu $\bar{q}'$, $\bar{p}'$ oraz potencjalna składowa prędkości rozchodzą się w strumieniu z prędkością dźwięku i są w strumieniu tłumione,
- składowa wirowa prędkości gazu w wyniku działania lepkości ulega dyfuzji,
- oddziaływanie wzajemne izobarycznych i izentropowych powierzchni wywołuje powstanie nowych wirowych pulsacji wektora prędkości gazu.

Jeżeli rozpatrzmy burzliwą warstwę graniczną, to równania upraszczają się. W wyniku przeprowadzenia podobnej analizy jak przy wyprowadzeniu równania Prandtla otrzymamy równanie burzliwej warstwy granicznej w postaci uproszczonej

$$\frac{\partial \bar{q} \bar{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q} \bar{w}_y}{\partial y} = 0 \quad (213)$$

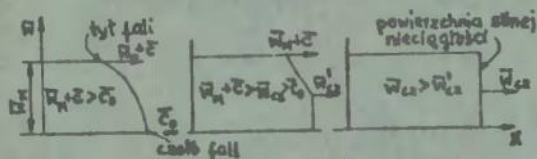
$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{q} \bar{w}_x \bar{w}_y') \quad (214)$$

$$c_v \bar{q} (\bar{w}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}) - \bar{w}_x \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2 + \lambda \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial \bar{w}_y}{\partial y} \right)^2 \quad (215)$$

1.3.15.3. Dźwiękowy i naddźwiękowy przepływ gazu

Przepływ dźwiękowy i naddźwiękowy występują, gdy prędkość gazu jest współmierna z prędkością dźwięku lub ją przewyższa $Ma \gg 1$. Dla

takich przepływów charakterystyczne jest występowanie powierzchni nieciągłości, na której mogą występować nieciągłości parametrów aerodynamicznych lub ich pochodnych. Powierzchnie nieciągłości /powierzchnie



Rys. 72. Formowanie się silnej nieciągłości

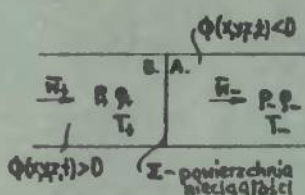
osobliwe/ nie są materialne. Masa i ciepło przenika przez taką powierzchnię, a szybkość rozchodzenia się powierzchni może być określona szybkością zajęcia procesu fizycznego. W układach wielofazowych powierzchnie rozdziału faz jest powierzchnią osobliwą.

Rozróżniamy powierzchnie słabej i silnej nieciągłości. Powierzchnie

nia osobliwa, na której elementy aerodynamiczne są ^{nie}ciągłe nazywamy powierzchnią silnej nieciągłości. Jeżeli przy przejściu przez powierzchnię osobliwą parametry aerodynamiczne są ciągłe, a pochodne względem współrzędnych przestrzeni lub czasu rozpoczynając od pewnego rzędu są nieciągłe, to mamy powierzchnię słabej nieciągłości.

1.3.15.3.1. Prędkość przemieszczania się i prędkość rozchodzenia się powierzchni nieciągłości

Jeżeli w obszarze zajęty przez poruszający się gaz pojawi się po-



wierzchnia nieciągłości o równaniu $f(x,y,z,t) = 0$, to na takiej powierzchni wystąpi nieciągłość parametru aerodynamicznego lub jego pochodnych. Przed powierzchnią nieciągłości /obszar A/ oraz za powierzchnią nieciągłości /obszar B/ nieciągłość elementów aerodynamicznych oznacza się następująco:

Rys. 73. Powierzchnia nieciągłości

$$A. \Phi(x,y,z,t) < 0 \quad b = b_-; \frac{\partial b}{\partial x} = \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_-; \frac{\partial b}{\partial t} = \left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)_- \quad (216)$$

$$B. \Phi(x,y,z,t) > 0 \quad b = b_+; \frac{\partial b}{\partial x} = \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_+; \frac{\partial b}{\partial t} = \left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)_+ \quad (217)$$

gdzie b - dowolny parametr aerodynamiczny określony w obszarze przepływu gazu.

Na granicy rozdziału obszarów na powierzchni nieciągłości skok parametru b lub jego pochodnych oznacza się następująco: .

$$[b] = b_+ - b_- \quad (218)$$

$$\left[\frac{\partial b}{\partial x}\right] = \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_- \quad (219)$$

$$\left[\frac{\partial b}{\partial t}\right] = \left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)_+ - \left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)_- \quad (220)$$

Obszar przepływu $\Phi(x,y,z,t) = 0$ będzie zmieniał swoje położenie z biegiem czasu. Jeżeli na powierzchni Σ wybierzemy dowolny punkt $M(x,y,z)$, to przez odcinek czasu Δt w gazie nieruchomym punkt ten przesunie się z powierzchnią nieciągłości na odległość $\Delta \bar{M}$. Stąd prędkość przemieszczania się powierzchni nieciągłości określa wyrażenie

$$\bar{N}' = U_m \frac{\Delta \bar{M}}{\Delta t} \quad (221)$$

Nowe położenie powierzchni Σ opisuje funkcja

$$\{ (x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t) = 0 \quad (222)$$

Jeżeli długość łuku $\Delta \bar{M}$ zastąpimy przez różniczkę oraz rozłożymy wyrażenie (222) w szereg Taylora i rozpiszemy tylko część liniową rozkładu, to otrzymamy

$$\begin{aligned} \{ (x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t) = 0 &= \{ (x + \frac{\Delta \bar{M}}{|\bar{f}|} \{x, y + \frac{\Delta \bar{M}}{|\bar{f}|} \{y, \\ z + \frac{\Delta \bar{M}}{|\bar{f}|} \{z, t+\Delta t) &= \{ (x, y, z, t) + \frac{\Delta \bar{M}}{|\bar{f}|} |\bar{f}|^2 + \{t \Delta t + R(\Delta \bar{M}^2) + R(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (223)$$

gdzie: $|\bar{f}| = \sqrt{\{x^2 + \{y^2 + \{z^2}$

$$\{x = \frac{\partial f}{\partial x}; \{y = \frac{\partial f}{\partial y}; \{z = \frac{\partial f}{\partial z}; \{t = \frac{\partial f}{\partial t}$$

Po odrzuceniu członów nieliniowych $R(\Delta \bar{M}^2)$ oraz $R(\Delta t^2)$ i uwzględnieniu wzoru (221) otrzymamy

$$N = - \frac{\{t}{|\bar{f}|} \quad (224)$$

Prędkość N nazywamy prędkością przemieszczania się powierzchni nieciągłości od jednej cząstki do drugiej, gdy gaz jest w spoczynku.

Jeżeli prędkość gazu jest $\bar{w}$, to powierzchnia nieciągłości rozchodzi się z prędkością $\bar{\theta}$

$$\bar{\theta} = \bar{N} - \bar{w}_n \quad (225)$$

gdzie $\bar{w}_n$ - rzut prędkości przepływu gazu na normalną do powierzchni Σ w punkcie M .

1.3.15.3.2. Rozchodzenie się słabych nieciągłości

W przypadku słabych nieciągłości sam fakt istnienia nieciągłości pochodnych parametrów aerodynamicznych zmusza do powiązania nieciągłości pochodnych pewnymi warunkami. Są to warunki geometrycznego, a dokładniej-kinematycznego obrazu ruchu i są wyprowadzane niezależnie od równań aerodynamiki.

Jeżeli w obszarze przepływu parametr aerodynamiczny b jest ciąg-

ły, lecz na powierzchni Σ o równaniu $f(x, y, z, t) = 0$ pochodne są nieciągłe, to we wszystkich punktach płaszczyzny Σ oraz dla dowolnego momentu czasu powinno być

$$\left[\frac{\partial b}{\partial t} \right] = \mu_b \frac{\partial f}{\partial t} \quad (226)$$

$$[\nabla b] = \mu_b \nabla f \quad (227)$$

gdzie μ_b - współczynnik kolinearności.

Z równań (226) oraz (227) wynika, że aby wyznaczyć nieciągłości wszystkich pochodnych należy znać tylko jedną funkcję μ_b .

Jeżeli w równaniu (226) oraz (227) wprowadzimy zamiast $f_t = -N |f|$ oraz $\nabla f = \bar{n} |f|$, to kinematyczne warunki zgodności przyjmą postać

$$\left[\frac{\partial b}{\partial t} \right] = -\lambda_b N \quad (228)$$

$$[\nabla b] = \lambda_b \bar{n} \quad (229)$$

gdzie: $\lambda_b = \mu_b |f|$,

$\bar{n}$ - normalna do powierzchni nieciągłości skierowana w stronę obszaru

Parametry aerodynamiczne, których pochodne doznają nieciągłości na powierzchni Σ , w obszarach (216+217) spełniają równania mechaniki gazu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{w} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \bar{w} = 0 \quad (230)$$

$$-\operatorname{grad} p = \rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{w} \operatorname{grad} \bar{w} \right) \quad (231)$$

$$\rho \frac{\partial p}{\partial t} - \chi \rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \bar{w} \operatorname{grad} p - \chi \rho \bar{w} \operatorname{grad} \rho = 0 \quad (232)$$

Jeżeli zastosujemy wzory (228) oraz (229) do tych równań, to dla przypadku występowania słabych nieciągłości równanie ciągłości, równanie ruchu oraz równanie bilansu energii zapiszemy w postaci

$$-\lambda_b N + w_n \lambda_\rho + \rho \lambda_w \bar{n} = 0 \quad (233)$$

$$\lambda_p \bar{n} = \rho \lambda_w N - w_n \lambda_w \rho \quad (234)$$

$$-\rho \lambda_p N + \chi \rho \lambda_\rho N + \rho w_n \lambda_p - \chi \rho w_n \lambda_\rho = 0 \quad (235)$$

Układ równań (233), (234) oraz (235) można sprowadzić do jednego

równania

$$(N - w_n)^2 - \theta^2 = \chi \frac{P}{\xi} - c^2 \quad (236)$$

Z równania (236) wynika wniosek, że słabe nieciągłości rozchodzą się z prędkością dźwięku.

Jeżeli mamy do czynienia z ruchem ustalonym, to powierzchnia słabej nieciągłości jest nieruchoma w przestrzeni, tj. jej prędkość przemieszczania się jest równa zero ($N=0$). Wobec tego na takiej powierzchni mamy

$$\theta - |w_n| = c \quad (237)$$

a więc drobne zaburzenia spełniają równania aeromechaniki i rozchodzą się w gazie z lokalną prędkością dźwięku. Zaburzenia takie wywołują prostą falę sprężania, którą można rozpatrywać jako skok zagęszczenia lub falę uderzeniową o nieskończenie małej intensywności. Praktycznie uważać można, że prędkość gazu po obu stronach powierzchni Σ jest taka sama, a parametry aerodynamiczne po przejściu przez powierzchnię słabej nieciągłości nie zmieniają się.

1.3.15.3.3. Rozchodzenie się silnych nieciągłości

Jeżeli gaz porusza się z dużą prędkością, to mogą zaistnieć warunki, w których na pewnej powierzchni płynnej przemieszczającej się w obszarze przepływu powstaną nieciągłości parametrów aerodynamicznych/ciśnienie, prędkość, gęstość, entalpia i inne elementy/. Fizycznie oznacza to, że tworzy się fala, którą nazwano falą zagęszczeniową lub falą uderzeniową. Falę taką można traktować jako wynik doganiania się wysyłanych po sobie kolejno słabych fal zagęszczenia. Powierzchnia nieciągłości /czoło fali uderzeniowej/ może być płaska lub zakrzywiona i mieć różną orientację względem kierunku wektora prędkości gazu.

Wskutek lepkości zmiany parametrów odbywają się bardzo gwałtownie, a więc niematerialna powierzchnia nieciągłości jest bardzo cienką warstwą rzędu drogi swobodnej cząstki. W obliczeniach praktycznych przy założeniu, że gaz jest termodynamicznie doskonały, grubość powierzchni nieciągłości przyjmuje się równą zero.

Najprostszą postacią takiej powierzchni jest płaszczyzna prostopadła do kierunku wektora prędkości.

W najogólniejszym przypadku za falą uderzeniową w wyniku ogrzania się gazu jego pojemność cieplna zmienia się, wzbudzają się drgania, występuje dysocjacja i jonizacja cząstek oraz zachodzą reakcje che-

miczne. Proces przejścia przez uskok małej grubości charakteryzuje się bardzo dużym gradientem prędkości i temperatury. W obszarze Σ -fazy istotny wpływ na zjawisko nieodwracalnych strat energii kinetycznej ma tarcie i przewodnictwo cieplne. Za falą uderzeniową część energii kinetycznej gazu praktycznie natychmiast przechodzi w energię wewnętrzną, a więc przy przejściu gazu przez falę zagęszczeniową entropia gazu wzrasta i obniża się ciśnienie statyczne. Skok entropii gazu zmienia stan gazu w uskoku. Gaz jest w stanie nierównoważonym, a parametry aerodynamiczne przez pewien odcinek czasu zależą od czasu.

Najprostszy przypadek jest zjawisko, w którym przemiany fizykochemiczne zachodzą bardzo szybko i stan równowagi termodynamicznej ustala się natychmiast.

Oznaczając nieciągłość parametrów symbolem $[]$ w równaniach ciągłości, ruchu i bilansu energii otrzymamy

$$[\varphi\theta] = 0 \quad (238)$$

$$\varphi\theta[w_n] = [p] \quad (239)$$

$$\varphi\theta[0,5w_n^2 + c_v T] = [p w_n] \quad (240)$$

Układ równań (238), (239) oraz (240) nazwano warunkami zgodności dynamicznej /warunki Rankine'a i Hugoniot'a/. Przez zgodność rozumiemy w tym przypadku zgodność dwu ruchów z parametrami w_+, p_+, T_+ oraz w_-, p_-, T_- . Do układu równań (238+240) dołączyć należy związek określający zmianę entropii gazu w obszarze płynnym

$$\varphi\theta[s] \geq 0 \quad (241)$$

Jeżeli okazałoby się, że w pewnym momencie czasu w gazie utworzyła się powierzchnia silnej nieciągłości, której parametry aerodynamiczne po obu stronach powierzchni Σ są różne, lecz nie związane warunkami dynamicznej zgodności, to taka powierzchnia dalej nie mogłaby istnieć i powstałby wybuch.

W przypadku fali nieruchomej ($\dot{H}=0$) układ równań (238+240) można zastąpić jednym równaniem. Jeżeli skorzystamy z równania (225), przy założeniu $\dot{H}=0$, i z równania (238) oraz wyznaczymy parametr $[w_n]$ i podstawimy otrzymane wyrażenie do wzoru (239), to otrzymamy wzór na rozchodzenie się powierzchni nieciągłości

$$\theta_-^2 = \frac{\varphi_+ (p_+ - p_-)}{\varphi_- (\varphi_+ - \varphi_-)} = \frac{\varphi_+ [p]}{\varphi_- [\varphi]}; \quad \theta_+^2 = \frac{\varphi_- [p]}{\varphi_+ [\varphi]} \quad (242)$$

gdzie: $\bar{\theta}$ - prędkość rozchodzenia się powierzchni nieciągłości,
 - - dotyczy parametru przed falą uderzeniową,
 + - dotyczy parametru za falą uderzeniową.

W celu wyeliminowania wielkości $[p]/[\rho]$ należy skorzystać z równania Clapeyrona i równania Mayera oraz równania bilansu energii (240), które można zapisać w postaci

$$0,5 \bar{\theta} [\bar{w} \bar{w}] + \frac{\bar{\theta}}{\chi-1} \left[\frac{p}{\rho} \right] = [p w] \quad (243)$$

Mnożąc równanie (239) skalarowo przez $(w_+ + w_-)$ oraz zastępując we wsorze (243) wyrażenie $[\bar{w} \cdot \bar{w}]$ i grupując odpowiednie wyrazy otrzymamy

$$-(P_+ + P_-) [w] = \frac{2 \bar{\theta} [p]}{\chi-1 [\rho]} \quad (244)$$

Wobec zależności (225), przy $N=0$, równanie (238) zapiszemy w postaci

$$[w] = -[\theta] = -\left[\frac{\bar{\theta}}{\rho} \right] = -\bar{\theta} \left[\frac{1}{\rho} \right] \quad (245)$$

Rozpatrując układ równań (244) oraz (245) dochodzimy do równania

$$\frac{P_+ + P_-}{2} \left[\frac{1}{\rho} \right] + \frac{1}{\chi-1} \left[\frac{p}{\rho} \right] = 0 \quad (246)$$

Korzystając z zależności

$$\left[\frac{p}{\rho} \right] = \left(\frac{P_+}{\rho_+} - \frac{P_-}{\rho_-} \right); \left[\frac{1}{\rho} \right] = \left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-} \right) \quad (247)$$

oraz sprowadzając składniki wyrażenia do wspólnego mianownika otrzymamy równanie adiabaty Hugoniota w postaci

$$\frac{P_+}{P_-} = \frac{(\chi-1) \rho_+ - (\chi-1) \rho_-}{(\chi+1) \rho_- - (\chi-1) \rho_+} \quad (248)$$

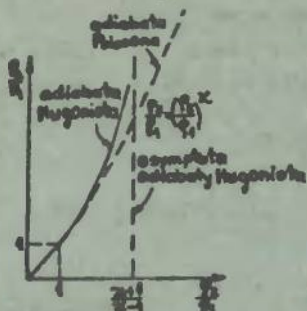
lub

$$\frac{\rho_+}{\rho_-} = \frac{(\chi+1) P_+ + (\chi-1) P_-}{(\chi+1) P_- + (\chi-1) P_+} \quad (249)$$

Wsory te wyrażają jednoznaczną zależność pomiędzy ciśnieniami i gęstościami po obu stronach fali uderzeniowej. Za pomocą tych wsorów można wyznaczyć jedną z czterech wielkości, jeżeli znane są trzy pozostałe.

Dla $P_+/P_- = 1$ mamy $\rho_+ = \rho_-$, a więc adiabatą Hugoniota pokrywa się z izentropą. W punkcie $P_+/P_- = 1$ oraz $\rho_+/\rho_- = 1$ adiabatą Hugoniota i adiabatą Poissona ($P/\rho^\chi = \text{const}$) są do siebie styczne. Stąd wniosek,

że słabe fale zagęszczeniowe mogą być traktowane jako przepływy izentropowe. Poza punktem styczności adiabatą Hugoniota i termodynamiczną adiabatą Poissona różnią się pomiędzy sobą. Różnica polega na tym, że w adiabatce doskonałej $\frac{p_+}{p_-}$ może wzrastać nieograniczenie przy wzroście p_+/p_- . Adiabatą uderzeniową przy wzroście p_+/p_- dąży asymptotycznie do granicy. Przy zadanych wartościach p_- oraz φ_- dla fali uderzeniowej o dużej amplitudzie ($\frac{p_+}{p_-} \rightarrow \infty$) stosunek gęstości jest



Rys. 74. Adiabatą Hugoniota

ograniczony

$$\frac{\rho_+}{\rho_-} = \frac{\chi+1}{\chi-1} \quad (250)$$

i dla gazów dwuatomowych ($\chi = 7/5$) maksymalne zagęszczenie jest sześciokrotne.

$$\frac{\rho_+}{\rho_-} = 6 \quad (251)$$

Jeżeli od obu stron równania (248) oraz (249) odejmiemy jedynkę, to otrzymamy

$$\frac{[p]}{[\varphi]} = \frac{2 \chi p_-}{(\chi+1)\varphi_- - (\chi-1)\varphi_+} \quad (252)$$

$$\frac{[p]}{[\varphi]} = \frac{(\chi+1)p_- + (\chi-1)p_+}{2\varphi_-} \quad (253)$$

Zastępując we wzorze (242) iloraz $\frac{[p]}{[\varphi]}$ wyrażeniem (252) otrzymamy

$$\theta_-^2 = \chi \frac{p_-}{\varphi_-} \cdot \frac{2\varphi_+}{(\chi+1)\varphi_- - (\chi-1)\varphi_+} \quad (254)$$

Podobnie za falą uderzeniową wielkość θ_+^2 wyznacza się z zależności

$$\theta_+^2 = \chi \frac{p_+}{\varphi_+} \cdot \frac{2\varphi_-}{(\chi+1)\varphi_+ - (\chi-1)\varphi_-} \quad (255)$$

Wzory (254) oraz (255) wskazują, że prędkość rozchodzenia się silnych nieciągłości zawsze jest różna od lokalnej prędkości dźwięku. Ze wzorów tych wynika, że prędkość w_n (245) co najmniej z jednej strony powierzchni Σ przewyższa prędkość dźwięku. Stąd nieruchoma powierzchnia silnej nieciągłości może istnieć tylko przy prędkościach

naddźwiękowych.

Wykorzystując zależność (25) możemy obliczyć różnicę pomiędzy entropią za falą uderzeniową i przed falą uderzeniową

$$S_+ - S_- = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[\ln \left(\frac{P_+}{P_-} \right) - \ln \left(\frac{\rho_+}{\rho_-} \right) \right] = \frac{R}{\kappa - 1} \ln \left(\frac{P_+ / \rho_+^\kappa}{P_- / \rho_-^\kappa} \right) \quad (256)$$

Wynika stąd wniosek, że podczas ruchu gazu według adiabaty doskonałej ($P/\rho^\kappa = P_-/\rho_-^\kappa$) entropia pozostaje stała $S_+ - S_- = 0$, natomiast przy przejściu przez powierzchnię silnej nieciągłości, zgodnie z drugą zasadą termodynamiki, entropia wzrasta

$$S_+ - S_- > 0 \quad (257)$$

Z nierówności (257) wynika, że

$$\frac{P_+}{P_-} > \frac{\rho_+^\kappa}{\rho_-^\kappa} \quad (258)$$

Zależność (257) oznacza, że fali uderzeniowej nie można traktować jakoprzepływu izentropowego. Występują procesy przemiany energii mechanicznej w energię cieplną.

Nierówność (258) jest spełniona, jeżeli

$$\frac{P_+}{P_-} \geq 1; \quad \frac{\rho_+}{\rho_-} \geq 1 \quad (259)$$

Warunek (259) oznacza, że drugą zasadę termodynamiki spełniają tylko zagęszczeniowe fale uderzeniowe, w których ciśnienie za falą uderzeniową jest większe od ciśnienia przed falą. Jeżeli podczas ruchu gazu powstałaby rozrzedzeniowa fala uderzeniowa, to dla takiej fali $S_+ - S_- < 0$, co jest sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki. Stąd wniosek, że powstanie rozrzedzeniowej fali uderzeniowej fizycznie jest niemożliwe.

Wykorzystując znane zależności wiążące parametry aerodynamiczne można przeanalizować zachowanie się tych parametrów po przejściu fali zagęszczeniowej.

Jeżeli $N=0$, to $\Theta = -w_n$ i równanie ciągłości zapiszemy w postaci

$$\rho_+ w_{n+} - \rho_- w_{n-} = 0 \quad (260)$$

Z warunku (259) oraz równania (260) wynika

$$\frac{w_{n+}}{w_{n-}} = \frac{\rho_-}{\rho_+} \leq 1 \quad (261)$$

co oznacza, że prędkość gazu maleje po przejściu fali uderzeniowej.

Korzystając z zależności (107) można wyrugować temperaturę T_0 wzoru (240) i drogą kolejnych przekształceń otrzymać związek pomiędzy prędkościami gazu po obu stronach fali uderzeniowej.

Na podstawie wzorów (68) oraz (107) otrzymamy

$$\frac{w_{n+}^2}{2} + \frac{\chi}{\chi-1} \frac{p_+}{\rho_+} = \frac{w_{n-}^2}{2} + \frac{\chi}{\chi-1} \frac{p_-}{\rho_-} = \frac{\chi+1}{\chi-1} \frac{c_n^2}{2} \quad (262)$$

Z równania (262) wynika

$$i_+ > i_- \quad (263)$$

co oznacza, że entalpia gazu wzrasta po przejściu fali uderzeniowej. Wzrasta również temperatura gazu

$$T_+ > T_- \quad (264)$$

ponieważ jest proporcjonalne do entalpii (107).

Jeżeli z równania (262) wyznaczmy ilorazy p_+/ρ_+ oraz p_-/ρ_- i wprowadzimy otrzymane wyrażenia do równania (240) zapisanego w postaci

$$w_{n-} - w_{n+} = \frac{p_+ - p_-}{\rho_- w_{n-}} = \frac{p_+}{\rho_+ w_{n+}} - \frac{p_-}{\rho_- w_{n-}} \quad (265)$$

to otrzymamy

$$w_{n-} - w_{n+} = \frac{1}{w_{n+}} \left(\frac{\chi-1}{2\chi} c_n^2 - \frac{\chi-1}{2\chi} w_{n+}^2 \right) - \frac{1}{w_{n-}} \left(\frac{\chi-1}{2\chi} c_n^2 - \frac{\chi-1}{2\chi} w_{n-}^2 \right) \quad (266)$$

Rozwiązanie $[w_n] = 0$ powyższego równania oznacza ruch gazu bez fali uderzeniowej. Z pozostałego rozwiązania wynika związek pomiędzy prędkościami gazu po obu stronach fali uderzeniowej

$$w_{n+} \cdot w_{n-} = c_n^2 \quad (267)$$

lub

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- = 1 \quad (268)$$

Wobec warunku (261) z równania (267) otrzymamy związek

$$w_{n-} > c_n; w_{n+} < c_n \quad (269)$$

co oznacza, że w płaskiej prostopadłej fali uderzeniowej prędkość gazu po stronie czołowej fali jest zawsze nadkrytyczna, a po stronie tylnej zawsze podkrytyczna. Prosty skok zagęszczeniowy jest więc formą

przejścia od przepływu naddźwiękowego do przepływu dodźwiękowego.

Wykorzystując równanie (108) możemy zapisać równanie Bernoulliego po obu stronach fali uderzeniowej

$$\frac{\chi}{\chi-1} \frac{P_{0-}}{\rho_{0-}} = \frac{\chi}{\chi-1} \frac{P_-}{\rho_-} + \frac{W_{n-}^2}{2} = \frac{\chi}{\chi-1} \frac{P_+}{\rho_+} + \frac{W_{n+}^2}{2} = \frac{\chi}{\chi-1} \frac{P_{0+}}{\rho_{0+}} \quad (270)$$

Analizując związki (92) i (110) zapisane dla przepływu po obu stronach fali uderzeniowej oraz związek (270), po wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymamy, przy założeniu $\chi=1$, nierówność

$$P_{0-} > P_{0+} \quad (271)$$

która oznacza, że ciśnienie spiętrzenia gazu maleje po przejściu fali uderzeniowej. Warunek (271) wynika z warunku (263).

Wykorzystując znane wzory wiążące ze sobą elementy aerodynamiczne możemy zapisać następujące relacje

$$\frac{P_+}{P_-} = \frac{\chi+1}{2} \frac{Ma_-^2}{1 + \frac{\chi-1}{2} Ma_-^2} = \frac{2}{\chi+1} \frac{1 + \frac{\chi-1}{2} Ma_+^2}{Ma_+^2} \quad (272)$$

$$\frac{P_+}{P_-} = 1 + \frac{2\chi}{\chi-1} (Ma_-^2 - 1) = 1 - \frac{Ma_+^2 - 1}{Ma_+^2 - \frac{\chi-1}{2\chi}} \quad (273)$$

$$\frac{T_+}{T_-} = \frac{c_+^2}{c_-^2} = \frac{1 + \frac{2\chi}{\chi-1} (Ma_-^2 - 1)}{\frac{\chi+1}{2} \frac{Ma_-^2}{1 + \frac{\chi-1}{2} Ma_-^2}} = \frac{1 - \frac{Ma_+^2 - 1}{Ma_+^2 - \frac{\chi-1}{2\chi}}}{\frac{2}{\chi-1} \frac{1 + \frac{\chi-1}{2} Ma_+^2}{\chi Ma_+^2 - \frac{\chi-1}{2}}} \quad (274)$$

Parametry T_0, c_0, c_∞ oraz i_0 pozostają stałe po przejściu fali uderzeniowej. Niezmiennność temperatury hamowania T_0 przy przejściu przez powierzchnię silnej nieciągłości oznacza, że część energii mechanicznej, która przemieniła się w energię cieplną, nie rozproszyła się i energia całkowita nie zmieniła się.

1.3.16. Uogólnione równanie Hugoniota

Rozpatrzmy przepływ gazu obwarowany następującymi założeniami:

- przepływ gazu jednowymiarowy wzdłuż osi x / $\delta \text{ rad} = \frac{d}{dx}$ /,
- przepływ gazu ustalony / $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ /,

- parametry fizyczne gazu są stałe w przekroju strumienia,
- wobec małej gęstości gazu, oddziaływanie sił masowych na ruch gazu pominięto $/F=0/$,
- strumień masy G zmienia się na skutek przecieku masy przez porowatą powierzchnię ograniczającą strumień przepływającego gazu,
- otoczenie oddziałując na strumień gazu $/A_z=0, q_2=0/$.

Wobec takich założeń równanie ciągłości wyznaczone ze wzoru (48), po uprzednim zlogarytmowaniu i zróżniczkowaniu, równanie bilansu energii mechanicznej (13) oraz równanie Bernoulliego (74) przyjmą odpowiednio postacie

$$\frac{dG}{G} = \frac{dP}{P} + \frac{dS}{S} + \frac{d\bar{w}}{\bar{w}} \quad (275)$$

$$\bar{w}d\bar{w} + \frac{dP}{\rho} + dA_z + dA_{tr} = 0 \quad (276)$$

$$\bar{w}d\bar{w} + \frac{\gamma}{\gamma-1} R dT = dq_2 - dA_z \quad (277)$$

gdzie: A_z - strumień energii mechanicznej dostarczonej z zewnątrz,

A_{tr} - praca tarcia,

$q_m = q_\lambda + q_q$ - sumaryczny strumień ciepła dostarczonego do strumienia gazu w procesie przewodnictwa cieplnego (q_λ) przez powierzchnię ograniczającą przepływ gazu oraz strumień ciepła dostarczony dyfuzyjnym ruchem masy i reakcją chemiczną (q_q).

Jeżeli zróżniczkujemy równanie stanu (5), wyznaczmy wartość wielkości dP/ρ , wstawimy otrzymane wyrażenie do wzoru (276), przeanalizujemy łącznie otrzymane wyrażenie oraz równania (275) i (276), to otrzymamy równanie

$$\frac{d\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{1}{Ma^2-1} \frac{dS}{S} - \frac{\gamma}{c^2(Ma^2-1)} dA_{tr} - \frac{\gamma-1}{\gamma c^2(Ma^2-1)} dq_2 - \frac{dG}{G} \quad (278)$$

które nazwano uogólnionym równaniem Hugoniota.

Na podstawie równania (278) można przeanalizować wpływ różnych elementów aerodynamicznych na zmianę prędkości strumienia gazu.

W szczególnym przypadku, gdy $G = \text{const}$, otrzymamy równania ustalające wpływ zmian przekroju strumienia gazu na zmianę parametrów aerodynamicznych

$$\frac{d\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{1}{Ma^2-1} \frac{dS}{S} \quad (279)$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{\gamma Ma^2}{1-Ma^2} \frac{dS}{S} \quad (280)$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{Ma^2}{4-Ma^2} \cdot \frac{dS}{S} \quad (281)$$

Z równań (279), (280) oraz (281) wynikają następujące wnioski:

- strumień gazu przepływający z prędkością dźwiękową ($Ma < 1$) zachowuje się jak strumień cieczy doskonałej,
- strumień gazu przepływający z prędkością nadźwiękową ($Ma > 1$) przyspiesza się podczas rozszerzania się i hamuje się podczas zwężania się ($dw < 0$),
- gęstość i ciśnienie gazu wzrasta w strumieniu rozszerzającym się, a maleje w strumieniu zwężającym się, jeżeli przepływ gazu jest dźwiękowy; w przepływie nadźwiękowym parametry te zmieniają się odwrotnie.

Podczas przejścia przepływu gazu przez prędkość krytyczną ($Ma=1$) mogą powstać nieciągłości parametrów. Pojawieniu się fali zagęszczeniowej towarzyszy strata energii. Aby uniknąć strat, przekrój strumienia gazu musi być ukształtowany. W tym celu wykorzystuje się różne dysze profilowane.

1.4. STATYKA PŁYNÓW

1.4.1. Równanie równowagi

Statyka rozpatruje prawa równowagi i stateczności płynów znajdujących się w stanie względnego spoczynku. Zajmuje się również praktycznymi aspektami tych praw, jak np.: parcie cieczy na powierzchnię ciał stałych, stateczność ciał pływających lub zanurzonych w cieczy, ciśnienie statyczne i inne zagadnienia wynikające z równania równowagi płynu.

Płyn znajduje się w stanie względnego spoczynku, jeżeli jego prędkość $\vec{w}=0$ i nie zmienia się z upływem czasu. Założenie takie dopuszcza do uwzględnienia w bilansach masy i energii cieplnej składników niezależnych od prędkości.

W przypadku płynu nieruchomego lub prawie nieruchomego, gdy różnica prędkości sąsiednich elementów płynu jest na tyle mała, że przy danej lepkości powstająca mała, w porównaniu do sił powierzchniowych i masowych, siłę tarcia można pominąć, to równanie równowagi płynu wynika bezpośrednio z równania Naviera i Stokesa

$$0 = \eta \nabla^2 p \quad (1)$$

Równanie (1) nosi nazwę równania równowagi Eulera i oznacza, że wypadkowa wszystkich sił masowych i powierzchniowych oraz wypadkowe momenty tych sił przyłożonych do dowolnego elementu płynu są równe zero. Ponadto równanie (1) służy jest dla płynu nielepkiego i lepkiego.

Ponieważ siły tarcia pojawiają się tylko przy $\bar{\omega} \neq 0$, to w płynie nieruchomym występuje jedynie normalna składowa sił powierzchniowych, t.j. naprężenie normalne. Naprężenie takie w nieruchomym płynie nazywamy ciśnieniem statycznym.

Jeżeli na płyn działa jedynie siła ciężenia grawitacyjnego, a więc siła zachowawcza

$$\vec{F} = -\text{grad } \psi' \quad (2)$$

to zakładając, że potencjał przyspieszenia ziemskiego nie zależy od wysokości i kierunku, przy orientacji osi z ku górze równanie równowagi (1) przyjmie postać

$$\text{grad } p = -\rho \text{ grad } \psi' \quad (3)$$

We współrzędnych prostokątnych równanie to można zapisać w postaci układu równań skalarowych

$$(\text{grad } p)_x = 0 \quad (4)$$

$$(\text{grad } p)_y = 0 \quad (5)$$

$$(\text{grad } p)_z = -\rho g \quad (6)$$

Równania (4) oraz (5) oznaczają, że ciecz w polu jednostkowych sił masowych ma poziomą powierzchnię swobodną o równaniu

$$-g dz = 0; \quad z = \text{const} \quad (7)$$

Jeżeli równanie (6) scałkujemy, to otrzymamy całkę Bernoulliego dla nieruchomej cieczy

$$\frac{p}{\rho} + g z = \text{const} \quad (8)$$

Równanie (8) stanowi treść matematyczną podstawowego prawa hydrostatyki, według którego ciśnienie statyczne płynu nieściśliwego zmienia się liniowo ze zmianą wysokości.

1.4.2. Ciśnienie statyczne

Jeżeli nieruchoma ciecz ma powierzchnię swobodną o równaniu (4,5) i przyłożymy do niej ciśnienie zewnętrzne p_0 , to umieszczając początek układu współrzędnych na tej powierzchni oraz orientując oś z wzdłuż normalnej wewnętrznej, a więc w głąb cieczy, otrzymamy równanie

$$p = \rho g z + p_0 \quad (9)$$

Zależność tę nazywano wzorem manometrycznym. Pierwszy człon równania (9) oznacza ciśnienie hydrostatyczne na głębokości z . Ciśnienie p jest ciśnieniem statycznym i dla płynu w spoczynku określona jest jako ślad tensora P ($\mu=0$)

$$p = \frac{1}{3} \text{tr } S^s \quad (10)$$

Ciśnienie p w ogólnym przypadku tworzy pole skalarowe

$$p = p(\vec{r}, t) \quad (11)$$

a siła ciśnienia jako iloczyn ciśnienia i elementarnej powierzchni jest wektorem z orientacją normalną do powierzchni działania ciśnienia.

Dla płynu ściśliwego ($\rho \neq \text{const}$) równanie równowagi (6) po uprzednim scałkowaniu przyjmie postać

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} + gz = qz_0 \quad (12)$$

Wprowadzając pod znak całki gęstość wyznaczoną z równania Clapeyrona dla $T = \text{const}$ otrzymamy całkę Bernoulliego

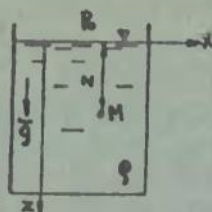
$$RT \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} + gz = qz_0 \quad (13)$$

z której wynika, że ciśnienie dla nieruchomego gazu w warunkach izotermicznych zmienia się logarytmicznie ze zmianą wysokości.

W przypadku płynu barotropowego, dla którego gęstość jest funkcją ciśnienia, równanie (3) przyjmie postać

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \frac{p}{\rho(p)} = \text{grad } p^* = \vec{F} = -\text{grad } \psi \quad (14)$$

W płynie baroklinowym gęstość zależy od ciśnienia i temperatury. Przykładem takiego płynu jest atmosfera ziemna. Na podstawie pomiarów



Rys. 75. Ciśnienie w punkcie M

zmian temperatury z wysokością zaproponowano trzy modele atmosfery, a mianowicie: atmosfera jednorodna, atmosfera izotermiczna /izosfera/ oraz atmosfera o liniowym spadku temperatury /troposfera/. Dla atmosfery jednorodnej $\rho = \text{const}$ i spełniona jest zależność (9) z zastrzeżeniem, że słuszna jest ta zależność dla nie-
dużego dz .

W przypadku atmosfery izotermicznej $T = \text{const}$ i powietrze traktujemy jako gaz doskonały. Na podstawie równania stanu gazu otrzymamy

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g dz}{p_0}\right) \quad (15)$$

Wzór (15) nazywany jest wzorem barometrycznym. Ustala on przybliżoną zależność pomiędzy wysokością nad powierzchnią $z = z_0$ lub $z = 0$, a ciśnieniem atmosferycznym na rozpatrywanej wysokości.

1.4.3. Warunki dla sił masowych

Równanie równowagi płynu nakłada pewne ograniczenie na charakter sił masowych. Aby płyn w polu sił masowych jednostkowych był w równowadze, pole tych sił powinno być potencjalne lub mieć rodzinę powierzchni ortogonalnych do linii prądu. Dla płynu barotropowego warunek potencjalności sił masowych wynika ze wzoru (1). W przypadku płynu baroklinowego wymagania odnośnie sił masowych jednostkowych $\vec{f}$ wynikają z następujących przekształceń równania

$$\text{rot}(\rho \vec{f}) - \rho \text{rot} \vec{F} + \text{grad} \rho \times \vec{F} - \text{rot grad } p = 0 \quad (16)$$

$$\rho \vec{F} \text{rot} \vec{F} + \vec{F} \cdot (\text{grad} \rho \times \vec{F}) = 0 \quad (17)$$

$$\vec{F} \text{rot} \vec{F} = 0 \quad (18)$$

Otrzymane równanie (18) stanowi warunek ogólniejszy niż warunek (2) i oznacza, że pole sił masowych ma rodzinę powierzchni ortogonalnych. Gdy siły masowe są pomijalnie małe w stosunku do sił powierzchniowych, równanie (1) uprości się do postaci

$$\text{grad } p = 0 \quad (19)$$

Równanie to stanowi treść matematyczną prawa Pascala, które stwierdza, że ciśnienie w całej rozpatrywanej masie płynu jest stałe i przenosi się bez zmian do każdego elementu cieczy. Prawo Pascala wskazuje na możliwość przekazywania naprężeń na odległość / hydrauliczne sterowanie dystansyjne/.

Zgodnie z tym prawem

$$p + \rho \psi^I = \text{const} = C \quad (20)$$

Stała C jest taka sama dla całej rozpatrywanej masy płynu, a zmiana jej oznacza równomierną zmianę ciśnienia p na poszczególnych powierzchniach $\psi^I = \text{const}$.

1.4.4. Powierzchnie ekwipotencjalne

Dla zadanego pola sił $\vec{F}$ równanie różniczkowe powierzchni ekwipotencjalnej ma postać

$$d\psi^I = \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (21)$$

gdzie $d\vec{l}$ - elementarne przesunięcie styczne do powierzchni ekwipotencjalnej /powierzchni stałego potencjału/.

Zależność (21) oznacza, że praca sił masowych jest równa zero. Całkując równanie (21) w granicach zmiany promienia wodzącego punkt od $\vec{r}_0$ do $\vec{r}$ otrzymamy całkowitą postać równania powierzchni ekwipotencjalnej

$$\psi^I(\vec{r}) = C \quad (22)$$

Dla pola potencjalnego

$$\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi^I = 0 \quad (23)$$

a więc gęstość płynu nie zmienia się wzdłuż powierzchni ekwipotencjalnej. Powierzchnie ekwipotencjalne stałej gęstości nazywane są powierzchniami izosterycznymi. Z równania (3) wynika, że ciśnienie płynu nie zmienia się wzdłuż powierzchni ekwipotencjalnej. Takie powierzchnie nazwano izobarycznymi. Powierzchnia swobodna jako powierzchnia izobaryczna (7) jest powierzchnią ekwipotencjalną i wykazano (4,5), że w przypadku występowania jednostkowych sił zachowawczych jest powierzchnią poziomą. Jeżeli w objętości znajdują się dwie nie mieszejące się cieczy o różnych gęstościach, to na powierzchni roz-

działu ciśnienie i siły masowe są jednakowe dla obu cieczy. Równanie (1) przyjmie postać

$$dp = \rho_1 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \rho_2 \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (24)$$

Z równania wynika, że przy $\rho_1 \neq \rho_2$ ciśnienie na powierzchni rozdzielu jest stałe. Powierzchnia ta jest powierzchnią ekwipotencjalną, izobaryczną i poziomą.



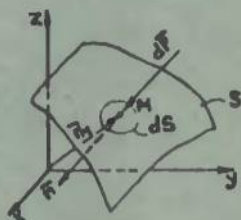
Rys. 76. Powierzchnie ekwipotencjalne

Jeżeli na płyn działają inne przyspieszenia /ruch postępowy poziomy, ruch obrotowy/ poza przyspieszeniem grawitacyjnym, to, zgodnie z warunkiem (18), powierzchnia swobodna jest ekwipotencjalna, lecz niekoniecznie pozioma. Wychodząc z założenia, że wypadkowa sił masowych

jednostkowych działających na każdy element powierzchni cieczy musi być prostopadła do niej (21), otrzymamy dla ruchu jednostajnego z przyspieszeniem $\vec{a}_1$ powierzchnię swobodną pochyloną pod kątem β do poziomu ($\beta = \arctg \frac{a_1}{g}$), a dla ruchu obrotowego jest powierzchnią obrotową względem osi obrotu z.

1.4.5. Parcie płynu na powierzchnie ciał stałych

Dla zadanego pola sił masowych ciśnienie statyczne określone jest równaniem równowagi i równaniem stanu $f(p, \rho, T) = 0$. Zbiór sił ciśnienia /parcie elementarne/ na powierzchnię stałą można zamienić równoważnym układem składającym się z siły zaczepionej w dowolnym punkcie i równej wypadkowej parć elementarnych oraz pary sił o momencie równym momentowi $\vec{M}$ wszystkich parć elementarnych, obliczonym względem obranego bieguna redukcji



Rys. 77. Siła ciśnienia

$$\vec{P} = \int_S p \vec{n} dS \quad (25)$$

$$\vec{M} = \int_S (\vec{r} \times p \vec{n}) dS \quad (26)$$

gdzie: $\vec{n}$ - normalna do powierzchni S (zewnątrzna względem płynu),
 $\vec{r}$ - promień wodzący punkt znajdujący się na powierzchni.

Dla cieczy nieściśliwej niezmiennikiem układu parę elementarnych jest parcie wypadkowe oraz rzut momentu wypadkowego na wektor $\vec{P}$. Obliczanie całek (25,26) jest możliwe wówczas, gdy znany jest rozkład ciśnienia na powierzchni S .

W przypadku powierzchni płaskiej normalna $\vec{n}$ do powierzchni ma stały kierunek i układ parę elementarnych $\vec{p}_i$ jest układem sił równoległych. Z warunku redukcji układu sił równoległych

$$\vec{P} \neq 0 \quad (27)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = 0 \quad (28)$$

Wynika stąd wniosek, że układ redukuje się jedynie do siły wypadkowej. Zakładając, że na zewnątrz elementu powierzchni działa takie same ciśnienie jak na powierzchnię swobodną, to wypadkową $\vec{P}$ oblicza się z zależności

$$\begin{aligned} \vec{P} - \int_S p_0 \vec{n} dS &= - \int_S p_0 \vec{n} dS = - \int_S \rho g z \vec{n} dS = - \int_S \rho g \zeta \sin \alpha \vec{n} dS = \\ &= - \rho g \sin \alpha \int_S \zeta \vec{n} dS = - \rho g \zeta_c \sin \alpha \cdot \vec{n} S = - \rho g z_c \vec{n} S \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie: ζ - oś z w ruchomym układzie odniesienia leżąca w płaszczyźnie płaskiej powierzchni,

α - kąt zawarty pomiędzy osią ζ a powierzchnią swobodną/ kąt pochylenia powierzchni S względem poziomej powierzchni swobodnej/,

z_c - odległość środka masy pola S od powierzchni swobodnej.

Uzyskana zależność (29) oznacza, że ciśnienie cieczy na powierzchnię płaską jest ciśnieniem hydrostatycznym słupa cieczy nad tą powierzchnią umieszczoną poziomo w odległości z_c od poziomej nieruchomej powierzchni swobodnej. Dla ścian poziomych ($\alpha=0$) środek przyłożenia siły $\vec{P}$ /środek parcia/ pokrywa się ze środkiem masy pola S / $z_p = z_c$ /. W przypadku ścian pochylej, zgodnie z twierdzeniem Variniona,

$$\vec{r}_p \times \vec{P} = - \int_S (\vec{r} \times p \vec{n}) dS \quad (30)$$

gdzie: $\vec{r}$ - promień wodzący element powierzchni,

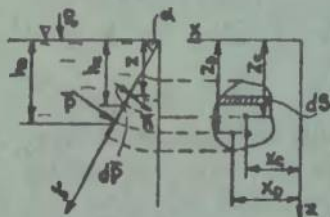
$\vec{P}$ - parcie wypadkowe,

$\vec{r}_p$ - promień wodzący punkt przyłożenia siły $\vec{P}$,

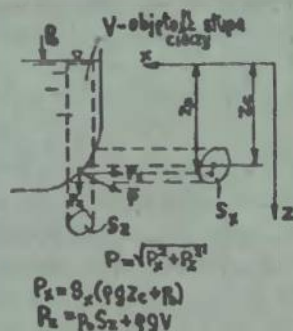
$\vec{n}$ - wewnętrzna normalna.

Z zależności tej można wyznaczyć współrzędną środka parcia. Składowe wektora $\vec{F}_p$ będą wyrażone przez momenty powierzchni S .

W przypadku ściany zakrzywionej parcia jednostkowe $\vec{p}_1$ są prostopadłe do elementu powierzchni, lecz nie są równoległe. Parcia jednostkowe tworzą układ sił dowolnie rozmieszczonych w przestrzeni, które można zredukować do parcia wypadkowego i momentu wypadkowego różnego od zera. Do obliczeń siły $\vec{F}$ oraz momentu wypadkowego stosujemy wzory (25,26). Składowe parcia P_x oraz P_y równe są parciu na ściankę



Rys. 78. Parcie cieczy na ściankę płaską



Rys. 79. Parcie cieczy na ściankę zakrzywioną

płaską będącą rzutem ścianki zakrzywionej na płaszczyznę współrzędnych, prostopadłą do danej osi. Składowa P_z równa jest masie słupa cieczy nad tą ścianką.

Jeżeli płyn jest ściśliwy/gaz/, to obliczenia wektorów $\vec{F}$ oraz $\vec{M}$ należy przeprowadzić na podstawie wzorów (25,26), jak dla płynu nieściśliwego. Należy jednak w tym przypadku uwzględnić zmianę gęstości z temperaturą i oddziaływanie sił masowych jednostkowych. Jednak w zagadnieniach praktycznych, wobec niskiej gęstości gazu, zmiany gęstości w wyniku działania sił masowych są pomijalnie małe i można przyjąć, że ciśnienie w całej rozpatrywanej masie gazu jest stałe.

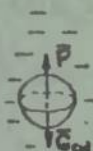
1.4.6. Prawo Archimedesesa

Drugim przypadkiem, gdy parcie jednostkowe redukuje się do jednej wypadkowej jest ciśnienie płynu na powierzchnię zamykającą objętość zanurzoną w płynie lub pływającą na powierzchni swobodnej / powierzchnia zamknięta równa jest sumie powierzchni zanurzonego ciała i powierzchni zwierciadła cieczy wyciętej konturem ciała pływającego przy $z=0$. Parcie wypadkowe można wyznaczyć ze wzoru (25) oraz (29)

$$\vec{P} = \int_S p \vec{n} dS = \int_V q \text{grad } p dV = -q \vec{g} \int_V dV = -q \vec{g} V = -\vec{G}_{cw} = k \vec{P}_z \quad (31)$$

Rozpatrując poszczególne składowe momentu $\vec{M}$ oraz rzutując ten moment na wektor $\vec{P}$ dochodzimy do wniosku, że układ paró elementarnych działających na ciało zanurzone sprowadza się do wypadkowej równej masie ciecży wypartej przez ciało. Siła ta /wypór/ jest skierowana w stronę przeciwną do kierunku przyspieszenia $\vec{g}$ i jest przyłożona w punktach linii pionowej przechodzącej przez środek wyporu zanurzonej objętości ciała stałego. Wektor $\vec{P}$ w tym przypadku jest wektorem ślizgającym się.

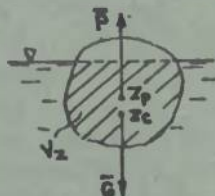
Wzór (31) stanowi treść prawa Archimiedesa.



Rys. 80. Prawo Archimiedesa

1.4.7. Równowaga ciał zanurzonych

Prawo Archimiedesa formułuje proste kryterium charakteryzujące zachowanie się ciał zanurzonych całkowicie lub częściowo w płynie. Siłę Archimiedesa $\vec{P}$ zwykle uwzględnia się dla ciał stałych zanurzonych w cieczy. Jednak w ośrodkach gazowych o różnej gęstości siła ta ma istotne znaczenie w problemach pływania ciał. Maksymalny wypór jaki może działać na ciało jest iloczynem



Rys. 81. Ciało pływające

$$|\vec{P}| = q \vec{g} V > m \vec{g} = |\vec{G}| \quad (32)$$

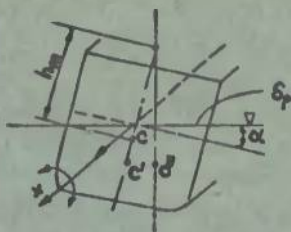
gdzie m — masa.

Przy wynurzeniu się ciała na powierzchnię swobodną / płaszczyzna pływania/ siła wyporu maleje, ponieważ maleje zanurzona objętość ciała, w wyniku czego ciało pływa na powierzchni swobodnej.

Równowaga ciała stałego zanurzonego lub pływającego na powierzchni cieczy znajdującej się w spoczynku określona jest warunkiem pływania (32) oraz statecznością pływającego ciała, tj., zdolnością powrotu ciała w położenie początkowe po zaniku działania chwilowej siły

wewnętrznej.

Ciało zanurzone na dowolnej głębokości pod powierzchnią cieczy jest stateczne, jeżeli jego środek ciężkości z_c leży poniżej środka wyporu z_p . Natomiast ciało pływające na powierzchni jest stateczne, jeżeli linia działania siły $\vec{G}$ i siły wyporu $\vec{P}$ jest wspólna.



Rys. 82. Stateczność pływającego ciała

Miarą stateczności pływającego ciała jest wysokość metacentryczna h_m , tj. odległość od środka masy do punktu przecięcia linii działania wyporu $\vec{P}$ i chwilowego wyporu $\vec{P}'$ przy małych kątach wychylenia α .

Wielkość h_m oblicza się ze wzoru

$$h_m = \frac{I_s}{V_z} \pm d > 0 \quad (33)$$

gdzie: $I_s = \int_S x^2 dS$,

I_s - moment bezwładności płaszczyzny pływania względem osi symetrii x , dokoła której następuje wahanie ciała,

S_p - płaszczyzna pływania,

V_z - objętość zanurzonej części ciała stałego.

Ze wzoru (33) wynika, że ciało pływające jest zawsze stateczne w zakresie małych kątów pochylenia ($\alpha \leq 15^\circ$) i stateczność wzrasta ze wzrostem h_m .

2. UKŁADY WIELOSKŁADNIKOWE ORAZ WIELOFAZOWE

2.1. WSTĘP

2.1.1. Wprowadzenie

W praktyce o wiele rzadziej mamy do czynienia z płynami jednofazowymi niż z układami wieloskładnikowymi lub wielofazowymi. Wśród takich układów rozróżniamy:

- układy jednofazowe wieloskładnikowe,
- układy jednoskładnikowe dwufazowe,
- układy wieloskładnikowe wielofazowe.

Układy jednofazowe wieloskładnikowe są to homogeniczne mieszaniny gazów oraz roztwory ciekłe. Składniki takich układów rozmieszczone są w mieszaninie na poziomie cząsteczkowym i na takim poziomie występują wzajemne oddziaływania składników. Prędkości względne składników są małe, co pozwala nie uwzględniać dynamicznych i inercyjnych oddziaływań. Ruch względny składników lub strumienie dyfuzyjne wpływają tylko na stężenie składników. Układy takie mogą być analizowane jako jednoprędkościowe lub wieloprędkościowe kontinuumy.

Jednak w przypadku roztworów ciekłych nie wszystkie cieczce mogą się mieszać ze sobą w dowolnych stężeniach dając mieszaninę ciekłą jednofazową wieloskładnikową. Mieszalność nieograniczona może występować tylko do pewnych stężeń, powyżej których osiąga się stan nasycenia. Zachodzi mieszalność ograniczona i powstają układy o kilku fazach ciekłych.

Przykładami układów jednoskładnikowych dwufazowych są:

- ciecz wrząca jako mieszanina cieczy i pary /gazu/,
- para kondensująca się jako mieszanina pary /gazu/ i kropelek cieczy,
- ciecz w trakcie krystalizacji jako mieszanina cieczy i cząstek ciała stałego.

Układy takie są w zasadzie termodynamicznie niestabilne i są nietrwałe. Proces przemiany faz może ulec zahamowaniu lub przebiegać aż do zaniku jednej z faz. Fazy mogą być w stanie lokalnej równowagi termodynamicznej, a mieszanina, jako całość, może znajdować się w jednym ze stanów metastabilnych, który charakteryzuje się funkcjonalem parametrów mieszaniny, określającym "historię" procesu. Stan taki po pewnym czasie może przejść w stan stabilny.

Równowaga układu dwufazowego wymaga, aby spełniona była:

- równowaga mechaniczna ($p_1 = p_2$),
- równowaga cieplna ($T_1 = T_2$),
- równowaga chemiczna [$\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T)$].

Faza mająca minimalny potencjał chemiczny μ jest fazą najbardziej stabilną.

Zmiany składu fazy zachodzące na skutek transportu składników z otoczenia do danej fazy lub z fazy do otoczenia jak również na skutek transportu składników wewnątrz fazy nazywano procesami fazowymi. Procesami takimi zajmuje się chemia fizyczna.

W przemianie fazowej ze zmianą stanu skupienia zmienia się nie składnik, lecz faza. Przejściom fazowym towarzyszy efekt cieplny. Funkcje termodynamiczne są ciągłe, a ich pochodne względem parametrów termodynamicznych doznają nieciągłości.

Termodynamiczny stan układu dwufazowego jednoskładnikowego określa się dowolną parą spośród zestawu niezależnych parametrów (p, T, ξ , stę-

zenie) z wyjątkiem pary p i T, które są wzajemnie zależne. Stan układu ciecz-para określa się ciśnieniem i stężeniem masowym fazy parowej.

Zmianę stanu skupienia, w wyniku której substancja przechodzi z jednej fazy w drugą opisuje różnica potencjału izobarycznego/entalpia swobodna/

$$d\phi = -s dT + v dp + \sum_{i=1}^N n_i d\gamma_i \quad (1)$$

gdzie: ϕ - potencjał izobaryczny,

n_i - liczba moli,

γ - potencjał chemiczny.

Potencjał ϕ układu dwuskładnikowego znajdującego się w stanie równowagi musi mieć wartość maksymalną.

$$d\phi = 0 \quad (2)$$

Równanie (1) nazwano w termodynamice równaniem Gibbsa i Duhema. Równanie to musi być spełnione dla każdej fazy jednolitej znajdującej się w równowadze wewnętrznej.

Powierzchnia rozdziału faz jest obszarem o skończonych wymiarach, niezależnie od tego, czy proces przebiega szybko, czy wolno. Rozmnożenie tej powierzchni jest wynikiem tworszenia się w obszarze jednej fazy w pobliżu granicy rozdziału faz niestabilnych skupisk drugiej fazy.

W układach dwufazowych jednoskładnikowych tworzenie się fazy zachodzi w postaci zarodków /pęcherzyki, krople, kryształy/, dokoła których tworzy się nowa faza. Powstająca faza jest rozdrobniona oraz ma małe wymiary, tak, że oddziaływania międzyfazowe można nie brać pod uwagę. Wartości elementów nowej fazy towarzyszą wytworzenie lub zużycie energii. Elementy nowej fazy stają się większe i oddziaływanie międzyfazowe zaczyna mieć istotne znaczenie. W obszarach międzyfazowych występuje intensywne wzajemne oddziaływanie faz oraz zachodzą zjawiska dyfuzyjne.

Mieszanki wieloskładnikowe wielofazowe składają się z fazy ciągłej /gaz, ciecz/ oraz rozproszonej w niej fazy dyskretniej /gaz, ciecz, ciało stałe/. W zależności od rodzaju fazy ciągłej i fazy rozproszonej rozróżniamy następujące układy, w których:

- fazą ciągłą jest ciecz, a fazą rozproszoną są cząstki ciała stałego [suspensja ($x_v < 1$), szlam ($x_v > 1$), dyspersoid ($\bar{d} > 0,1 \mu$), kolloid ($\bar{d} < 0,1 \mu$)],
- fazą ciągłą jest ciecz, a fazą rozproszoną są krople cieczy nie-mieszającej się (emulsja),
- fazą ciągłą jest ciecz, a fazą rozproszoną są pęcherzyki gazu,

- fazą ciągłą jest gaz, a fazą rozproszoną są krople cieczy [mgła ($\bar{d} < 0,1 \mu$), chmura ($\bar{d} > 0,1 \mu$), aerozol ($\bar{d} < 0,1 \mu$)],
- fazą ciągłą jest gaz, a fazą rozproszoną są cząsteczki ciała stałego [aerozol ($\bar{d} < 0,1 \mu$), proszek ($x_v \approx 1$), dym ($\bar{d} < 0,1 \mu$), pył ($\bar{d} > 0,1 \mu$)].

W podanej klasyfikacji wielkość x_v oznacza udział objętościowy, a $\bar{d}$ oznacza średnią średnicę cząstki fazy rozproszonej.

Jeżeli założymy, że:

- pęcherzyki gazu oraz krople cieczy fazy dyspersyjnej są nie-deformowalne,
- mają podobny jak cząstki ciała stałego kształt,
- wymiary fazy rozproszonej są większe od molekularno-kinetycznych wymiarów i mniejsze od skali własności makroskopowych,

to można, stosując te same równania mechaniki płynów, opisać zachowanie się suspensji, szulsi oraz aerozolu.

Można analizować zachowanie się pojedynczych elementów układu dyspersyjnego lub rozpatrywać w ramach równań fazy ciągłej pojedyncze fazy układu wielofazowego jako przenikające się i wzajemnie oddziałujące kontinuumy wypełniające tę samą objętość ruchu.

Jeżeli fazy są w stanie równowagi i mogą być traktowane jako fazy wyodrębnione, a więc gdy nie zachodzi przejście fazowe i nie występują dynamiczne zjawiska międzyfazowe, to można dla każdej fazy odrębnie napisać równanie ciągłości, ruchu i bilansu energii. Są to znaczne uproszczenia. W obszarach międzyfazowych występują intensywne wzajemne oddziaływania oraz zachodzą towarzyszące im zjawiska. Krople i pęcherzyki gazu są deformowalne. Pęcherzyki gazu wykonują drgania cykliczne, zwiększając i zmniejszając swoją objętość. Cząstki ciała stałego mogą wykazywać pewne tendencje ukierunkowania ruchu, np. dążyć ku ściance rury. Cząstki fazy dyspersyjnej mogą tworzyć aglomeraty lub ulegać rozdrobnieniu. Może występować tendencja do tworzenia struktury przestrzennej, w której cząstki fazy dyspersyjnej przyjmują ustalone wzajemne położenie w przestrzeni przepływu. W pobliżu cząstki fazy rozproszonej może zachodzić proces solwatacji lub proces adsorpcji, co zmienia strukturę i własności otaczającego ośrodka ciągłego.

Zachowanie się układu dyspersyjnego w znacznym stopniu zależy od stężenia fazy rozproszonej. Szczególnie zaznacza się to w przepływie burzliwym.

2.1.2. Zarys historyczny

Mechanika układów wielofazowych jest stosunkowo nową nauką, której

intensywny rozwój rozpoczął się w latach sześćdziesiątych. Od tego czasu ukazało się dużo prac zajmujących się różnymi zagadnieniami, takimi jak tworzenie się zarodników nowej fazy, ruch pojedynczej cząstki, zachowanie się suspensji struktury regularnej oraz łańcuchowej i inne zagadnienia. Nie sposób omówić wkładu wszystkich badaczy w rozwój mechaniki układów dyspersyjnych. Przegląd ograniczono do wymienienia nazwiska oraz podania daty pojawienia się drukiem pierwszej informacji technicznej tych autorów, którzy szczególnie przyczynili się do opracowania poszczególnych zagadnień mechaniki układów wielofazowych.

Rozpatrywano takie zagadnienia, jak:

- ruch cząstek недеформовalnych - Newton/1710/, Stokes/1845/, Einstein/1906/, Osceen/1911/, Jeffrey/1922/, Cawood/1936/, Lappe/1940/, Tchen/1947/, Soo/1958/, Brenner/1964/, Kamysznikow/1966/, Denson/1966/.
- ruch cząstek деформовalnych - Besant/1859/, Reyleigh/1886/, Rybczyński/1911/, Bouzzineza/1913/, Bosnjakovic/1930/, Wołynski/1948/, Haberman/1953/, Morton/1953/, Chao/1962/, Taylor/1962/, Wolgin/1968/, Lipatow/1970/, Nigmatulin/1975/.
- wzajemne oddziaływanie między cząsteczkami - Brown/1828/, Einstein/1906/, Hamaker/1937/, Depjagin/1940/, Taylor/1954/, Lifszio/1955/, Dżaloszczynskij/1959/, Soo/1962/, Bibik/1962/, Mjaenikow/1969/, Efremow/1971/.
- suspensje włókniste - Durst/1954/, Mardon/1956/, Rejzin/1958/, Raj/1964/, Giese/1965/, Galon/1966/, Sanders/1971/, Rabkin/1972/, Tersntiew/1974/, Chałturin/1976/.
- podstawowe równania układów wielofazowych - Ergun/1952/, Fennner/1953/, Hooyma/1955/, Rachmatulin/1956/, Truesdell/1957/, Campbell/1957/, Happel/1957/, Hinze/1959/, Frankl/1960/, Edelman/1962/, Djunin/1962/, Houghton/1962/, Glanc/1962/, Rudinger/1963/, Kriebel/1963/, Hirschekron/1964/, Marble/1964/, Krajko/1965/, Fidman/1965/, Murrey/1965/, Soo/1965/, Burewicz/1968/, Brenner/1970/, Nigmatulin/1970/.
- przepływ uwarstwiony - Jeffrey/1922/, Howarth/1936/, Segé/1961/, Steg/1962/, Thomas/1963/, Soo/1965/, Thomann/1968/, Afanasiew/1969/, Dejcz/1973/.
- przepływ burzliwy - Halstrom/1953/, Frenkl/1958/, Panczew/1959/, Thomas/1960/, Soo/1962/, Hino Mikkio/1963/, Lewicz/1967/, Fepieczkin/1968/, McCarthy/1968/, Piszczenko/1968/, Babucha/1968/, Gobis/1969/, Dejcz/1974/.

2.2. UKŁADY JEDNOFAZOWE WIELOSKŁADNIKOWE

2.2.1. Wstęp

Mieszanki gazów lub mieszaniny cieczy z nieograniczoną mieszalnością są układami homogenicznymi jednokontinualnymi. Dynamiczne zachowanie się takich układów można opisać za pomocą równań różniczkowych lub całkowych stosowanych dla płynu jednoskładnikowego jednofazowego. Rzeczywiste mieszaniny wieloskładnikowe można zastąpić fikcyjnym jednolitym płynem o uśrednionych parametrach fizykochemicznych. Wartość uśrednionego parametru nie zależy od czasu i położenia objętości V . Jeżeli chcemy analizować ruch poszczególnych składników mieszaniny, to do układu równań ciągłości, ruchu oraz bilansu energii, sformułowanych dla mieszaniny jako całości, należy dołączyć dodatkowe równania bilansu masy dla poszczególnych składników mieszaniny. Zmiana masy i -tego składnika mieszaniny może zachodzić tylko w wyniku reakcji chemicznej i równa jest ilości substancji i -tego składnika generowanej homogeniczną reakcją chemiczną.

2.2.2. Parametry fizykochemiczne mieszaniny

2.2.2.1. Parametry fizykochemiczne mieszanin gazowych

Najprostszą i najważniejszą metodą obliczania własności fizycznych mieszaniny jest sumowanie addytywne własności poszczególnych składników mieszaniny.

Wielkością ściśle addytywną jest masa mieszaniny

$$m = \sum_{i=1}^N m_i \quad (1)$$

gdzie: m_i - masa i -tego składnika mieszaniny,

m - masa mieszaniny,

N - liczba składników w mieszaninie.

Wartość średnią wielkości charakteryzującej własność mieszaniny obliczyć można przez sumowanie addytywne własności składników, jeżeli zależy ona bądź od masy cząsteczkowej, bądź od objętości molowej, bądź wreszcie od wielkości sił międzycząsteczkowych. Jeżeli jeden z wymienionych czynników nie jest spełniony, należy do obliczeń wprowadzić równanie stanu gazu rzeczywistego w postaci

$$f(p, v, T, \text{const}) = 0 \quad (2)$$

Czynnikami komplikującym obliczenia addytywne wielkości fizykochemicznych mieszaniny jest zależność tych wielkości od czynników konstytutywnych, tj. od oddziaływania otoczenia.

W obliczeniach własności mieszaniny gazów, w obszarze temperatur powyżej temperatury krytycznej składników mieszaniny i w obszarze niewielkich ciśnień, z wystarczającą dokładnością można stosować równanie stanu gazu doskonałego oraz prawo Daltona o addytywności ciśnienia/składniki mieszaniny gazowej oraz mieszaninę można w przybliżeniu uważać za gaz doskonały/

$$P = \sum_{i=1}^N p_i \quad (3)$$

gdzie: p_i - ciśnienie cząstkowe i-tego składnika,
 P - ciśnienie mieszaniny gazów.

Masę molową oraz objętość molową oblicza się z zależności

$$M = \sum_{i=1}^N y_i M_i \quad (4)$$

$$V^* = \sum_{i=1}^N y_i V_i^* \quad (5)$$

gdzie: M - masa cząsteczkowa mieszaniny,

V^* - objętość średniego mola mieszaniny,

y_i - udział molowy i-tego składnika,

M_i, V_i^* - masa i objętość molowe i-tego składnika mieszaniny.

W obliczeniach własności fizykochemicznych mieszaniny gazów operuje się udziałem molowym lub udziałem masowym i-tego składnika w mieszaninie. Wielkości te wyrażone są w postaci następujących wzorów:

$$y_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^N n_i} \quad (6)$$

$$\bar{y}_i = \frac{\rho_i}{\rho} \quad (7)$$

i powiązane są ze sobą relacją

$$y_i = \frac{M}{M_i} \bar{y}_i \quad (8)$$

gdzie: y_i - udział molowy i-tego składnika w mieszaninie gazów,

$\bar{y}_i$ - udział masowy i-tego składnika w mieszaninie gazów,

ρ_i - gęstość i-tego składnika,

ρ - gęstość mieszaniny,

n_i - liczba cząstek i-tego składnika.

Udziały y_i oraz $\bar{y}_i$ spełniają tożsamość

$$\sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N \bar{y}_i = 1 \quad (9)$$

W obliczeniach przyjmuje się, że w mieszaninie gazowej nie występuje oddziaływanie pomiędzy cząsteczkami składników, a zderzenia cząstek są doskonale sprężyste. Zgodnie z prawem Joule'a i Thomsona gaz doskonały dyfunduje adiabatycznie do przestrzeni zajętej przez inny gaz doskonały. Wynika stąd wniosek, że energię wewnętrzną, entalpię oraz ciepło właściwe mieszaniny gazów można obliczyć z zależności

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \bar{y}_i \quad (10)$$

$$i = \sum_{i=1}^N i_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^N \left(i_i^0 + \int_0^T c_{p_i} dT \right) \bar{y}_i \quad (11)$$

$$c_p = \sum_{i=1}^N c_{p_i} \bar{y}_i \quad (12)$$

gdzie: u, i, c_p - energia wewnętrzna, entalpia oraz ciepło właściwe,
 i_i - entalpia właściwa tworszenia się i -tego składnika.

Entropia mieszaniny gazów nie jest sumą addytywną entropii składników przed ich zmieszaniem. We wzorze określającym entropię mieszaniny gazów należy uwzględnić człon nazwany funkcją mieszania

$$s = \sum_{i=1}^N \bar{y}_i s_i - R \sum_{i=1}^N \bar{y}_i \ln \bar{y}_i \quad (13)$$

gdzie R - stała gazowa.

Wykorzystując prawo Amagata o addytywności objętości składników mieszaniny można gęstość mieszaniny gazów wyznaczyć przez sumowanie addytywne

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i \quad (14)$$

gdzie:

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{m}{V}$$

$$\rho_i = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{m_i}{V}$$

Średnią gęstość mieszaniny zawartej w objętości V oraz średnią gęstość i -tego składnika oblicza się ze wzorów/ wzory słuszne są dla mieszanin jednorodnych, natomiast dla mieszanin niejednorodnych wiel-

kości te zależą od czasu i od wyboru objętości V

$$Q_{gr} = \frac{m}{V} \quad (15)$$

$$Q_{gr} = \frac{m_i}{V} \quad (16)$$

Lepkość oraz współczynnik przewodnictwa cieplnego mieszaniny gazów nie są wielkościami addytywnymi. Wzory wyprowadzone na podstawie uproszczonych równań kinetycznych nie nadają się do obliczeń technicznych, ponieważ występujące we wzorach pewne wielkości są trudne do określenia, a obliczone wartości współczynników μ oraz λ nie odpowiadają wartościom pomierzonym.

Najszyszą i etosunkowo dokładną metodą obliczenia lepkości mieszaniny gazowej jest metoda Wilkiego. We wzorze nie występują ani współczynnik dyfuzji, ani gęstość gazów czystych. Lepkość mieszaniny gazów w temperaturze T oraz pod umiarkowanym ciśnieniem wyznacza się ze wzoru

$$\mu = \sum_{i=1, k \neq i}^N \mu_i \left(\sum_{k=1}^N \Phi_{ik} \frac{y_k}{y_i} \right)^{-1} \quad (17)$$

gdzie:

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_k} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu_k}{\mu_i} \right)^{1/4} \right]^2}{\left(1 + \frac{\mu_i}{\mu_k} \right)^{1/2}} \quad (18)$$

μ - lepkość mieszaniny gazowej,

μ_i - lepkość i -tego składnika,

i, k - składniki mieszaniny gazowej.

Przewodnictwo cieplne mieszaniny gazowej nie może być obliczone jako proporcjonalne do udziałów składników i ich przewodnictwa. Obliczenie współczynnika λ oparto na podobieństwie zjawisk przenoszenia pędu /dysypacja energii mechanicznej/ i energii/ przewodnictwo cieplne/.

Współczynnik przewodnictwa cieplnego mieszaniny gazów wyznacza się z następującego wzoru

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i y_i}{y_i + 4065 \cdot \sum_{k=1}^N \Phi_{ik} y_i} \quad (19)$$

gdzie: y_i - udział molowy i -tego składnika w mieszaninie gazowej,

λ_i - współczynnik przewodnictwa cieplnego czystego i -tego składnika

Φ_{ik} - wielkość określona wzorem (18).

2.2.2.2 Parametry fizykochemiczne mieszanin ciekłych

Dla cieczy doskonałej /mieszaniny doskonałej/ obowiązuje prawo addytywności objętości i parametry fizykochemiczne oraz funkcje termodynamiczne można obliczyć ze wzorów słusznych dla mieszaniny gazów.

Podczas mieszania cieczy rzeczywistych następuje zmiana objętości. Objętość mieszaniny nie jest równa sumie objętości składników. Wielkość zmiany objętości zależy od współczynnika ściśliwości i ciepła mieszania. Przyjmuje się, że odchylenia zachowania rzeczywistych mieszanin ciekłych od mieszanin doskonałych są wynikiem występowania sił międzycząsteczkowych i różnicy w rozmiarach cząstek. W niższych temperaturach czynnikiem decydującym o odchyleniu mieszaniny od mieszaniny doskonałej są siły międzycząsteczkowe.

Metody obliczania gęstości mieszaniny ciekłej rzeczywistej mają znaczenie orientacyjne i są przedstawione w postaci złożonych zależności analitycznych.

Lepkość mieszaniny ciekłej zależy od własności cząstek wchodzących w skład mieszaniny, tj. od wielkości objętości molowej cząstki, energii wzajemnego oddziaływania cząstek, masy składnika, polaryzowalności, momentu dipolowego i innych czynników. Zagadnienie wyznaczenia lepkości mieszanin ciekłych nie zostało dostatecznie wyjaśnione. W literaturze proponowane są różne nomogramy lub wykresy oraz wzory.

Wzory dotyczą najczęściej obliczania lepkości dwuskładnikowych mieszanin ciekłych o zbliżonej budowie niepolarnych i niezasocjowanych składników i gdy występuje przewaga jednego ze składników.

Proponowane są również wzory oparte na addytywności logarytmów współczynnika lepkości poszczególnych składników

$$\lg \mu = \sum_{i=1}^N x_i \lg \mu_i \quad (20)$$

gdzie: μ - lepkość mieszaniny ciekłej,

μ_i - lepkość i-tego składnika,

x_i - udział molowy i-tego składnika w mieszaninie ciekłej.

Zagadnienie obliczania współczynnika przewodnictwa cieplnego mieszanin ciekłych na podstawie znanych wartości μ_i składników nie jest dostatecznie poznane.

2.2.3. Równania mechaniki mieszanin jednofazowych

2.2.3.1. Równanie bilansu masy

Jeżeli w objętości V ograniczonej powierzchnią S wydzielimy ob-

jętość V_i zajmowaną przez i -ty składnik oraz poruszającą się z prędkością płynu i uwzględnimy wpływ na ruch masy pomiędzy elementem i -tego składnika mieszaniny a otaczającymi N -i składnikami, zjawisk różnej natury, to zgodnie z twierdzeniem Reynoldsa o przenoszeniu substancji otrzymamy równanie całkowite bilansu masy i -tego składnika

$$\int_{V=V_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV = - \int_S \rho_i \bar{w}_i \bar{n} dS + \int_{V_i} j_i dV \quad (21)$$

gdzie: $\bar{n}$ - wektor jednostkowy normalnej do powierzchni S ,

$\bar{w}_i$ - prędkość ruchu objętości V_i równa prędkości ruchu i -tego składnika,

j_i - strumień masowy źródła masy produkującego i -ty składnik odniesiony do jednostki objętości mieszaniny/moc objętościowa źródła masy i -tego składnika/.

Wielkość j_i określona jest tylko homogeniczną reakcją chemiczną

$$j_i = \pm \sum_{s=1}^{N_r} \nu_{is} M_i r_s \quad (22)$$

gdzie: s - s -ta reakcja chemiczna,

N_r - liczba reakcji chemicznych zachodzących w mieszaninie,

M_i - masa cząsteczkowa i -tego składnika,

r_s - szybkość s -tej reakcji chemicznej,

ν_{is} - współczynnik stechiometryczny przy i -tym składniku mieszaniny biorącym udział w s -tej reakcji chemicznej /jeżeli i -ty składnik jest produktem reakcji, to mamy $+\nu_{is}$, natomiast współczynnik ten jest ujemny, gdy i -ty składnik jest substratem $-\nu_{is}$ /.

Jeżeli i -ty składnik nie bierze udziału w reakcji chemicznej, to

$$j_i = 0 \quad (23)$$

Wobec dowolności wyboru objętości V , równanie (21) przyjmie postać

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div}(\rho_i \bar{w}_i) = j_i \quad (24)$$

gdzie $\bar{w}_i$ - prędkość masowa przepływu i -tego składnika mieszaniny.

Prędkość $\bar{w}_i$ określa się za pomocą relacji

$$\bar{w}_i = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\bar{Q}_i}{m_i} \quad (25)$$

gdzie $\bar{Q}_i$ - średni pęd ruchu i -tego składnika.

Sumując równanie (24) dla wszystkich indeksów $i=1, N$ otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \rho_i + \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^N \rho_i \bar{w}_i \right) = \sum_{i=1}^N j_i \quad (26)$$

Zgodnie z zasadą zachowania masy dla każdej odrębnej reakcji chemicznej

$$\sum_{i=1}^N \nu_{is} M_i = 0 \quad (27)$$

a więc masa całkowita mieszaniny w wyniku reakcji chemicznych nie ulega zmianie. Stąd mamy

$$\sum_{i=1}^N j_i = 0 \quad (28)$$

Wobec warunku (28) równanie (26) dla mieszaniny przyjmie postać

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{w}) = 0 \quad (29)$$

gdzie: ρ - średnia gęstość mieszaniny,

$\bar{w}$ - średni pęd mieszaniny.

Wielkość $\rho \bar{w}$ określa się z zależności

$$\rho \bar{w} = \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{w}_i = \bar{N} \quad (30)$$

gdzie $\bar{N}$ - gęstość strumienia masy mieszaniny.

Równanie (29) ma identyczną postać jak równanie (39-1.2) otrzymane dla czystego płynu.

Równanie (24) można przekształcić do innej postaci. W tym celu należy wprowadzić nową zmienną, określoną relacją

$$\Delta \bar{w}_i = \bar{w}_i - \bar{w} \quad (31)$$

lub

$$\Delta \bar{w}_i = \bar{w}_i - \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{w}_i \quad (32)$$

gdzie $\Delta \bar{w}_i$ - masowa prędkość dyfuzji i-tego składnika względem prędkości ruchu mieszaniny.

Ze wzorów (24) oraz (31) wynika

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho_i(\Delta \bar{w}_i + \bar{w})] = j_i \quad (33)$$

Wydzielając z wyrażenia ujętego w nawiasach kwadratowych wektor

$$\bar{j}_i = \rho_i \Delta \bar{w}_i - \rho_i (\bar{w}_i - \bar{w}) \quad (34)$$

gdzie $\bar{j}_i$ - gęstość strumienia masy i-tego składnika mieszaniny, otrzymamy inną postać równania (33)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \bar{w}) = -\operatorname{div} \bar{j}_i + j_i \quad (35)$$

Wzór (35) można również zapisać w postaci

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{G}_i = j_i \quad (36)$$

gdzie $\bar{G}_i = \rho_i \bar{w} + \bar{j}_i$ - gęstość strumienia masy równa sumie gęstości strumienia konwekcyjnego i strumienia dyfuzyjnego.

Sumując równanie (35) dla wszystkich składników mieszaniny dochodzimy do wniosku, że

$$\sum_{i=1}^N \bar{j}_i = \sum_{i=1}^N \rho_i (\bar{w}_i - \bar{w}) = 0 \quad (37)$$

Z równania tego wynika, że gęstości strumieni dyfuzyjnych $\bar{j}_i$ są niezależne.

Jeżeli skorzystamy ze wzoru

$$\bar{c}_i = \frac{\rho_i}{\rho} \quad (38)$$

to, po dokonaniu elementarnych przekształceń, równanie (35) daje się sprowadzić do postaci

$$\rho \frac{d\bar{c}_i}{dt} + \operatorname{div} \bar{j}_i - j_i = 0 \quad (39)$$

Jest to równanie bilansu masy i-tego składnika mieszaniny i jest słuszne dla każdego składnika mieszaniny homogenicznej. Pierwszy człon równania (39) określa zmianę strumienia masy i-tego składnika w elemencie mieszaniny poruszającego się z prędkością $\bar{w}$. Drugi i trzeci człon tego równania określają odpowiednio gęstość dyfuzyjnego strumienia masy i-tego składnika mieszaniny przez powierzchnię ograniczającą element mieszaniny oraz intensywność tworzenia się i-tego składnika w elemencie V mieszaniny w wyniku reakcji chemicznej.

Używając gęstości molowej ρ_i^* oraz ρ^* strumień $\bar{j}_i^*$ można przedstawić w postaci

$$\bar{j}_i^* = \rho_i^* (\bar{w}_i - \bar{w}) = -\frac{\rho_i^*}{M_i} \Delta \bar{w}_i \quad (40)$$

$$\bar{J}_i = \rho_i (\bar{w}_i - \bar{w}^*) \quad (41)$$

$$\bar{J}_i^* = \rho_i^* (\bar{w}_i - \bar{w}^*) \quad (42)$$

Wzory (34) oraz (40+42) stanowią cztery charakterystyki mieszaniny wieloskładnikowej. Każda z wielkości $\bar{J}_i$ oraz $\bar{J}_i^*$ są równe masie i-tego składnika wyrażonej w kilogramach ($\bar{J}_i$) lub w kilomolach ($\bar{J}_i^*$) przepływającej w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni /gęstość strumienia masy/ poruszającej się odpowiednio z prędkością $\bar{w}$ (30) lub $\bar{w}^*$. Molową prędkość mieszaniny określa się z zależności

$$\bar{w}^* = \sum_{i=1}^N y_i \bar{w}_i \quad (43)$$

Jeżeli gęstość strumienia masy i-tego składnika względem średniej masowej prędkości mieszaniny jest funkcją parametrów lokalnego stanu termodynamicznego, to przy istnieniu gradientu stężenia, temperatury, ciśnienia dla ruchu płynu w polu sił ciężkości otrzymamy zależność

$$\bar{J}_i = \bar{J}_i(\bar{c}) + \bar{J}_i(T) + \bar{J}_i(P) + \bar{J}_i(F) \quad (44)$$

gdzie: $\bar{J}_i(\bar{c})$ - gęstość strumienia masy wywołanego gradientem stężenia/dyfuzja molekularna/,
 $\bar{J}_i(T)$ - gęstość strumienia masy wywołanego gradientem temperatury/termodyfuzja/,
 $\bar{J}_i(P)$ - gęstość strumienia masy wywołanego gradientem ciśnienia/barodyfuzja/,
 $\bar{J}_i(F)$ - gęstość strumienia masy wywołanego działaniem pola sił ciężkości /masowych/ /dyfuzja wymuszona/,
 $\bar{c}$ - stężenie masowe.

Przez pojęcie "stan równowagi termodynamicznej" rozumiemy stan układu, który ustala się samorzutnie w czasie, w odizolowanym od oddziaływań zewnętrznych i pozostaje niezmienny w czasie, jeśli nie występują oddziaływania zewnętrzne, tzn. gdy parametry stanu tego układu nie ulegają zmianie.

Termodyfuzja i barodyfuzja są to procesy przepływu masy spowodowane odpowiednio nierównomiernym rozkładem temperatury /efekt Soreta / oraz ciśnienia w objętości V.

Zwykle wpływ termodyfuzji i barodyfuzji na strumień masy jest nieznaczny. Przy dużych siłach odśrodkowych /wirówki/ udział barodyfuzji wzrasta. Dyfuzja wymuszona ma duży wpływ w przypadku przepływu elektrolitów.

Jeżeli wprowadzimy odpowiednie współczynniki do równania (44), to otrzymamy

$$\bar{j}_i = -D \operatorname{grad} \bar{c}_i - D_T k_T \operatorname{grad} \ln T - D_P k_P \operatorname{grad} \ln p + \vartheta D_{k_F} \bar{F}_{ij} \quad (45)$$

gdzie: D - współczynnik dyfuzji molekularnej dla mieszaniny wieloskładnikowej,

k_T - względny współczynnik termodyfuzji,

k_P - względny współczynnik barodyfuzji,

k_F - względny współczynnik dyfuzji wymuszonej.

Wprowadzając wyrażenie (45) do wzoru (39) otrzymamy równanie ciągłości dla i -tego składnika mieszaniny wieloskładnikowej

$$\vartheta \frac{d\bar{c}_i}{dt} + \operatorname{div}(-D \operatorname{grad} \bar{c}_i - D_T k_T \operatorname{grad} \ln T - D_P k_P \operatorname{grad} \ln p + \vartheta D_{k_F} \bar{F}_{ij}) = \bar{j}_i \quad (46)$$

Jeżeli współczynniki dyfuzji i gęstość nie zależą od współrzędnych, to otrzymamy nową postać równania (46)

$$\frac{d\bar{c}_i}{dt} - D_i^c \Delta \bar{c}_i - D_i^T \Delta T - D_i^P \Delta p + D_i^F \operatorname{div} \bar{F}_{ij} - \frac{\bar{j}_i}{\vartheta} = 0 \quad (47)$$

Współczynnik D_i wyznacza się na podstawie metody termodynamiki chemicznej z założeniem:

- przepływ masy, pędu i energii i -tego składnika mieszaniny zależy od "historycznego" stanu termodynamicznego mieszaniny,
- przepływ masy, pędu i energii i -tego składnika mieszaniny zależy od lokalnego stanu termodynamicznego mieszaniny,
- przepływ masy, pędu i energii i -tego składnika mieszaniny zachodzi bez oddziaływania wstecz, t.j. przyszedły stan termodynamiczny nie określa stanu teraźniejszego.

Wzory określające współczynnik D_i mają skomplikowane postacie, a więc przy uwzględnieniu wszystkich czynników wpływających na gęstość strumienia masy równanie (45) jest niezwykle złożone. Najprostszą postacią tego równania jest równanie dla układu dwuskładnikowego, dla którego wielkość $\bar{j}_i$ wyznacza się z zależności

$$\bar{j}_i = -\vartheta^* M_i M_j \bar{y}_i D_{ij} \left(\frac{\partial \ln a_i}{\partial \ln \bar{y}_i} \right)_{T,P} \operatorname{grad} \ln \bar{y}_i - \vartheta^* M_i M_j D_{ij} \bar{y}_i (v_i \vartheta - 1) \operatorname{grad} \ln p - \vartheta^* M_i M_j D_{ij} \frac{\bar{y}_i \cdot \bar{y}_j}{R T} (\bar{F}_i - \bar{F}_j) - D_i^T \operatorname{grad} \ln T \quad (48)$$

gdzie: D_{ij} - współczynnik dyfuzji binarnej,

$\bar{c}$ - stężenie masowe/udział masowy/,

a - aktywność względna,

$\bar{F}$ - siła zewnętrzna działająca na jednostkę masy,

T - temperatura,

ρ - gęstość molowa mieszaniny.

Aktywność względną określa się z zależności

$$a_i = \exp\left(\frac{\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_i^0}{RT}\right) \quad (49)$$

gdzie: $\bar{\mu}_i$ - potencjał chemiczny składnika i w mieszaninie,
 $\bar{\mu}_i^0$ - potencjał chemiczny czystego składnika i .

2.2.3.2. Równanie bilansu pędu

W wyniku zajęcia reakcji chemicznych produkujących i -ty składnik jego stężenie w mieszaninie wzrasta. Wzrost ten zachodzi kosztem obniżenia stężenia innych składników mieszaniny. Równanie bilansu masy i -tego składnika wyrażonej przez stężenie masowe ma postać

$$\bar{c}_i = \bar{c}_{i0} + \sum_{s=1}^{N_r} \nu_{is} \frac{M_i}{M_s} \bar{c}_s \quad (50)$$

gdzie $\bar{c}_{i0}$ - stężenie i -tego składnika przed zajęciami reakcji chemicznych.

Jeżeli w objętości mieszaniny moglibyśmy wyodrębnić objętość V_i zajmowaną przez i -ty składnik mieszaniny, to na podstawie twierdzenia "S" stosowanego dla czystego płynu, równanie bilansu pędu będzie miało postać

$$\int_{V_i} \frac{\partial}{\partial t} \rho_i \bar{w}_i dV = - \int_{S_i} \rho_i \bar{w}_i (\bar{w}_i \bar{n}) dS + \int_{S_i} \bar{\tau}_{ii} dS + \int_{V_i} \rho_i \bar{F}_i dV + \int_{V_i} \sum_{j=1}^N \bar{q}_{ji} dV + \int_{V_i} \sum_{s=1}^{N_r} \nu_{is} M_i \bar{r}_s dV \quad (51)$$

gdzie: $\bar{F}_i$ - siła zewnętrzna działająca na jednostkę masy i -tego składnika zawartej wewnątrz objętości V_i ,

$\bar{q}_{ji}$ - intensywność wymiany pędu pomiędzy i -tym oraz j -tym składnikami mieszaniny.

W mieszaninie homogenicznej każdy i -ty składnik jest równomiernie rozmieszczony w całej objętości mieszaniny, a więc zajmuje całą objętość mieszaniny

$$V_1 = \dots = V_i = V_N = V \quad (52)$$

Wobec powyższego we wzorze (51) całkowanie po objętości V_i można zastąpić całkowaniem po objętości V .

Sumując równanie (51) dla wszystkich składników $i=1, N$ można otrzymać równanie całkowe bilansu pędu mieszaniny. W równaniu tym

nie będą występowały dwa ostatnie człony prawej strony równania (51). Człony te znikają zgodnie z zasadą zachowania pędu, według której obszar objęty objętością V nie powinien mieć źródeł/upustów pędu. Zerowa wydajność tych źródeł jest konsekwencją spełnienia równości (28).

Ponieważ pęd mieszaniny może zmieniać się tylko w wyniku działania zewnętrznych sił masowych i powierzchniowych, równanie zachowania pędu mieszaniny będzie miało postać

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{w}_i dV = - \int_S \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{w}_i (\bar{w}_i \bar{n}) dS + \int_S \bar{\tau}_n dS + \int_V \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{F}_i dV \quad (53)$$

Zapisując ostatni człon prawej strony tego równania w postaci analitycznej do (30)

$$\rho \bar{F} = \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{F}_i \quad (54)$$

oraz używając wzorów (31) oraz (34) równanie (53) można przekształcić do postaci

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{w} dV + \int_S \rho \bar{w} (\bar{w} \bar{n}) dS = - \int_S \sum_{i=1}^N \rho_i \Delta \bar{w}_i (\Delta \bar{w}_i \bar{n}) dS + \int_S \bar{\tau}_n dS + \int_V \rho \bar{F} dV \quad (55)$$

W mieszaninie homogenicznej składniki rozniesszone są i oddziałują na poziomie cząsteczkowym. Prędkość ruchu składników mieszaniny jest znacznie wyższa od prędkości ruchu mieszaniny, a więc można nie brać pod uwagę wpływu efektów dynamicznych i bezwładnościowych prędkości $\Delta \bar{w}_i$. Wobec powyższego w równaniu (55) można pominąć wyrazy zawierające prędkość $\Delta \bar{w}_i$. Jest to tak zwane przybliżenie dyfuzyjne równania (55).

Ostatecznie otrzymamy równanie zachowania pędu N -składnikowej, jednofazowej mieszaniny homogenicznej

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{w} dV + \int_S \rho \bar{w} (\bar{w} \bar{n}) dS = \int_S \bar{\tau}_n dS + \int_V \rho \bar{F} dV \quad (56)$$

Równanie to można zapisać w postaci równości

$$\int_V \left[\rho \frac{d\bar{w}}{dt} - \text{Div } S - \rho \bar{F} \right] dV = 0 \quad (57)$$

Wobec dowolności wyboru objętości V równanie (57) jest spełnione, jeżeli wyrażenie podcałkowe jest równe zero

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} - \text{Div } S - \rho \bar{F} = 0 \quad (58)$$

lub

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = \text{Div } S + \rho \bar{F} \quad (59)$$

Jeżeli wykorzystamy wzór (57-1.2), to równanie (59) można zapisać w postaci

$$\rho \frac{d\bar{W}}{dt} + d\nu P = \rho \bar{F} \quad (60)$$

W równaniu tym wielkość P charakteryzuje gęstość strumienia pędu, a wielkość $\bar{F}$ charakteryzuje gęstość źródła pędu. Równanie (59) jest podobne do równania (65-1.2), otrzymanego dla czystego płynu, a więc przybliżenie dyfuzyjne równania (55) jest przybliżeniem jedno-układnikowym. Składnikiem takim jest czysty fikcyjny płyn o parametrach fizycznych i kinetycznych równych średnim wartościom parametrów mieszaniny wieloskładnikowej.

2.2.3.3. Równanie bilansu energii

Energia całkowita i -tego składnika mieszaniny jest równa sumie energii kinetycznej, wewnętrznej oraz potencjalnej

$$e_i = e_{ki} + u_i + \varphi_i \quad (61)$$

gdzie: e_{ki} , u_i , φ_i - symbole oznaczające odpowiednio energię kinetyczną, wewnętrzną oraz potencjalną jednostki masy i -tego składnika mieszaniny.

Jeżeli uwzględnimy wszystkie źródła i strumienie oraz oddziaływania energetyczne, to równanie bilansu energii całkowitej dla każdego i -tego składnika mieszaniny zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \frac{\partial}{\partial t} \rho_i (q_5 \bar{w}_i^2 + u_i + \varphi_i) dV = & - \int_{S_i} \rho_i \bar{w}_i \bar{n} (q_5 \bar{w}_i^2 + u_i + \varphi_i) dS + \int_{S_i} \bar{T}_{ii} \bar{w}_i dS + \int_{V_i} \rho_i \bar{w}_i \bar{F}_i dV - \\ & - \int_{S_i} \bar{q}_i \cdot \bar{n} dS + \sum_{j=1}^N (\bar{j}_q)_{ji} \bar{n} dS + \int_{V_i} (q_5 \bar{w}_i^2 + u_i + \varphi_i) \sum_{s=1}^{N_f} \bar{v}_{is} M_i r_s dV \end{aligned} \quad (62)$$

gdzie: $(\bar{j}_q)_{ji}$ - gęstość strumienia energii wzajemnego oddziaływania,
 $\bar{q}_i$ - gęstość strumienia energii cieplnej przekazywanej przez powierzchnię S_i .

Sumując równanie (62) dla wszystkich indeksów $i = \overline{1, N}$ otrzymamy równanie całkowite bilansu energii całkowitej N -składnikowej mieszaniny

$$\begin{aligned} \int_{V} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \rho_i (q_5 \bar{w}_i^2 + u_i + \varphi_i) dV = & - \int_{S} \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{w}_i \bar{n} (q_5 \bar{w}_i^2 + u_i + \varphi_i) dS + \int_S \bar{T}_{ii} \bar{w}_i dS + \\ & + \int_{V} \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{w}_i \bar{F}_i dV - \int_S \bar{q} \cdot \bar{n} dS + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\bar{j}_q)_{ji} \bar{n} dS + \int_V \sum_{i=1}^N (q_5 \bar{w}_i^2 + u_i + \varphi_i) \bar{j}_i dV \end{aligned} \quad (63)$$

Jeżeli zastosujemy do równania (63) wzór Gaussa Ostrogradskiego, to przy dowolnym wyborze objętości V równanie (63) przyjmie postać

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \rho_i \varepsilon_i \text{div} \left[\sum_{i=1}^N \rho_i (\Delta \bar{w}_i + \bar{w}) \bar{n} [0.5(\Delta \bar{w}_i + \bar{w})^2 + u_i + \varphi_i'] - (P \bar{w}) \right] + \sum_{i=1}^N \rho_i (\Delta \bar{w}_i + \bar{w}) \bar{F}_i' + \\ + \text{div} \left[-\bar{q} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\bar{j}_{ij}) \bar{j}_i \right] + \sum_{i=1}^N [0.5(\Delta \bar{w}_i + \bar{w})^2 + u_i + \varphi_i'] \bar{j}_i + \varepsilon_i' \quad (64)$$

Wobec zależności (64) poszczególne składniki prawej strony tego równania oznaczają:

- $\bar{j}_i \Delta \bar{w}_i^2$ - dyfuzyjny strumień energii ruchu względnego,
- $\bar{w} \bar{j}_i \Delta \bar{w}_i$ - konwekcyjny strumień energii ruchu względnego,
- $\bar{j}_i \bar{w}^2$ - dyfuzyjny strumień energii ruchu,
- $\rho_i \bar{w}^3$ - konwekcyjny strumień energii ruchu,
- $\bar{j}_i u_i$ - dyfuzyjny strumień energii wewnętrznej,
- $\rho_i u_i \bar{w}$ - konwekcyjny strumień energii wewnętrznej,
- $\bar{j}_i \varphi_i'$ - dyfuzyjny strumień energii potencjalnej,
- $\rho_i \varphi_i' \bar{w}$ - konwekcyjny strumień energii potencjalnej,
- $\bar{j}_i \bar{F}_i$ - praca sił zewnętrznych masowych w procesie dyfuzji,
- $\rho_i \bar{F}_i \bar{w}$ - praca sił zewnętrznych masowych podczas ruchu.

Równanie (64) można zastąpić trzema równaniami bilansowymi wymienionych (61) rodzajów energii. Energia kinetyczna zależy od ruchu składników, energia wewnętrzna zależy od energii ruchu cieplnego elementów i -tego składnika oraz od wzajemnego oddziaływania pomiędzy składnikami, a energia potencjalna zależy od działania sił objętościowych.

Równanie bilansu energii potencjalnej można otrzymać przez pomnożenie skalarowo wszystkich składników równania (21) przez potencjał φ_i' :

$$\int_{V_i=V} \varphi_i' \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV = - \int_S \varphi_i' \rho_i (\bar{w}_i \cdot \bar{n}) dS + \int_V \varphi_i' \bar{j}_i dV \quad (65)$$

Jeżeli siły objętościowe są siłami zachowawczymi i nie zmieniają się w czasie, to są one potencjalne

$$-\text{grad} \varphi_i' = \bar{F}_i \quad (66)$$

i spełniona jest zależność

$$\frac{\partial \varphi_i'}{\partial t} = 0 \quad (67)$$

a więc wielkość φ_i' można włączyć pod znak pochodnej.

Jeżeli wykorzystamy zależności (34) i (66) oraz dokonamy pewnych przekształceń i zastosujemy wzór Gaussa-Ostrogradskiego, to wobec dowolności wyboru objętości V otrzymamy równanie bilansu energii potencjalnej i -tego składnika jednofazowej mieszaniny homogenicznej.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_i \varphi_i' = -\operatorname{div}(\varphi_i' \bar{j}_i) + \bar{j}_i \bar{F}_i - \operatorname{div}(\rho_i \varphi_i' \bar{w}) - \bar{w} \rho_i \bar{F}_i - \bar{F}_i j_i \quad (68)$$

Sumując równanie (68) dla wszystkich składników $i=1, N$ otrzymamy równanie bilansu energii potencjalnej N -składnikowej mieszaniny

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \rho_i \varphi_i' = -\operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^N \varphi_i' \bar{j}_i\right) + \sum_{i=1}^N \bar{j}_i \bar{F}_i - \operatorname{div}\left(\bar{w} \sum_{i=1}^N \rho_i \varphi_i'\right) + \bar{w} \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{F}_i + \sum_{i=1}^N \varphi_i' j_i \quad (69)$$

Ostatnie cztery wyrazy prawej strony tego równania są źródłami energii potencjalnej.

Wykorzystując relację

$$\rho \varphi' = \sum_{i=1}^N \rho_i \varphi_i' \quad (70)$$

równanie (69) zapiszemy w postaci

$$\rho \frac{d\varphi'}{dt} + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^N \varphi_i' \bar{j}_i\right) = \sum_{i=1}^N \bar{j}_i \bar{F}_i + \bar{w} \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{F}_i + \sum_{i=1}^N \varphi_i' j_i \quad (71)$$

Zgodnie z równaniem (28) znika ostatni człon tego równania i równanie (71) upraszcza się

$$\rho \frac{d\varphi'}{dt} + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^N \varphi_i' \bar{j}_i\right) = \sum_{i=1}^N \bar{j}_i \bar{F}_i + \bar{w} \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{F}_i \quad (72)$$

Przedostatni człon prawej strony tego równania określa przejście energii potencjalnej w energię wewnętrzną w wyniku procesu dyfuzji składników mieszaniny w polu sił objętościowych. Natomiast ostatni człon równania bilansu energii potencjalnej (72) jest źródłem energii kinetycznej.

Równanie bilansu energii kinetycznej ruchu mieszaniny można otrzymać przez pomnożenie równania (56) przez średnią prędkość mieszaniny $\bar{w}$

$$\int_V \bar{w} \frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{w} dV + \int_S \bar{w} \rho \bar{w} (\bar{w} \cdot \bar{n}) dS = \int_S \bar{w} \bar{T} \bar{n} dS + \int_V \bar{w} \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{F}_i dV \quad (73)$$

Wykorzystując wzory (55-1.2), (57-1.2) oraz (119-1.2) otrzymamy nową postać równania (73)

$$\int_V \rho \frac{d\bar{e}_k}{dt} + \int_V \operatorname{div}(\bar{P} \bar{w}) dV = \int_V (\bar{P} : \bar{T}) dV + \int_V \bar{w} \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{F}_i dV \quad (74)$$

Przedostatni człon prawej strony tego równania jest równy tej części strumienia energii kinetycznej wewnętrznego źródła energii kinetycznej, która zamienia się w strumień energii wewnętrznej mieszaniny.

Jeżeli uwzględnimy część antysymetryczną tensora P , to energia kinetyczna odniesiona do jednostki masy /energia kinetyczna właściwa/ określona jest sumą dwóch składników

$$e_k = 0,5 \bar{\omega}^2 + 0,5 I \bar{\omega}^2 \quad (75)$$

Wobec wzoru (127-1.2) równanie (74) przyjmie postać:

$$\int_V \rho \frac{de_k}{dt} dV + \int_V \text{div}(P \cdot \bar{\omega}) dV - \int_V [\rho \text{div} \bar{\omega} - \mu_V (\text{div} \bar{\omega})^2 - 2\mu \bar{T} : \bar{T} + \bar{P}_\mu^a (\text{rot} \bar{\omega} - 2\bar{\omega})] dV - \int_V \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{F}_i dV = 0 \quad (76)$$

Równanie (76) jest spełnione, jeżeli wyrażenie podcałkowe jest równe zero

$$\rho \frac{de_k}{dt} + \text{div}(P \cdot \bar{\omega}) - \rho \text{div} \bar{\omega} - \mu_V (\text{div} \bar{\omega})^2 - 2\mu \bar{T} : \bar{T} + \bar{P}_\mu^a (\text{rot} \bar{\omega} - 2\bar{\omega}) \quad (77)$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii całkowitej energia nie powstaje ani też nie znika, lecz przemienia się z jednej postaci w drugą. Stąd wynika, że równanie energii wewnętrznej ma postać

$$\rho \frac{du}{dt} + \text{div} \bar{j}_u = -P : \bar{T} + \sum_{i=1}^N \bar{j}_i \cdot \bar{F}_i \quad (78)$$

gdzie $\bar{j}_u$ - dyfuzyjny strumień energii wewnętrznej.

Z równania tego wynika, że energia wewnętrzna właściwa elementu mieszaniny V zmienia się na skutek procesu przewodnictwa cieplnego, dysypacji energii mechanicznej ruchu oraz przemiany części energii potencjalnej w energię wewnętrzną.

W obliczeniach praktycznych wygodne jest operowanie polem temperatury. W takim przypadku konieczne jest wyrażenie energii wewnętrznej przez ciepło właściwe i temperaturę. Jeżeli wykorzystamy wzory (143-1.2), (147-1.2) i (148-1.2) oraz uwzględnimy wszystkie składniki bilansu energii cieplnej, to równanie (78) daje się przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \rho c_V \frac{dT}{dt} + \text{div} \bar{j}_q = & S_\mu : \bar{T} + \sum_{i=1}^N \bar{j}_i \cdot \bar{F}_i - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \text{div} \bar{\omega} + \sum_{i=1}^N u_i j_i + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\rho_i} [-T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V + P] \text{div} \bar{j}_i + \rho Q + \delta' + \sum_{i=1}^N \bar{j}_i \cdot \bar{F}_i - \\ & - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\rho_i} [-T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V + P] j_i - \rho \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N 0,5 \rho_i \Delta \bar{\omega}_i^2 \end{aligned} \quad (79)$$

Wielkość $\bar{j}_q$ jest sumą dwóch składników

$$\bar{j}_q = \bar{q} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\bar{j}_{qj})_i \quad (80)$$

Dla mieszaniny gazowej strumień energii wzajemnego oddziaływania oblicza się ze wzoru

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\bar{j}_{ij})_i = RT \sum_{i=1}^N \frac{c_i D_i^T}{D_i M_i} \left(\frac{\bar{j}_i}{\bar{c}_i} - \frac{\bar{j}_j}{\bar{c}_j} \right) \quad (81)$$

gdzie: R - uniwersalna stała gazowa,
 T - temperatura,
 c - stężenia molowe,
 M - masa cząsteczkowa,
 D_{ij} - współczynnik dyfuzji binarnej,
 D_i^T - współczynnik termodyfuzji.

Sumując równania (72), (77) oraz (78) otrzymamy równanie zachowania energii całkowitej

$$\varrho \frac{de}{dt} + \text{div} \left[\sum_{i=1}^N \varphi_i' \bar{j}_i + (P \cdot \bar{w}) + \bar{j}_u \right] = 0 \quad (82)$$

Równanie to można zapisać w innej postaci

$$\frac{\partial \varrho e}{\partial t} + \text{div} (\varrho e \bar{w} + \sum_{i=1}^N \varphi_i' \bar{j}_i + P \bar{w} + \bar{j}_u) = 0 \quad (83)$$

Wyrazy ujęte w nawiasach określają wektor gęstości strumienia energii całkowitej, zwany wektorem Umowa

$$\bar{j}_e = \varrho e \bar{w} + \sum_{i=1}^N \varphi_i' \bar{j}_i + P \bar{w} + \bar{j}_u \quad (84)$$

gdzie: $\varrho e \bar{w}$ - konwekcyjny strumień energii całkowitej wywołany ruchem mieszaniny,
 $\sum_{i=1}^N \varphi_i' \bar{j}_i$ - dyfuzyjny strumień energii potencjalnej wywołany ruchem względnym elementów mieszaniny w polu sił zewnętrznych,
 $P \cdot \bar{w}$ - konwekcyjny strumień energii ciśnienia i sił tarcia,
 $\bar{j}_u$ - dyfuzyjny strumień energii wewnętrznej wywołany chaotycznym ruchem elementów mieszaniny.

Równanie różniczkowe (83) można zapisać w postaci Umowa

$$\frac{\partial \varrho e}{\partial t} + \text{div} \bar{j}_e = 0 \quad (85)$$

Jeżeli założymy, że $\varphi_i' = 0$ oraz nie uwzględnimy pewnych składników wektora $\bar{j}_e$, to równanie (85) uproszczy się do postaci

$$\frac{\partial \varrho e}{\partial t} + \text{div} [(-\lambda \text{grad } T) + P \bar{w} + \varrho e \bar{w} + \sum_{i=1}^N \bar{j}_i] = 0 \quad (86)$$

Układ równań (24), (29), (60) oraz (78) nazywany jest uogóln-

nionym układem równań przenoszenia masy, pędu i energii cieplnej jednofazowej N -składnikowej mieszaniny homogenicznej. Układ zawiera $N+4$ równania oraz $4N+N_F+13$ nie znanych funkcji. W celu zamknięcia układu należy dołączyć $3N+N_F+9$ dodatkowych równań opisujących strumienie dyfuzyjne, prędkości reakcji chemicznych j_i oraz składowe tensora ciśnienia P . Zależności te wynikają z równań termodynamiki procesów nierównowagowych i są ujęte w postaci postulatu (96-1.2).

2.2.3.4. Równanie bilansu entropii

Dla mieszaniny jednorodnej, której lokalne własności są jednakowe w całej objętości mieszaniny, równanie różniczkowe termodynamiki klasycznej ma postać

$$du = Tds - p dv + \sum_{i=1}^N \tilde{\mu}_i d\tilde{c}_i \quad (87)$$

gdzie: $\tilde{\mu}_i$ - potencjał chemiczny i -tego składnika mieszaniny,
 $\tilde{c}_i$ - stężenie masowe i -tego składnika mieszaniny,
 v - objętość właściwa,
 s - entropia właściwa.

Zgodnie z zasadą lokalnej równowagi równanie (87) jest słuszne dla układów nierównowagowych. Jednak w tym przypadku parametry termodynamiczne są funkcjami czasu i przestrzeni. Wobec powyższego równanie (87) można zapisać w postaci

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{du}{dt} + \frac{p}{T} \frac{dv}{dt} - \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mu}_i}{T} \frac{d\tilde{c}_i}{dt} \quad (88)$$

Wyznaczając z równania bilansu masy (39) wielkość $\frac{d\tilde{c}_i}{dt}$ oraz wprowadzając otrzymane wyrażenie do wzoru (88) otrzymamy

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{du}{dt} + \frac{p}{T} \frac{dv}{dt} - \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mu}_i}{T} (j_i - \text{div } \bar{j}_i) \quad (89)$$

Jeżeli w równaniu tym pochodne $\frac{du}{dt}$ oraz $\frac{dv}{dt}$ zastąpimy odpowiednimi wyrażeniami wyznaczonymi z równania zachowania masy (29) oraz energii cieplnej (78), to równanie (89) przyjmie postać

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \text{div } \bar{j}_u - \frac{1}{T} (P \cdot T) - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \bar{j}_i \cdot \bar{F}_i + \frac{p}{T} \text{div } \bar{w} + \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mu}_i}{T} \text{div } \bar{j}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mu}_i}{T} j_i \quad (90)$$

Uwzględniając w równaniu (90) inne czynniki występujące w równaniu bilansowym (64), określające energię cieplną mieszaniny oraz

wykonując pewne przekształcenia otrzymamy pełną postać równania różniczkowego bilansu entropii

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \left(\frac{1}{T} \left[\bar{q} - \sum_{i=1}^N (\bar{\pi}_i + 0,5 \Delta \bar{w}_i^2) \bar{j}_i \right] \right) - \frac{1}{T} \bar{q} \text{grad } T - \frac{1}{T} (P; T) + \\ + \rho \frac{Q}{T} - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \bar{j}_i \left[T \text{grad} \left(\frac{\bar{\pi}_i}{T} + 0,5 \frac{\Delta \bar{w}_i^2}{T} \right) - \bar{F}_i + \frac{d\Delta \bar{w}_i}{dt} \right] - \sum_{i=1}^N \frac{1}{T} (\bar{\pi}_i + 0,5 \Delta \bar{w}_i^2) \bar{j}_i \quad (91)$$

Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki (14-1.3) równanie (91) można zapisać w postaci nierówności entropii

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \left(\frac{1}{T} \left[\bar{q} - \sum_{i=1}^N (\bar{\pi}_i + 0,5 \Delta \bar{w}_i^2) \bar{j}_i \right] \right) - \rho \frac{Q}{T} = - \frac{1}{T} \bar{q} \text{grad } T - \\ - \frac{1}{T} (P; T) - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \bar{j}_i \left[T \text{grad} \left(\frac{\bar{\pi}_i}{T} + 0,5 \frac{\Delta \bar{w}_i^2}{T} \right) - \bar{F}_i + \frac{d\Delta \bar{w}_i}{dt} \right] - \sum_{i=1}^N \frac{1}{T} (\bar{\pi}_i + 0,5 \Delta \bar{w}_i^2) \bar{j}_i \quad (92)$$

Równanie to można zapisać w postaci zwartej

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \bar{J}_s = G_s \quad (93)$$

gdzie: $\bar{J}_s$ - wektor strumienia entropii,

G_s - wydajność źródła entropii.

Jeżeli założymy, że $Q=0$, pominiemy wyrazy zawierające $\Delta \bar{w}_i$ oraz uwzględnimy ruch obrotowy elementów płynu, to otrzymamy zależności określające wielkości $\bar{J}_s$ i G_s

$$\bar{J}_s = \frac{1}{T} \left(\bar{q} - \sum_{i=1}^N \bar{\pi}_i \bar{j}_i \right) \quad (94)$$

$$G_s = -\bar{q} \frac{\text{grad } T}{T} - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \bar{j}_i \left(T \text{grad} \frac{\bar{\pi}_i}{T} - \bar{F}_i \right) + \mu_v \frac{(\text{div} \bar{w})^2}{T} + \\ + \frac{\bar{S}_\mu^s : \bar{T}^s}{T} + \frac{\bar{S}_\mu^a \cdot (\text{rot} \bar{w} - 2\bar{\omega})}{T} + \frac{\mu_o (\text{div} \bar{\omega})^2}{T} + \frac{\bar{M}^s : \bar{\omega}^s}{T} + \frac{\bar{M}^a : \bar{\omega}^a}{T} \geq 0 \quad (95)$$

Zależność (95) wykorzystuje się przy analizie nieodwracalnych zjawisk zachodzących podczas ruchu układów wieloskładnikowych z niesymetrycznym tensorem naprężeń i niesymetrycznym tensorem deformacji.

Wykorzystując zależność

$$T \text{grad} \left(\frac{\bar{\pi}_i}{T} \right) = (\text{grad} \bar{\pi}_i)_T - \frac{\bar{\pi}_i}{T} \text{grad } T \quad (96)$$

gdzie: $(\text{grad} \bar{\pi}_i)_T$ - pochodna potencjału termodynamicznego /chemicznego - go/ przy stałej temperaturze,

$\bar{\pi}_i$ - entalpia właściwa i-tego składnika mieszaniny,

oraz biorąc pod uwagę fakt, że tylko $N-1$ strumieni dyfuzyjnych są niezależne, relacja (95) przyjmie postać

$$\sigma_s = -\bar{q}_w \frac{9 \text{ grad } T}{T} - \sum_{i=1}^{N-1} [(9 \text{ grad } \pi_i)_T - \bar{F}_i] \bar{f}_i + \frac{\mu_v (\text{div } \bar{w})^2}{T} + \frac{2\mu \bar{T}^2 \bar{T}^2}{T} + \frac{5 \bar{f}_i (\text{rot } \bar{w} - 2\bar{\omega})}{T} + \frac{\mu_0 (\text{div } \bar{\omega})^2}{T} + \frac{2\mu_s \bar{\omega}^2 \bar{\omega}^2}{T} + \frac{M^2 \bar{\omega}^2}{T} \geq 0 \quad (97)$$

gdzie $\bar{q}_w$ oznacza strumień ciepła określony zależnością

$$\bar{q}_w = \bar{q}_v - \sum_{i=1}^N i_i \bar{f}_i \quad (98)$$

Biorąc pod uwagę zasadę symetrii Curie oraz związki (96 - 1.2) i (97-1.2) można z relacji wyznaczyć liniową zależność pomiędzy termodynamicznymi strumieniami i siłami dla układów z tensorem prędkości deformacji $\bar{T}$ /ruch postępowy/ oraz tensora prędkości mikroobrotów i mikrozginów $\bar{\omega}$.

2.2.4. Równanie bilansu masy dla przepływu burzliwego

W wyniku ruchu burzliwego gęstość i prędkość mieszaniny doznają przypadkowych pulsacji. Jeżeli do równania (35) zastosujemy uśrednienie (178-1.2), to otrzymamy równanie bilansu masy i-tego składnika mieszaniny

$$\frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho}_i \bar{w}) = -\text{div} \bar{f}_i - \text{div}(\bar{\rho}_i \bar{w}') + \bar{f}_i \quad (99.)$$

Równanie to wyprowadzone zostało z założeniem, że uśrednione wartości gęstości i prędkości oraz ich pulsacje nie są ze sobą skorelowane. Ostatni wyraz prawej strony tego równania oznacza uśrednioną gęstość strumienia masy i-tego składnika wytwarzanego w wyniku reakcji homogenicznej reskcji chemicznej.

Jeżeli użyjemy pojęcia wektora strumienia masy przepływu burzliwego

$$\bar{f}_i^b = \bar{\rho}_i \bar{w}' = \bar{\rho}_i \bar{w} - \bar{\rho}_i \bar{w} \quad (100)$$

to równanie (124) przyjmie postać

$$\frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho}_i \bar{w}) = -\text{div} \bar{f}_i - \text{div} \bar{f}_i^b + \bar{f}_i \quad (101)$$

Dla przypadku $\varphi = \text{const}$, wykorzystując równanie (39) oraz zakładając, że strumień masy (44) zależy tylko od dyfuzji stężeniowej, uśrednione równanie ciągłości dla i-tego składnika mieszaniny przyjmie postać

$$\frac{d\bar{c}_i}{dt} = D_i \Delta \bar{c}_i - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \bar{j}_i + \frac{\bar{i}_i}{\rho} \quad (102)$$

gdzie $\bar{c}_i$ - wartość uśredniona stężenia wagowego ($\bar{c}_i$) i-tego składnika mieszaniny.

Wektor gęstości strumienia masy w przepływie burzliwym wyznacza się z zależności empirycznych /Slattery/. Zależności te zostały sformułowane na podstawie wniosków jakościowych wyciągniętych z pomiarów doświadczalnych wykonanych przez różnych badaczy dla konkretnych obszarów przepływu płynu /Prandtl, Deissler/.

2.3. UKŁADY WIELOFAZOWE

2.3.1. Parametry fizykoeconomiczne układów wielofazowych

Układ wielofazowy można zastąpić fikcyjnym płynem. Zakłada się, że każda faza rozmieszczona jest równomiernie w objętości układu i jest fazą ciągłą pomimo swojej dyskretniej struktury. Płyn fikcyjny równoważny układowi wielofazowemu charakteryzuje się parametrami uśrednionymi w przestrzeni i w pewnym przedziale czasu. Wartości uśrednionych parametrów zależą więc w sposób dowolny od wielkości przedziału czasu oraz kształtu i wielkości objętości. Uśrednione parametry układu wielofazowego dla konkretnej jego struktury można wyznaczyć traktując taki układ dyskretny jako zjawisko przypadkowe. Prawdopodobieństwo określające stan fazy w pewnym momencie i pewnym punkcie przestrzeni można utożsamić ze stężeniem objętościowym k-tej fazy w danym punkcie przestrzeni.

Jeżeli w objętości V ośrodka jednolitego równoważnego układowi wielofazowemu k-ta faza zajmuje objętość V_k , to udział objętościowy tej fazy w mieszaninie określa zależność

$$x_{vk} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{V_k}{V} \quad (1)$$

gdzie: x_{vk} - udział objętościowy k-tej fazy

V - objętość układu,

V_k - objętość k-tej fazy,

k - indeks oznaczający k-tą fazę $k = \overline{1, n}$.

Udział masowy k-tej fazy w układzie wielofazowym określa się analogicznie z zależności

$$\bar{x}_k = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{m_k}{m} \quad (2)$$

gdzie: $\bar{x}_k$ - udział masowy k-tej fazy,
 m_k - masa k-tej fazy,
 m - masa układu wielofazowego o objętości V .
 Udziały x_{vk} oraz $\bar{x}_k$ spełniają zależność

$$\sum_{k=1}^M x_{vk} = \sum_{k=1}^M \bar{x}_k = 1 \quad (3)$$

Niekiedy zamiast udziału objętościowego x_{vk} używa się udziału objętościowego fazy dyspersyjnej

$$x_{vd} = \frac{V_d}{V} \quad (4)$$

gdzie: x_{vd} - udział objętościowy fazy dyspersyjnej,
 V_d - objętość fazy dyspersyjnej.

Dysponując udziałami objętościowymi oraz gęstościami poszczególnych faz można wyznaczyć gęstość układu wielofazowego

$$\rho = \sum_{k=1}^{M_s} \rho_k^0 x_{vk} + \sum_{M_s+1}^M \rho_k^0 x_{vk} \quad (5)$$

gdzie: ρ_k^0 - gęstość rzeczywista k-tej fazy,
 M_s - liczba składników tworzących fazę rozproszoną,
 M - ogólna liczba składników w układzie wielofazowym.
 Gęstość rzeczywistą każdej k-tej fazy układu dyspersyjnego określa się z zależności

$$\rho_k^0 = \frac{m_k}{V_k} \quad (6)$$

W równaniach mechaniki płynów używa się gęstości k-tej fazy

$$\rho_k = \frac{m_k}{V} \quad (7)$$

Wykorzystując wzory (1), (6) oraz (7) otrzymamy inną postać zależności (5)

$$\rho = \sum_{k=1}^{M_s} \rho_k + \sum_{M_s+1}^M \rho_k \quad (8)$$

Dla dyspersji dwuskładnikowej i uśrednionych parametrów fazy ciągłej i dyspersyjnej wzór (5) przyjmie postać

$$\rho = \rho_d x_{vd} + \rho_c x_{vc} \quad (9)$$

gdzie: ρ_d - średnia gęstość fazy dyspersyjnej,
 ρ_c - średnia gęstość fazy ciągłej,
 x_{vd} - udział objętościowy fazy dyspersyjnej,
 x_{vc} - udział objętościowy fazy ciągłej.

Zależność (9) można zapisać w innej postaci

$$\rho = (\rho_d - \rho_c)x_{vd} + \rho_c = \rho_d - (\rho_d - \rho_c)x_{vc} \quad (10)$$

Niekiedy zamiast udziału objętościowego używa się pojęcia porowatości układu dyspersyjnego wyrażonej w postaci zależności

$$e = \frac{V_c}{V} \quad (11)$$

Równania mechaniki płynów ciągłych otrzymuje się przez uśrednienie mikrorównań w skali dV . W układach heterofazowych występują efekty w skali dużo mniejszej. Zmusza to do wprowadzenia do mikrorównań wartości chwilowych gęstości rzeczywistych ρ_k^0 w punktach wewnętrznych każdej k -tej fazy.

Większość takich układów są układami nienuetonowskimi.

W reologii układów dyspersyjnych zakłada się, że znane są parametry reologiczne fazy, a nieznane są tylko parametry układu. Może zaistnieć przypadek /piana/, że każda z faz charakteryzuje się tylko lepkością, a układ wielofazowy poza lepkością ma określone własności mechaniczne, jak sprężystość i wytrzymałość. Podczas mieszania fazy zmienia się więc nie tylko wielkość stałej reologicznej /lepkości/, lecz i prawa deformacji.

Lepkość układu dyspersyjnego zależy od następujących czynników:

- kształtu, wymiaru i masy cząstek fazy rozproszonej,
- wielkości objętości zajmowanej przez fazę rozproszoną,
- podatności cząstek na odkształcenie,
- warunków termodynamicznych,
- stężenia fazy rozproszonej,
- stanu elektromagnetycznego układu dyspersyjnego.

W teorii ilościowej opracowano trzy modele układów dyspersyjnych, w których wydzielono najistotniejsze i charakterystyczne związki występujące w układzie dyspersyjnym.

W literaturze podawane są następujące modele opisujące własności reologiczne układów dyspersyjnych:

- model Einsteina dla układów nie tworzących struktury,
- model Frienkla-Eyringa dla układów o ograniczonej objętości,
- model Bibika dla układów tworzących strukturę.

Model Einsteina stosuje się do suspensji rozciągniętej, gdzie brak jest wzajemnego oddziaływania cząstek i reologiczne własności określone są zachowaniem się pojedynczej cząstki.

Cząstka w fazie ciągłej porusza się z prędkością ruchu postępowego fazy ciągłej. W obszarze odległym od cząstki prędkość cieczy jest inna i cząstka doznaje obrotu z prędkością równą prawie połowie prędkości odkształcenia ośrodka ciągłego. Dysypacja energii zachodzi tylko w wyniku tarcia powierzchni obracającej się cząstki o ośrodek ciągły. Energia rozproszona układem cząstek fazy dyspersyjnej jest wielkością addytywną. Suspensję rozrzedzoną traktuje się jak płyn newtonowski. Straty energii tarcia są proporcjonalne do kwadratu prędkości odkształcenia

$$E(\dot{\gamma}) = \mu \dot{\gamma}^2 \quad (12)$$

gdzie: E - wielkość dysypacji energii mechanicznej,

μ - lepkość układu,

$\dot{\gamma}$ - prędkość odkształcenia.

W przypadku czystego odkształcenia prędkość $\dot{\gamma}$ określona jest prędkością przepływu fazy ciągłej w_x

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dz} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{dw_x}{dz} \quad (13)$$

W ogólnym przypadku postać funkcji $E(\dot{\gamma})$ nie jest znana. Ustala się ją na drodze doświadczalnej na podstawie metod termodynamiki procesów nieodwracalnych lub z teorii kinetyczno-cząsteczkowej procesu odkształcenia. Znajac wielkość $E(\dot{\gamma})$ można wyznaczyć lepkość układu dyspersyjnego

$$\mu = \frac{E(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}^2} \quad (14)$$

Rozwiązanie równania (14) daje zależność

$$\mu = \exp \{ 2,5 \chi_{vd} (1 - k' \chi_{vd})^{-1} \} \quad (15)$$

gdzie k' - współczynnik określany doświadczalnie.

Dla cząstek kulistych część liniową rozwiązania (14) daje wzór Einsteina

$$\mu = \mu_0 \frac{(1 + \frac{5}{2} \chi_{vd})}{1 - \chi_{vd}} \approx \mu_0 (1 + \frac{5}{2} \chi_{vd}) \quad (16)$$

gdzie: μ - lepkość suspensji/lepkość cieczy jednorodnej, równowaznej badanej suspensji/,

μ_0 - lepkość fazy ciągłej,

χ_{vd} - udział objętościowy fazy dyspersyjnej.

Wzór (16) wskazuje, że rozrzedzona faza dyspersyjna ($x_{vd} < 0,1$) jest cieczą newtonowską ($\mu = \text{const}$) o lepkości niezależnej od wielkości cząstek z tym zastrzeżeniem, że wymiar cząstki musi być dużo większy od wymiaru cząstki fazy ciągłej.

Lepkość μ jest wielkością addytywną i stanowi sumaryczny wynik działania każdej cząstki fazy rozproszonej.

Jeżeli cząstka ma kształt wydłużony, to Jeffrey zaproponował nieco inny wzór do obliczenia lepkości

$$\mu = \mu_0(1 - x_{vd}) \quad (17)$$

Dla cząstek o kształcie elipsoidalnym wzór (17) ma postać

$$\mu = \mu_0(1 - 5x_{vd}) \quad (18)$$

Jeżeli cząstki fazy rozproszonej są kroplami cieczy lub pęcherzykami, to wzór do obliczenia współczynnika lepkości ma postać /Soc/

$$\mu = \mu_0(1 + 2,5x_{vd} \frac{\mu_i + 2,5\mu_0}{\mu_i + \mu_0}) \quad (19)$$

gdzie μ_i - lepkość płynu w kropli lub pęcherzyku.

Przy $\frac{\mu_i}{\mu_0} \rightarrow \infty$ układ dyspersyjny jest suspensją i obowiązuje wzór (16), a przy $\frac{\mu_i}{\mu_0} \rightarrow 0$ układ dyspersyjny jest układem typu "ciecz wrząca" i obowiązuje wzór

$$\mu = \mu_0(1 + x_{vd}) \quad (20)$$

Dla emulacji proponowane są w literaturze inne wzory do obliczenia tego parametru

$$\mu = \mu_0(1 + 2x_{vd}) \left[1 - 12(x_{vd})^{\frac{2}{3}} \right]^{-2} \quad (21)$$

$$\mu = \mu_0(1 + 2x_{vd}) \frac{(1 + x_{vd})^2}{(1 - x_{vd})^2} \quad (22)$$

$$\mu = \mu_0(1 - x_{vd})^{-2,5} \quad (23)$$

Lepkość rzeczywista rozcieńczonych suspensji może być o rząd wielkości większa od lepkości obliczonej ze wzorów (16-19). Tłumaczy się to powstawaniem na cząstkach różnego rodzaju warstw /jonowych, adsorpcyjnych, solwatacyjnych/. W ramach teorii Einsteina zjawiska te można uwzględnić przez dodanie podwójnej grubości warstwy do średnicy cząstki. Otrzymany wzór

$$\mu = \mu_0 \left[1 + 2,5 \left(1 + \frac{6\delta}{d} \right) x_{vd} \right] \quad (24)$$

gdzie: δ - grubość warstwy,
 d - średnica cząstki kulistej.

Dla przepływu suspensji lub emulsji w rurze efektywną lepkość można obliczyć z zależności /Cox, Mason/

$$\mu = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{5}{2} x_{vd} \left(1 + \frac{61}{75} \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right) \right\} \quad (25)$$

gdzie D - średnica rury.

Przy $d \ll D$ wzór (25) przyjme postać wzoru (16), słusznego dla suspensji o cząstkach kuliastych poruszających się w strumieniu fazy ciągłej z poprzecznym gradientem prędkości.

W miarę wzrostu stężenia fazy rozproszonej coraz silniej objawia się wpływ wzajemnego oddziaływania cząstek na przepływ fazy ciągłej, w wyniku czego wzór (16) przyjme postać równania

$$\mu + d\mu = \mu_0 (1 + 2,5 dx_{vd}) \quad (26)$$

Rozkład rozwiązania równania w szereg daje zależność

$$\mu = \mu_0 \exp(2,5 x_{vd}) = \mu_0 (1 + 2,5 x_{vd} + \beta_2 (x_{vd})^2 + \dots) \quad (27)$$

gdzie β_2 - współczynnik zależny od rozkładu średnic cząstek względem wielkości średniej średnicy.

Nieliniowa zależność lepkości od udziału objętościowego fazy rozproszonej obowiązuje od pewnego stężenia cząstek zwanego stężeniem krytycznym, poniżej którego cząstki fazy rozproszonej są kinetycznie niezależne i we wzorze (27) pozostaje tylko człon liniowy.

Jeżeli ograniczymy się do uwzględnienia tylko prostych binarnych zderzeń cząstek kuliastych oraz nie uwzględnimy ruchu Browna cząstek, to wzór (27) przyjme postać

$$\mu = \mu_0 [1 + 2,5 x_{vd} + 7,35 (x_{vd})^2] \quad (28)$$

Dla suspensji stężonych hydrodynamiczne oddziaływania cząstek fazy rozproszonej mają pierwszorzędne znaczenie.

Wobec trudności określenia sił oddziaływania pomiędzy samymi cząsteczkami oraz pomiędzy cząsteczkami a fazą ciągłą, brak jest teoretycznego opisanis lepkich własności stężonych układów dyspersyjnych.

Układ dyspersyjny można rozpatrywać jako fikcyjny jednorodny płyn

ściśliwy, a więc poza naprężeniem stycznym może występować naprężenie normalne. Ciśnienie zewnętrzne, wywołujące odkształcenie objętościowe układu, można powiązać z prędkością względną zmiany objętości relacją podobną do wzoru (82-1.3) lub wzoru (12) ze współczynnikiem proporcjonalności, zwany współczynnikiem lepkości objętościowej

$$P = \mu_v \dot{V} \quad (29)$$

$$E(\dot{V}) = \mu_v \dot{V}^2 \quad (30)$$

gdzie: $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$ - prędkość względnych zmian objętości,
 μ_v - współczynnik lepkości objętościowej.

Współczynnik lepkości objętościowej /współczynnik lepkości krzywiznowej/ określa się z zależności

$$\mu_v = \frac{4}{3} \mu \frac{(1 - x_{vd})}{x_{vd}} \approx \frac{4}{3} (\mu_{vd})^{-1} \quad (31)$$

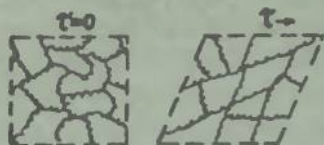
W wyniku ruchu cyrkulacyjnego, tj. przejścia każdej cząstki z jednej warstwy strumienia do drugiej lub w wyniku obrotu cząstki względem fazy ciągłej lepkość układu nieco wzrasta. Przyrost ten uwzględniono przez wprowadzenie przy tensorze antysymetrycznym lepkości obrotowej

$$\mu_r = 3\mu_0 \frac{x_{vd}}{1 - x_{vd}} \approx 3\mu_0 x_{vd} \quad (32)$$

Model Bibika dotyczy układów dyspersyjnych, w których pod działaniem pól zewnętrznych formuje się struktura typu łańcuchów liniowych lub rozgałęzionych. Teoria ta jest szczególnie przydatna dla koloidalnych roztworów ferromagnetyków /ciecz ferromagnetyczna/. Łańcuchy cząstek poruszają się z lokalną prędkością $\bar{v}$ fazy ciągłej oraz przemieszczają się względem sąsiednich łańcuchów i każda cząstka łańcucha podlega działaniu siły tarcia lepkiego. W zależności od wielkości ilorazu siły niszczącej /naprężenie odkształcenia/ oraz siły przyciągania /pole magnetyczne/ łańcuchy mogą ulegać rozerwaniu lub zwiększać swoją długość. Zmienia się lepkość układu dyspersyjnego.

Pośrednim modelem układu dyspersyjnego jest model aktywacyjny Frienkiela-Ryzynga. W modelu tym układ dyspersyjny tworzy strukturę podobną do struktury siatki krystalicznej. Przepływ układu jest możliwy dzięki istnieniu wakantów w siatce struktury. Zgodnie z tym modelem prędkość ruchu warstw względem siebie równa jest prędkości ruchu wakantów. Wzór określający współczynnik lepkości układu dyspersyjnego ma postać

$$\mu = \gamma \left[2 \left\{ 0.5h \left(\frac{\gamma s^3}{2kT} \right) \right\}^{-1} \right] \quad (33)$$



Rys. 83. Zmiana stanu struktury na skutek działania naprężenia stycznego



Rys. 84. Ruch wakantów

gdzie: s - odległość pomiędzy warstwami cząstek,
 f_0 - częstość przeskoków cząstek w nowe położenie, mniej narażone na działanie sił odkształcających,
 k - stała Boltzmanna,
 τ - naprężenie w siatce wakantów wywołane siłą zewnętrzną.
 Wielkość f_0 określa się z zależności

$$f_0 = f_T \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right) \quad (34)$$

gdzie: f_T - częstość drgań cieplnych,
 ΔE - energia aktywacji przepływu lepkiego.

Model Fienkiela-Eyringa stosowany jest do określenia lepkości układów dyspersyjnych o własnościach dylatacyjnych oraz tiksotropowych.

Zagadnienie obliczania współczynnika przewodnictwa cieplnego układów dyspersyjnych nie jest dostatecznie poznane.

Dla zawiesin lub układów koloidalnych proponowany jest wzór

$$\lambda = 0,9\lambda_c \quad (35)$$

gdzie: λ_c - współczynnik przewodnictwa cieplnego fazy ciągłej.

Dla emulsji współczynnik λ można obliczyć ze wzoru

$$\lambda = \lambda_d x_{vd} + \lambda_c x_{vc} \quad (36)$$

gdzie: λ_d - współczynnik przewodnictwa cieplnego fazy rozproszonej.

Podczas obliczania współczynnika lepkości, przewodnictwa cieplnego oraz współczynnika dyfuzji rozrzedzonych układów dyspersyjnych można założyć niezależność tych parametrów fizycznych od obecności fazy rozproszonej i przyjąć wartości tych parametrów równe wartościom

obliczonym dla czystej fazy ciągłej.

2.3.2. Średnia średnica elementu fazy dyspersyjnej

Jeżeli element fazy rozproszonej jest niedeformowalny i ma kształt zbliżony do kulistego, to wtrącenia stałe, krople cieczy oraz pęcherzyki gazu można traktować jednakowo i przypisać takiemu elementowi fazy rozproszonej pewną średnią średnicę określoną zależnością

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^N d_i}{N} \quad (37)$$

gdzie: $\bar{d}$ - średnia średnica elementu fazy rozproszonej,

d_i - średnica elementu,

N - liczba elementów fazy rozproszonej.

Jeżeli liczba cząstek fazy dyspersyjnej jest duża, to zachowanie się układu dyspersyjnego traktuje się jako zjawisko statystyczne. Wielkości charakterystyczne opisujące układ dyspersyjny jak również średnice cząstek są wielkościami przypadkowymi. Wielkości takie opisane są funkcjami przypadkowymi i nie nadają się one do obliczeń analitycznych. Wprowadza się zatem funkcje nieprzypadkowe, będące charakterystykami funkcji przypadkowych. W obliczeniach średniej średnicy cząstki lub średnicy równoważnej cząstki kulistej operuje się różniczkową lub całkową funkcją rozkładu prawdopodobieństwa średnio cząstek.

Jeżeli cząstki mają podobny kształt geometryczny mało różniący się od średniego kształtu, to średnicę cząstki można opisać dwoma wielkościami:

- średnia równoważna średnica cząstki kulistej,
- funkcja rozkładu średnic dokoła średnicy $\bar{d}$.

Traktując rozkład średnic jako ciągłą funkcję przypadkową można zapisać następującą zależność wyrażającą udział cząstek o średnicy mniejszej od d

$$\frac{n_i}{N} = \int_0^d f(d) dd \quad (38)$$

gdzie: n_i - liczba cząstek o średnicy zawartej w przedziale $[d_1, d]$,

$f(d)$ - funkcja rozkładu średnic /różniczkowa funkcja rozkładu prawdopodobieństwa/.

Wobec zależności (37) oraz (38) średnią średnicę cząstki, równoważną średnicy cząstki kulistej określa się ze wzoru

$$\bar{d} = \frac{\int_0^\infty d f(d) dd}{\int_0^\infty f(d) dd} = \int_0^\infty d f(d) dd \quad (39)$$

Wzór ten można zapisać w postaci ogólnej

$$\bar{d} = \left(\frac{\int_0^{\infty} d^n f(d) dd}{\int_0^{\infty} f(d) dd} \right)^{1/n} \quad (40)$$

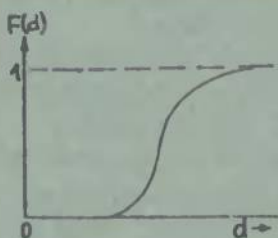
W zależności od rozpatrywanego zjawiska przenoszenia substancji, średnicę $\bar{d}$ określa się ze wzoru (40) dla różnej wartości n , a, mianowicie:

- $n=1$, gdy cząstki są małe i poruszają się z małą prędkością względną,
- $n=2$, gdy rozpatujemy proces wymiany ciepła i masy na powierzchni rozdziálu faz,
- $n=3$, gdy operujemy pojęciem udziału objętościowego.

Średnią średnicę cząstki wyznaczyć można z krzywej granulometrycznej

$$F(d) = \int_{d_1}^d f(d) dd \quad (41)$$

gdzie $F(d)$ - całkowita funkcja rozkładu prawdopodobieństwa.



Rys. 85. Krzywa granulometryczna

Teoretycznie dolną granicę osłki przyjmuje się $d_1=0$.

Krzywa granulometryczna o równaniu (41) obrazuje liczbę cząstek z zadanej liczby cząstek N mających średnicę mniejszą od d lub masę cząstek o średnicy pomiędzy d i $d+dd$. Określenie $F(d)$ polega na ważeniu z masy m masy dm tych cząstek, które przechodzą przez sito o wymiarze oczek $d+dd$ i nie prze-

chodzą przez oczko o wymiarze d .

Iloraz mas daje unormowaną różniczkową funkcję rozkładu prawdopodobieństwa średnic cząstek dokoła wartości $\bar{d}$

$$\frac{dm}{m} = \frac{d^3 f(d) dd}{\int_0^{\infty} d^3 f(d) dd} = \frac{d^3 f(d) dd}{\bar{d}^3} = g(d) dd \quad (42)$$

Jeżeli przedział rozkładu średnic jest mały, to funkcję $f(d)$ określa się wagowo. Jeżeli przedział ten jest bardzo szeroki, to do określenia $f(d)$ należy liczyć cząstki.

Jeżeli cząstki mają niejednakowy kształt geometryczny, to należy poszegregować cząstki na grupy o jednakowym lub zbliżonym kształcie i do każdej grupy zastosować np. wzór

$$\bar{d} = \left(\frac{6 \sum_{i=1}^N k_i d_i^3}{\pi N} \right)^{1/3} \quad (43)$$

gdzie k_i - współczynnik kształtu cząstki i-tego gatunku.

W zasadzie niewielkie odchylenie kształtu cząstki od kształtu uważanego jako średni nie ma istotnego wpływu na obliczenie wielkości $\bar{d}$, ponieważ przepływ suspensji, jak już wspomiano powyżej, traktowany jest jako zjawisko przypadkowe. Zwykle kształt cząstki sprowadza się do kształtu kulistego lub kształtu wydłużonego /włókno/.

2.3.3. Ruch cząstki nieodeformowalnej

Badanie zachowania się pojedynczej cząstki w fazie ciągłej oraz zastosowanie teorii kinetycznej gazów pozwoliło opisać układ dyspersyjny ogólnymi równaniami, używanymi w teorii płynów jednorodnych.

Cząstka w fazie ciągłej znajduje się w ruchu postępowym, obrotowym i drgającym. Ruch obrotowy cząstki pojawia się pod działaniem gradientu prędkości w warstwie granicznej na powierzchni cząstki. Przy małych wartościach liczby Reynoldsa grubość warstwy granicznej po obu stronach płaszczyzny przechodzącej przez środek masy cząstki jest różna. Różna masa płynu przyłożona do ścianek cząstki powoduje jej obrót i powstanie wiru. Przy dużych wartościach liczby Reynoldsa zachodzi zjawisko oderwania się warstwy i powstają dodatkowe wiry. Pojawiają się siły przeciwdziałające zewnętrznej sile wywołującej ruch cząstki.

Podczas ruchu cząstki działają na nią różne siły i równanie różniczkowe zachowania pędu ma postać

$$m_{cz} \frac{d\bar{w}_{cz}}{dt} = \sum_{r=1}^R \bar{F}_r = \bar{F} \quad (44)$$

gdzie: m_{os} - masa cząstki,

$\bar{w}_{cz}$ - prędkość ruchu cząstki,

$\bar{F}$ - wypadkowa sił działających na cząstkę.

Wyróżniamy następujące siły działające na cząstkę poruszającą się w płynie:

- siła oporu tarcia

$$\bar{F}_1 = 3\pi \mu d_{cz} \Delta \bar{w}_{cz} \quad (45)$$

- siła ciśnienia

$$\bar{F}_2 = -\frac{\pi}{6} d_{cz}^3 \text{grad } p \quad (46)$$

siła temperaturowa

$$\bar{F}_3 = -\frac{3}{2} \pi \mu^2 d_{cz} \frac{R}{p} \text{grad } T_{cz} \quad (47)$$

- siła wynikająca z przysięconych mas

$$\bar{F}_4 = -0,5m \left(\frac{d\bar{w}}{dt} - \frac{d\bar{w}_{c2}}{dt} \right) \quad (48)$$

- siła Coriolisa

$$\bar{F}_5 = -2m_{c2}(\bar{\Omega} \times \bar{w}_{c2}) \quad (49)$$

- siła bezwładności styczna do linii prądu związana z ruchem obrotowym fazy ciągłej

$$\bar{F}_6 = -2m_{c2}(\bar{\Omega} \times \bar{w}) \quad (50)$$

- siła Magnusa

$$\bar{F}_7 = -Cm_{c2}(\Delta\bar{w}_{c2} \times \bar{w}_{c2}) \quad (51)$$

- siła wyporu

$$\bar{F}_8 = -\frac{4}{3}\pi \frac{d_{c2}^3}{8} \rho \bar{g} \quad (52)$$

- siła pola grawitacyjnego

$$\bar{F}_9 = -m_{c2} \bar{g} \quad (53)$$

- siła uwzględniająca odchylenie przepływu płynu od przepływu ustalonego /siła Basseta/

$$\bar{F}_{10} = \frac{3}{2} d_{c2}^2 \sqrt{\pi \rho \mu} \int_{t_0}^t \frac{\frac{d\bar{w}}{d\tau} - \frac{d\bar{w}_{c2}}{d\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (54)$$

gdzie: ρ - współczynnik,

d_{c2} - średnica cząstki,

m - masa cieczy wypartej przez cząstkę,

R - stała gazowa,

T_{c2} - temperatura cząstki,

$\bar{w}$ - prędkość płynu,

ρ, μ - parametry fizyczne płynu.

Wielkość $\Delta\bar{w}_{c2}$ określa się z zależności

$$\Delta\bar{w}_{c2} = \bar{w} - \bar{w}_{c2} \quad (55)$$

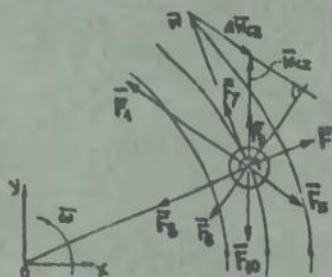
i spełnia następujące warunki:

- $\Delta\bar{w}_{c2} = 0$ na powierzchni cząstki,

$\Delta\bar{w}_{c2} \neq 0$ na pewnej powierzchni oddalonej od cząstki zamykającej

objętość cieczy, poza którą prędkość ruchu płynu $\bar{W}$ jest wszędzie jednakowa. Pod działaniem siły $\bar{F}_1$ maleje prędkość względna $\Delta \bar{w}_{os}$.

Siły (45 + 54) działające na cząstkę ciała stałego w gazie pokazano na rysunku 86.



Rys. 86. Siły działające na cząstkę

Siła $\bar{F}_4$ występuje wówczas, gdy gradient temperatury ma istotny wpływ na lepkość. Wzór (47) jest słuszny dla przepływu swobodnego, tj dla przypadku, gdy średnica cząstki $/d_{os}/$ fazy rozproszonej jest dużo większa od drogi przebiegu swobodnego $/L/$ cząstki fazy ciągłej $/d_{os} \gg L/$. Jeżeli średnia gęstość cząstki jest większa od średniej gęstości fazy ciągłej $\rho_{os} > \rho$, to uwzględnia się siłę $\bar{F}_4$. Siła ta skierowana jest zawsze w kierunku przeciwnym do linii działania siły $\bar{F}_1$. Jeżeli cząstka i płyn są w ruchu obrotowym, to występują dodatkowe siły bezwładności $\bar{F}_5$ oraz $\bar{F}_6$. Siła $\bar{F}_6$ działa stycznie do linii prądu. Kierunek działania wypadkowej sił $\bar{F}_5$ oraz $\bar{F}_6$ zależy od znaku $\Delta \bar{w}_{os}$. Jeżeli $\bar{w}_{os} < \bar{W}$, to wypadkowa sił działa zgodnie z kierunkiem działania siły dośrodkowej, a gdy $\bar{w}_{os} > \bar{W}$, pokrywa się z kierunkiem działania siły odśrodkowej.

W strumieniu fazy ciągłej o nierównomiernym rozkładzie prędkości wzdłuż normalnej do linii prądu, cząstka wykonuje ruch obrotowy dookoła osi przechodzącej przez środek masy cząstki. W wyniku obrotu cząstki pojawia się siła Magnusa. Siła ta dąży do przesunięcia cząstki w poprzek linii prądu zwiększając w ten sposób burliwość płynu. Działanie siły tej przejawia się najsilniej w warstwie granicznej. Określona jest ona znakiem poprzecznej składowej gradientu prędkości fazy ciągłej. Siła Magnusa $\bar{F}_7$ działa wzdłuż linii prostopadłej do osi obrotu cząstki i do kierunku ruchu cząstki oraz skierowana jest w stronę przeciwną do kierunku działania siły bezwładności cząstki.

Jeżeli prędkość absolutna fazy ciągłej poza obszarem otaczającym cząstkę nie jest zgodna z kierunkiem prędkości ruchu postępowego cząstki, to uwzględnia się siły $\bar{F}_8$ oraz $\bar{F}_9$.

Jeżeli cząstki doznają znacznych przyspieszeń, to uwzględniając odchylenie przepływu płynu od przepływu ustalonego wprowadzono siłę $\bar{F}_{10}$. Siła ta działa na cząstkę znajdującą się w płynie lepkim w momencie t i zależy od "historii" zmian $\bar{w}_{os}$ w przedziale czasu od t_0 do t . Siła Basseta charakteryzuje chwilowy opór hydrodynamiczny i istotnie zwiększa siłę oporu.

W zależności od rozpatrywanego zagadnienia uwzględnia się we wzorze (44) te składniki, które istotnie wpływają na przebieg zjawiska.

Jeżeli kulista cząstka jest mała, gęstość jej jest tego samego rzędu co gęstość ośrodka ciągłego, a ruch poprzeczny wywołany poprzecznym gradientem prędkości nieznaczny, to

$$\bar{F}(t) = 3\pi\mu d_{cz}(\Delta\bar{w}_{cz} - \frac{1}{18}\frac{d_{cz}^2}{\mu} \text{grad} p + \frac{1}{36}\frac{9}{\mu} d_{cz}^3 \frac{d\Delta\bar{w}_{cz}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d_{cz}}{\sqrt{t-\tau}}) \int_0^t \frac{d\Delta\bar{w}_{cz}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (56)$$

Obecność cząstki fazy rozproszonej w płynie zmienia charakter przepływu. Przepływ potencjalny przechodzi w przepływ burzliwy. Ruch cząstki w przepływie burzliwym zależy od wymiarów cząstek oraz skali burzliwości (187-1.3.).



- 1-strumień zewnętrzny/para-krople/,
- 2-warstwa graniczna/para-krople/,
- 3-warstwa cieczy,
- 4-warstwa przyścienna/para-krople/,
- 5-strumień zewnętrzny/ciecz/,
- 6-warstwa graniczna/pęcherzyki/

Rys. 87. Struktura dwufazowej warstwy przyściennej

Jeżeli wymiar cząstki jest mniejszy od najmniejszej skali burzliwości, to cząstka reaguje na wszystkie procesy towarzyszące przepływowi burzliwemu. Opór przepływu określa się lepką naturą ośrodka otaczającego cząstkę. W równaniach można nie brać pod uwagę pulsacji prędkości przepływu burzliwego.

Cząstki większe od skali burzliwości przy ruchu poślizgowym w płynie generują za sobą łańcuchy wirowe znacznie zwiększające burzliwość przepływu płynu.

Jeżeli $\bar{w}_{cz} \neq \bar{w}$, to obecność cząstki w strumieniu płynu przyspiesza procesy dysypacyjne.

Jeżeli $\Delta\bar{w}_{cz} = 0$, to cząstka przesuwana się ze stosunkowo wolnym strumieniem o dużej skali burzliwości nie zakłócając przepływu. Wpływa ona jedynie na opór przepływu.

Wykorzystując wzory (44), (56) oraz równanie Naviera i Stokesa dla płynu nieściśliwego po dokonaniu pewnych przekształceń otrzymamy równanie ruchu cząstki kulistej

$$\left(\frac{\rho_{cz}}{\rho} + \frac{1}{2}\right) \frac{d\bar{w}_{cz}}{dt} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{w}}{dt} - \nu \Delta\bar{w} + \left\{ \frac{18\nu}{d_{cz}^2} (\bar{w}_{cz} - \bar{w}) + [(\bar{w}_{cz} - \bar{w}) \text{grad}] \bar{w} + \right. \\ \left. + \frac{9}{d_{cz}} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{d(\bar{w}_{cz} - \bar{w})}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \rho \bar{F} \right\} \quad (57)$$

Równanie (57) jest spełnione dla przypadku, gdy prędkość ruchu cząstki

stki jest znacznie mniejsza od prędkości ruchu cieczy otaczającej cząstkę.

Jeżeli podczas ruchu cząstki niedeformowalnej otacza ją ten sam element płynu, to tor cząstki pokrywa się z linią prądu i równanie (57) upraszcza się do postaci

$$\frac{d\bar{\omega}_2}{dt} = \frac{3}{2\left(\frac{\rho_2}{\rho} + \frac{1}{2}\right)} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{18\nu}{d_2^2\left(\frac{\rho_2}{\rho} + \frac{1}{2}\right)} \Delta\bar{\omega}_2 + \frac{18\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}d_2\left(\frac{\rho_2}{\rho} + \frac{1}{2}\right)} \int_{t_0}^t \frac{d\Delta\bar{\omega}_2}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + 9\bar{F} \quad (58)$$

Równanie (57) uwzględnia tylko ruch postępowy cząstki. W strumieniu niejednorodnym występuje ruch obrotowy cząstki względem powierzchni ograniczającej płyn powodujący odchylenie toru elementu płynu od obliczonego z równania (57). Dla małych wymiarów cząstki odchylenie jest nieznaczne, co pozwala we wzorze (56) uwzględnić dodatkowe czło-ny.

Siła działająca na cząstkę kulistą, która jest jednocześnie w ru-chu postępowym i w ruchu obrotowym stanowi siłę wypadkową sił zwią-żanych z ruchem obrotowym cząstki i płynu

$$\bar{F}_{obr} = \frac{\pi}{6} d^3 \rho (\bar{\omega} - \bar{\Omega}) \times \Delta\bar{\omega}_2 \quad (59)$$

gdzie: $\bar{\omega}$ - prędkość kątowa cząstki,

$\bar{\Omega} = \frac{1}{r} \text{rot} \bar{\omega}$ - prędkość kątowa płynu.

Odnośząc siłę $\bar{F}_{obr}$ do jednostki masy cząstki i przyłączonej masy płynu

$$\bar{F}_{obr} = \frac{3}{4\left(\frac{\rho_2}{\rho} + \frac{1}{2}\right)} (\bar{\omega} - \bar{\Omega}) \times \Delta\bar{\omega}_2 \quad (60)$$

oraz uwzględniając siłę tę w równaniu (58) otrzymamy

$$\frac{d\bar{\omega}_2}{dt} = \left(\frac{\rho_2}{\rho} + \frac{1}{2}\right)^{-1} \left[\frac{3}{2} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{18\nu}{d_2^2} \Delta\bar{\omega}_2 + \frac{18\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}d_2} \int_{t_0}^t \frac{d\Delta\bar{\omega}_2}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + 9\bar{F} - \frac{3}{4} (\bar{\omega} - \bar{\Omega}) \times \Delta\bar{\omega}_2 \right] \quad (61)$$

Do równania (61) należy dołączyć równanie ruchu obrotowego

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{6}{\left(\frac{\rho_2}{\rho} + 5\right)} \frac{d\bar{\Omega}}{dt} + \frac{30\nu^2}{d_2^2\left(\frac{\rho_2}{\rho} + 5\right)} (\bar{\Omega} - \bar{\omega}) + \bar{M}_1 + \bar{M}_2 \quad (62)$$

gdzie: $I = \frac{\pi}{60} \rho_2 d^2 \bar{\omega}$ moment bezwładności cząstki kulistej,

$\bar{M}_1$ - analog siły Basseta dla ruchu obrotowego,

$\bar{M}_2$ - moment sił zewnętrznych i sił związanych z reakcją uk-ładu na siłę (60).

Przy $d_{oz} \rightarrow 0$ efekty wzajemnego oddziaływania ruchu postępowego i

obrotowego w skali czasu Ω^{-1} są pomijalnie małe w porównaniu z efektem działania siły Stokesa i siły bezwładności. Dlatego podczas analizy ruchu cząstki pomija się wielę (54), (60) oraz wielkości $\bar{F}$, $\bar{M}_1$ i $\bar{M}_2$. Wówczas równanie (58) przyjmie postać

$$\frac{d\bar{w}_{c2}}{dt} = \frac{3}{2(\frac{\rho_{c2}}{\rho} + \frac{1}{2})} \frac{d\bar{w}}{dt} + \frac{18\nu}{d_{c2}^2(\frac{\rho_{c2}}{\rho} + \frac{1}{2})} \Delta \bar{w}_{c2} \quad (63)$$

Równanie ruchu (57) może być użyte do opisu ruchu chaotycznego cząstki.

Jeżeli założymy, że ruch chaotyczny cząstki w cieczy jest znikomy poza odległością rzędu amplitudy drgań, to wektor wodzący cząstkę $\bar{r}(t)$ oraz wektory $\bar{w}_{c2}(t)$ i $\bar{w}(t)$ można zapisać w postaci

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t) + \bar{r}'(t) \quad (64)$$

$$\bar{w}_{c2}(t) = \bar{w}_{c2}(t) + \bar{w}'_{c2}(t) \quad (65)$$

$$\bar{w}(t) = \bar{w}(t) + \bar{w}'(t) \quad (66)$$

Jeżeli uwzględnimy powyższe zależności we wzorze (57), pomnożymy otrzymane równanie przez $\bar{w}'_{c2}(t)$ lub przez $\bar{w}'(t)$, to otrzymamy równania

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} R_{\bar{w}_{c2}\bar{w}_{c2}}(\tau) &= \frac{3}{2(\frac{\rho_{c2}}{\rho} + \frac{1}{2})} R_{\bar{w}_{c2}\bar{w}}(\tau) + \frac{18\nu}{d_{c2}^2(\frac{\rho_{c2}}{\rho} + \frac{1}{2})} [R_{\bar{w}_{c2}\bar{w}}(\tau) - R_{\bar{w}_{c2}\bar{w}_{c2}}(\tau)] + \\ &+ \frac{18\nu}{\sqrt{\pi} d_{c2}(\frac{\rho_{c2}}{\rho} + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d}{d\theta} [R_{\bar{w}_{c2}\bar{w}}(\theta) - R_{\bar{w}_{c2}\bar{w}_{c2}}(\theta)] \frac{d\theta}{\sqrt{\tau - \theta}} \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} R_{\bar{w}\bar{w}_{c2}}(\tau) &= \frac{3}{2(\frac{\rho_{c2}}{\rho} + \frac{1}{2})} R_{\bar{w}\bar{w}}(\tau) - \frac{18\nu}{d_{c2}^2(\frac{\rho_{c2}}{\rho} + \frac{1}{2})} [R_{\bar{w}\bar{w}}(\tau) - R_{\bar{w}\bar{w}_{c2}}(\tau)] + \\ &+ \frac{18\nu}{\sqrt{\pi} d_{c2}(\frac{\rho_{c2}}{\rho} + \frac{1}{2})} \int_{-\tau}^{\infty} \frac{d}{d\theta} [R_{\bar{w}\bar{w}}(\theta) - R_{\bar{w}\bar{w}_{c2}}(\theta)] \frac{d\theta}{\sqrt{\tau - \theta}} \end{aligned} \quad (68)$$

gdzie: $R(\tau)$ - funkcja korelacyjna / w ogólnym przypadku tensor/,

$$R_{\bar{w}\bar{w}}(\tau) = M \{ \bar{w}(t) \bar{w}(t+\tau) \} \quad (69)$$

$$R_{\bar{w}_{c2}\bar{w}}(\tau) = M \{ \bar{w}_{c2}(t) \bar{w}(t+\tau) \} \quad (70)$$

$$R_{\bar{w}_{c2}\bar{w}_{c2}}(\tau) = M \{ \bar{w}_{c2}(t) \bar{w}_{c2}(t+\tau) \} \quad (71)$$

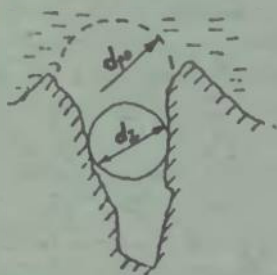
Podane równania opisują ruch cząstki w nieograniczonej objętości. Obecność ścianek zmienia intensywność ruchu cząstek. Wpływ wzajemnego oddziaływania cząstki ze ścianką uwzględnia się przez wprowadzenie do

równań ruchu małego parametru proporcjonalnego do ilorazu d_{02}^3 / l^3
/1-wymiar liniowy objętości ograniczającej płyn/.

2.3.4. Ruch elementu deformowalnego

W odróżnieniu od cząstek ciała stałego pęcherzyki i krople jako elementy fazy dyspersyjnej ulegają deformacji, występuje cyrkulacyjny ruch płynu wewnątrz elementu oraz mogą zachodzić procesy łączenia się, rozdrabniania się lub nawet całkowitego ich niszczenia.

Pęcherzyki mogą tworzyć się w sposób naturalny /rysunek 88 / lub mogą być utworzone w sposób sztuczny.



W sposób naturalny pęcherzyk tworzy się na powierzchni w wyniku odparowania cieczy. Podczas ruchu cieczy zachodzą procesy dysypacji energii tarcia lepkiego związane z ruchem postępowym względnym pęcherzyka i dyfuzji w wyniku procesu przewodnictwa cieplnego. Z uwzględnieniem procesów dysypacji średnicę pęcherzyka d_p oblicza się ze wzoru

Rys.88. Tworzenie się pęcherzyka

$$d_p = C \left(\frac{\sigma}{\rho_c} \right)^{3/5} \frac{\Phi}{m} \quad (72)$$

gdzie: C - stała,

d_p - średnica pęcherzyka,

m - masa cieczy,

ρ_c - gęstość cieczy,

σ - współczynnik napięcia powierzchniowego,

Φ - funkcja dysypacji energii.

Sztuczny sposób otrzymania pęcherzyków polega na wdmuchiwanii do cieczy przez kapilarę lub porowate dno powietrza lub innego gazu.

Średnicę pęcherzyka na wylocie z kapilary określa się ze wzoru

$$d_p = C \left[\frac{D\sigma}{2g} (\rho_c - \rho_g) \right]^{1/3} \quad (73)$$

gdzie: D - średnica otworu,

ρ_g - gęstość gazu.

Lepkość cieczy oraz temperatura w sposób nieznaczny wpływają na średnicę pęcherzyka. Średnica otworu D w znaczny i zróżnicowany sposób wpływa na średnicę pęcherzyka. Przy małych średnicach otworu kapilary pęcherzyki są kuliste i stabilne, ze wzrostem średnicy D pęcherzyki przestają być kuliste i wypływają ruchem zygzakowatym. Przy jeszcze większych otworach proces tworzenia się pęcherzyków przestaje

być stabilny /sklejanie się pęcherzyków i ponowne rozpadowanie się powstających aglomeratów/.

Pęcherzyki łatwo ulegają deformacji. Na skutek działania siły bezwładnościowej ze strony cieczy oraz ściśliwości gazu wewnątrz pęcherzyka może on wykonywać okresowe nieustalone drgania, a gaz w pęcherzyku może kolejno rozszerzać się i być ściśnięty. Pęcherzyk o średnicy $d = 10^{-4}$ m w wodzie o ciśnieniu 10^5 Pa drga z częstotliwością 10^5 s $^{-1}$. Układ pęcherzyk gazowy-ciecz jest układem drgającym generującym fale kuliste oraz pochłaniającym energię pierwotnej fali dźwiękowej.

Pęcherzyk gazu otoczony cieczą można traktować jako układ dwufazowy, w którym na granicy podziału ciecz-gaz zachodzą procesy wymiany masy i ciepła. W wyniku zajścia tych procesów może występować wzrost lub zapadanie się pęcherzyka. Wzrost pęcherzyka następuje w wyniku odparowania cieczy z granicy podziału faz. W wyniku kondensacji pary na powierzchni rozdziału faz pęcherzyk zapada się. Kondensacja obniża temperaturę otaczającą pęcherzyk cieczy i proces zapadania się pęcherzyka zachodzi tak długo, jak długo temperatura cieczy jest niższa od temperatury nasycenia.

Dynamiczne zachowanie się pęcherzyka należy rozpatrywać z uwzględnieniem procesów wymiany masy i ciepła, dysypacji dyfuzyjnej i przewodnościowej, zjawisk napięcia powierzchniowego, odparowania cieczy i kondensacji pary. Układ równań zachowania masy, pędu i energii ma postać

$$\frac{1}{\pi d_p^2} \frac{dm_p}{dt} = \rho_p \left(\frac{dd_p}{2dt} - \bar{w}_p \right) = \rho_c \left(\frac{dd_p}{dt} - \bar{w}_c \right) + \rho_p j \quad (74)$$

$$\frac{1}{\pi d_p^2} \frac{dm_p}{dt} \bar{w}_c = -g \rho_p + \text{Div } S_{pc} + \frac{\sigma}{d_p} \quad (75)$$

$$\frac{1}{\pi d_p^2} \frac{dm_p}{dt} \left[\frac{\bar{w}_c - \bar{w}_p^2}{2} + Q_{pf} \right] - \frac{\sigma}{d_p} \left(\frac{dd_p}{2dt} - \bar{w}_c \right) + \frac{dQ_p}{dt} = \lambda_c \frac{\partial T}{\partial r} \frac{d\sigma}{dt} \quad (76)$$

gdzie: j - strumień dyfuzyjny pary wnikającej z cieczy do pęcherzyka odniesiony do jednostki masy,

p_{pc} - różnica ciśnień pomiędzy ciśnieniem w cieczy i w pęcherzyku,

Q_{pf} - ciepło przemiany fazowej.

5 - napięcie powierzchniowe

Podczas wznoszenia się pęcherzyka w wyniku działania ciśnienia hydrostatycznego oraz procesów wymiany masy i ciepła grubość błony otaczającej pęcherzyk nie jest równa na całej powierzchni. Zachowanie się granicy podziału faz jest skomplikowanym procesem. Na stabilność granicy wpływają siły napięcia powierzchniowego, lepkości i inercji.

Pomiędzy zachowaniem się dynamicznym kropli i pęcherzyka występują pewne analogie. W instalacjach pracujących przy dużych ciśnieniach

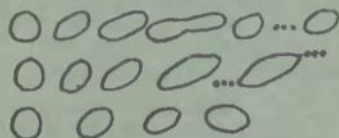
opór przepływu pęcherzyka jest dużo większy w porównaniu z innymi oporami i w ruchu pęcherzyka poślisz prawie nie występuje. W ruchu kropli indywidualne własności są bardziej zachowane.

W warstwie granicznej otaczającej kroplę zachodzą procesy wymiany masy i ciepła. Jeżeli kropla otoczona jest gazem, to na powierzchni dodatkowo zachodzi proces odparowania lub kondensacji.



Rys. 89. Rozpadanie się kropli w strumieniu gazu

Wystąpić zjawisko koagulacji małych kropelek w większe. Proces rozpada-



Rys. 90. Deformacja kropli, wg Rumscheidt i Mason

Ze wzrostem przepływu deformacja kropli może zajść tak daleko, że kropla może rozpaść się na nowe drobniejsze krople, natomiast ze spadkiem prędkości przepływu może wys-

tąpić zjawisko koagulacji małych kropelek w większe. Proces rozpada-

nia się kropli, podobnie jak rozpada-

nia się pęcherzyka, zależy od wzajemnego oddziaływania sił napięcia powierzchniowego, lepkości oraz sił bezwładnościowych. Deformacja kropli, cyrkulacja wewnątrz niej oraz tworzenie się warstwy granicznej w sposób wzajemnie powiązany wpływają na charakter deformacji kropli.

Na skutek działania dużych sił deformujących kropla zamienia się w błonkę, następnie elementy po-

wierzchni dosnają niustalonych przyspieszeń /niustalone siły bezwładnościowe/ błona pęka i tworzą

się małe kropelki. Przy dalszym wzroście prędkości ruchu zachodzi proces zrywania drobnych kropelek z powierzchni granicznej kropli.

W wyniku rozpada się kropli zmienia się średnica kropli, a więc zmienia się powierzchnia niustalanej wymiany ciepła i masy oraz zmienia się opór przepływu.

W celu opisanego wpływu na odkształcenie kropli, efektów bezwładnościowych oraz efektów napięcia powierzchniowego na powierzchni podziału faz wprowadzono liczbę Webera, która wyrażone jest ilorazem normalnej siły napięcia powierzchniowego oraz siły bezwładnościowej.



Rys. 91. Cyrkulacja wewnątrz kropli

Z liczby Webera można wyznaczyć średnicę kropli

$$d_k = \frac{We \sigma}{\Delta \rho_k (\rho_k - \rho_c)} \quad (77)$$

gdzie: d_k - średnica kropli,
 w_k - prędkość względna ruchu postępowego kropli cieczy,
 ρ_k - gęstość cieczy w kropli,
 ρ_c - gęstość cieczy otaczającej kroplę,
 σ - współczynnik napięcia powierzchniowego.

W wyniku równoczesnego działania napięcia powierzchniowego oraz sił bezwładnościowych kropla cieczy może drgać dokoła pewnego równowagowego kształtu kulistego. Kształt kropli zmienia się z chwilą pojawienia się jej w strumieniu. Stopień odkształcenia zależy od średnicy kropli. Zależność ta jest szczególnie silna, gdy w strumieniu otaczającym kroplę występuje nierównomierny rozkład prędkości. Odkształcenie kropli jest procesem nieustalonym.

Wykazano, że odkształcenie kropli zależy od dwóch parametrów

$$\epsilon_1 = \frac{\mu_k}{\mu_c} ; \epsilon_2 = \frac{\sigma}{\mu_c w_y d_k} \quad (78)$$

gdzie: μ_k - lepkość cieczy w kropli,
 μ_c - lepkość cieczy otaczającej kroplę,
 w_y - poprzeczna składowa gradientu prędkości cieczy.

Taylor wykazał, że podczas ruchu kropli w nieruchomej cieczy dla małych wartości liczby Reynoldsa oraz liczby Webera kropla ma kształt spłaszczonej kuli, która wydłuża się ze wzrostem liczby We i przyjmuje kształt ośowy. Ruch cieczy wydłuża kształt kropli, która dla wartości $\epsilon_1 > 3$ oraz $\epsilon_2 \gg 1$ przyjmuje kształt elipsoidy obrotowej. Ze zmianą kształtu kulistego na elipsoidalny maleje opór opływu kropli.

Siłę oporu kropli z uwzględnieniem zmiany napięcia na granicy faz, powstające w wyniku ruchu kropli, oblicza się ze wzoru /Boussinesq/

$$\bar{F} = 6\pi d_k \mu_c \Delta \bar{w}_k \frac{\mu_s + 0,5 d_k (2\mu_c + 3\mu_k)}{\mu_s + 4,5 d_k (\mu_c + \mu_k)} \quad (79)$$

gdzie: $\bar{w}_k$ - prędkość kropli względem prędkości otaczającej cieczy,
 μ_s - współczynnik lepkości powierzchniowej.

Jeżeli ruch ciepła i masy odbywa się wzdłuż promienia kropli lub pęcherzyka kulistego, to układ równań, we współrzędnych kulistych, opisujących zachowanie masy, pędu i energii ma postać /Nigmatulin/

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_i w_r r^2) = 0 \quad (80)$$

$$\rho_i \frac{dw_r}{dt} = - \frac{\partial p_i}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (2\mu_i \frac{\partial w_r}{\partial r}) \quad (81)$$

$$\rho_i \frac{d}{dt} \left(u_i + \frac{p_i}{\rho_i} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \frac{dp_i}{dt} + 3\mu_i \left(\frac{\partial w_r}{\partial r} \right)^2 \quad (82)$$

gdzie: $i=c,g$ - indeksy dotyczą fazy ciekłej oraz gazowej,
 w_r - prędkość promieniowa,
 i - entalpia ($i_c = u_c + \frac{p_c}{\rho_c}$),
 T - temperatura,
 p - ciśnienie,
 r - promień obszaru otaczającego kroplę /pęcherzyk/.

2.3.5. Zjawiska towarzyszące ruchowi skupisk elementów fazy rozproszonej

Drobne cząstki ciała stałego w fazie ciągłej w wyniku zjawisk elektrostatycznych, efektów cieplnych oraz w wyniku występowania zjawisk adhezji cząstek na powierzchni mogą ulec aglomeracji. Na proces ten wpływają siły wzajemnego oddziaływania, ruch chaotyczny, wilgotność, zanieczyszczenie powierzchni cząstek, temperatura oraz działania zewnętrznych sił elektromagnetycznych /ferrociecze/.

Pęcherzyki lub krople cieczy mogą rozpadać się na mniejsze elementy. Zawartość pęcherzyków w cieczy może zmieniać się od pojedynczych luźnych pęcherzyków do zawartości tworzącej strukturę piany.

Krople cieczy mogą poruszać się względem siebie oraz względem otaczającej fazy ciągłej z różną prędkością. Zderzeniu cząstek fazy rozproszonej towarzyszy wymiana masy, pędu i energii, a więc występują efekty bezwładnościowe i lepkie, procesy wymiany masy i ciepła oraz ewentualne reakcje chemiczne lub fizyczne.

Elementy fazy rozproszonej mogą tworzyć struktury złożone lub ulegać wtórnemu rozproszeniu. Mogą być one ponadto rozmieszczone w przestrzeni przepływu w sposób nierównomierny.

Uwzględnienie tych zjawisk w równaniach mechaniki układów dyspersyjnych jest niezmiernie trudnym zagadnieniem, co powoduje, że przy formułowaniu równań zachowania masy, pędu i energii wprowadza się uproszczenia.

2.3.6. Równania mechaniki układów wielofazowych

2.3.6.1. Równania mechaniki płynu jednoskładnikowego z przemianą fazową

Jeżeli w płynie jednoskładnikowym lub w mieszaninie zachodzi prze-

miana fazowa, to do równań (36-1.2), (69-1.2) oraz (125-1.2) należy dołączyć człony uwzględniające przemianę fazową.

Fazy rozdzielone są powierzchnią rozdziału faz. Jest to powierzchnia osobliwa, na której wielkość fizyczna A doznaje zmiany skokowej

$$[A]_{ji} = A_j - A_i \quad (83)$$

natomiast w obszarach faz wielkość A jest ciągła.

Gdy znikają fazy, znikają powierzchnie międzyczasowe Σ_k i związek (83) ma postać

$$[A] = 0 \quad (84)$$

a więc otrzymujemy płyn jednorodny.

Jeżeli na powierzchni S ograniczającej obszar o objętości V znajduje się powierzchnia S' przez którą objętość wymienia masę z otoczeniem, a fazy rozdzielone są powierzchniami osobliwymi Σ_k , to równanie całkowite bilansu masy dla układu jednoskładnikowego wielofazowego ma postać

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = - \int_{S'} \rho \Delta \bar{w}_s \cdot \bar{n} dS + \int_{\Sigma} [\rho \Delta \bar{w}_s \cdot \bar{v}] dS \quad (85)$$

gdzie: $\Delta \bar{w}_s = \bar{w} - \bar{w}_s$ -- prędkość ruchu płynu względem powierzchni S' ;

$\Delta \bar{w}_\Sigma = \bar{w} - \bar{w}_\Sigma$ -- prędkość ruchu płynu względem powierzchni Σ ,

$\bar{w}$ -- prędkość ruchu płynu,

$\bar{w}_s$ -- prędkość ruchu powierzchni S' ;

$\bar{w}_\Sigma$ -- prędkość przemieszczania się powierzchni rozdziału faz,

S' -- otwarta część powierzchni S dostępna dla procesu wymiany masy z otoczeniem,

Σ -- powierzchnia rozdziału faz znajdująca się w obszarze przepływu i nie pokrywająca się z powierzchnią S' ;

$\bar{n}$ -- normalna do powierzchni S lub S' ,

$\bar{v}$ -- normalna do powierzchni Σ skierowana z obszaru i-tej fazy do obszaru j-tej fazy.

Prędkość względna $\Delta \bar{w}_\Sigma$ ma identyczne znaczenie fizyczne jak prędkość $\bar{\theta}$ (225-1.3), jednak zjawiska temu towarzyszące są inne.

Jeżeli $\Delta \bar{w}_s = 0$, tj. | przenikalna powierzchnia S' przemieszcza się z prędkością płynu oraz powierzchnie S i Σ pokrywają się, to równanie (85) przyjme postać równania ciągłości (36-1.2).

Wobec dowolności wyboru objętości V oraz powierzchni Σ wyrażenie podcałkowe drugiej całki prawej strony równania (85) opisujące wypadkowy strumień masy wymienianej pomiędzy fazami powinno być rów-

ne zero

$$[\varrho \Delta \bar{w}_z \bar{v}] = 0 \quad (86)$$

Równanie to nazwano równaniem bilansu masy dla całego układu z uwzględnieniem skokowej zmiany masy na granicy rozdziału faz.

Równanie całkowite bilansu pędu dla objętości zawierającej powierzchnię Σ ma postać

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varrho \bar{w} dV = - \int_{S'} \varrho \bar{w} \Delta \bar{w}_z \bar{n} dS - \int_{S-S'} (P_p \bar{E}) \bar{n} dS - \int_{S-S'} (P_p \bar{E}) \bar{n} dS + \int_V \varrho \bar{F} dV + \int_{\Sigma} [\varrho \bar{w} \Delta \bar{w}_z \bar{v} + P \bar{v}] dS \quad (87)$$

gdzie: P - tensor ciśnienia,

p_0 - ciśnienie zewnętrzne działające na powierzchnię $S(S')$,

$j = \varrho \Delta \bar{w}_z \bar{v}$ - strumień masy przenikający przez powierzchnię Σ .

Trzeci wyraz prawej strony tego równania określa siłę, z jaką płyn działa na nieprzenikalną część $(S-S')$ powierzchni S , gdy działa ciśnienie zewnętrzne p_0 .

Równanie (87) słusne jest dla całego płynu zawartego w objętości V .

Jeżeli $\Delta \bar{w}_z = 0$, a w objętości V ograniczonej estywną nieprzenikalną powierzchnią S są fazy i zachodzi przemiana fazowa, a na powierzchni Σ działa tylko siła $\bar{T}_z$, to wobec dowolności wyboru objętości V oraz powierzchni Σ wyrażenie podcałkowe ostatniej całki prawej strony równania (87) spełnia warunek

$$[\varrho \bar{w} \Delta \bar{w}_z \bar{v} + P \bar{v}] = 0 \quad (88)$$

Jest to równanie bilansu pędu z uwzględnieniem skokowej zmiany masy na granicy rozdziału faz, tj. na powierzchni Σ .

Równanie bilansu energii płynu z przemianą fazową ma postać

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \varrho (u + 0,5 \bar{w}^2 + \varphi + \frac{p}{\varrho}) dV = & - \int_{S'} \varrho (u + 0,5 \bar{w}^2 + \varphi + \frac{p}{\varrho}) \Delta \bar{w}_z \bar{n} dS - \\ & - \int_{S-S'} (P_p \bar{E}) \bar{w} \bar{n} dS - \int_S \bar{q} \bar{n} dS + \int_V \varrho \bar{Q} dV - \int_{S'} [(p-p_s) \bar{w}_s \bar{n} + P_\mu \bar{n} \bar{w}_s] dS + \\ & + \int_{\Sigma} [\varrho (u + 0,5 \bar{w}^2) \Delta \bar{w}_z \bar{v} + \bar{q} \bar{v} + \bar{w} P \bar{v}] dS \end{aligned} \quad (89)$$

Jeżeli przez powierzchnię Σ nie zachodzi wymiana masy oraz energii, powierzchnia S jest estywna, $\Delta \bar{w}_z = 0$ oraz działa tylko siła powierzchniowa $\bar{T}_n$, to z równania (89) wynika wniosek, że

$$[\varrho (u + 0,5 \bar{w}^2) \Delta \bar{w}_z \bar{v} + \bar{q} \bar{v} + \bar{w} P \bar{v}] = 0 \quad (90)$$

Jest to równanie bilansu energii dla powierzchni uwzględniającej skokową zmianę masy i energii na granicy rozdziału faz.

Równanie bilansu energii wyrażonej przez entropię ma postać

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho s dV = - \int_{S'} \rho s \Delta \bar{w}_s \cdot \bar{n} dS - \int_S \frac{1}{T} \bar{q} \cdot \bar{n} dS + \int_V \rho \frac{Q}{T} dV + \int_{\Sigma} \left[\rho s \Delta \bar{w}_s \cdot \bar{v} + \frac{1}{T} \bar{q} \cdot \bar{v} \right] dS \quad (91)$$

Z równania (91) wynika nierówność entropii dla powierzchni

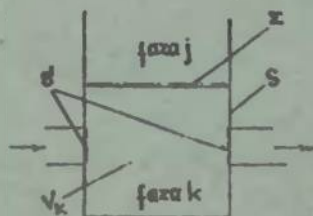
$$\left[\rho s \Delta \bar{w}_s \cdot \bar{v} + \frac{1}{T} \bar{q} \cdot \bar{v} \right] \geq 0 \quad (92)$$

Wobec nierówności (92) wzór (168-1.2) słuszny jest dla płynu jednofazowego oraz dla układu wielofazowego.

2.3.6.2. Homogeniczne mieszaniny wieloskładnikowe z przemianą fazową

Każda faza układu wielofazowego jest mieszaniną homogeniczną i spełnia hipotezę lokalnej równowagi. Można więc w obszarze fazy opierać parametrami termodynamicznymi T_k i p_k oraz funkcjami termodynamicznymi u_k, i_k oraz s_k . Funkcje te zależą od temperatury, ciśnienia oraz składu fazy c_{ik} . Układ wielofazowy z homogenicznymi fazami jest M-prędkościowym kontinuum, z których każdy kontinuum /faza/ jest N-prędkościowym kontinuum. W obszarze każdej fazy obowiązują równania bilansu masy, pędu i energii wyprowadzone dla mieszaniny jednofazowej, z tą jednak różnicą, że do równań tych należy włączyć człony charakteryzujące masowe, siłowe i energetyczne wzajemne oddziaływanie faz. Oddziaływania te zachodzą przez powierzchnię Σ . Powierzchnia

może pokrywać się z powierzchnią S , z powierzchnią S' lub stanowić część powierzchni $S-S'$.



S_k - powierzchnia ograniczająca objętość V_k k-tej fazy układu wielofazowego,

S' - część powierzchni S_k przenikliwa dla konwekcyjnej i dyfuzyjnej wymiany masy pomiędzy otoczeniem a k-tą fazą,

Σ - powierzchni rozdziału faz

Ryz. 92. Powierzchnie S, S' oraz Σ

Równanie całkowite bilansu masy i-tego składnika k-tej fazy, w obszarze której zachodzą homogeniczne reakcje chemiczne, ma postać

$$\int_{V_k} \frac{\partial \rho_{ik}}{\partial t} dV = - \int_{S_k} \rho_{ik} \bar{w}_{ik} \bar{n} dS + \int_{V_k} \sum_{j=1, j \neq k}^M \text{div}((j)_i)_{kj} dV + \int_{V_k} \sum_{s=1}^{N_r} (v_i)_{ks} M_i r_{ks} dV \quad (93)$$

- gdzie: ρ_{ik} - gęstość i-tego składnika mieszaniny uśredniona w objętości V_k k-tej fazy,
 $\bar{w}_{ik}$ - prędkość i-tego składnika mieszaniny uśredniona w objętości V_k k-tej fazy,
 V_k - objętość k-tej fazy,
 S_k - powierzchnia ograniczająca objętość V_k ,
 i - indeks i-tego składnika mieszaniny,
 k - indeks k-tej fazy układu wielofazowego,
 s - indeks s-tej homogenicznej reakcji chemicznej,
 $(j)_i)_{jk}$ - intensywność przejścia masy i-tego składnika mieszaniny z j-tej do k-tej fazy odniesiona do jednostki objętości w jednostce czasu /strumień masy/,
 M - liczba faz w układzie wielofazowym,
 N_r - liczba homogenicznych reakcji chemicznych zachodzących w objętości mieszaniny k-tej fazy,
 r_{ks} - szybkość s-tej reakcji chemicznej w objętości k-tej fazy,
 M_i - masa cząsteczkowa i-tego składnika,
 $(v_i)_{ks}$ - współczynnik stechiometryczny przy i-tym składniku mieszaniny biorącym udział w s-tej reakcji chemicznej zachodzącej w objętości V_k .

Przedostatni człon prawej strony równania (93) można przedstawić jako wynikowy strumień masy i-tego składnika mieszaniny wnikający do objętości V_k

$$\sum_{j=1, j \neq k}^M \text{div}((j)_i)_{kj} = \sum_{j=1, j \neq k}^M (j)_i)_{jk} - \sum_{k=1, k \neq j}^M (j)_i)_{kj} \quad (94)$$

Jeżeli w bilansie masy i-tego składnika zawartego w objętości V_k wyróżnimy strumienie masy wnikające przez powierzchnie S_k oraz Σ_k i wprowadzimy względne prędkości ruchu i-tego składnika, to równanie (93) można zapisać w postaci uogólnionej

$$\int_{V_k} \frac{\partial \rho_{ik}}{\partial t} dV + \int_{S_k} \rho_{ik} \bar{w}_{sk} \bar{n} dS = - \int_{S_k} \rho_{ik} \Delta \bar{w}_{sk} \bar{n} dS - \int_{S_k} \rho_{ik} \Delta \bar{w}_{ik} \bar{n} dS + \int_{V_k} j_i dV + \int_{\Sigma_k} [\rho_{ik} \Delta \bar{w}_{is_k}] dS \quad (95)$$

gdzie: $\bar{w}_{sk}$ - prędkość ruchu powierzchni S_k ograniczającej objętość V_k .

$\Delta \bar{w}_{S_k} = \bar{w} - \bar{w}_{S_k}$ - prędkość ruchu układu względem powierzchni S_k ,
 $\Delta \bar{w}_{ik} = \bar{w}_{ik} - \bar{w}_{S_k}$ - prędkość ruchu i-tego składnika względem po-
 wierzchni S_k .

Równanie (95) można zapisać w postaci strumieni masy

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_k} \rho_{ik} dV = - \int_{S_k} \rho_{ik} \Delta \bar{w}_{S_k} \bar{n} dS - \int_{S_k} \bar{j}_{ik} \bar{n} dS + \int_{V_k} \bar{j}_i dV + \int_{S_k} [\rho_{ik} \Delta \bar{w}_{i S_k} \bar{v}_i] dS \quad (96)$$

Jeżeli prędkość przepływu ośrodka jest równa prędkości ruchu po-
 wierzchni S / $\bar{w}_k = \bar{w}_{S_k}$ /, to lewa strona równania (96) będąca pochod-
 ną pełną (10-1.2) staje się pochodną substancjalną (9-1.2). Sto-
 sując wzór Gaussa-Ostrogradskiego do równania (96) oraz wprowa-
 dzając inne oznaczenia odpowiednich składników otrzymamy różniczkową
 postać równania bilansu masy i-tej składowej dla k-tej fazy ukła-
 du wielofazowego

$$\frac{d\rho_{ik}}{dt} + \rho_{ik} \operatorname{div} \bar{w}_k = - \operatorname{div} \bar{j}_{ik} + \sum_{s=1}^{M_r} (v_i)_{ks} M_{irks} + \sum_{j=1, j \neq k}^M \operatorname{diff}(\bar{j}_i)_{k,j} \quad (97)$$

Sumując równanie (97) dla wszystkich składników fazy otrzymamy
 równanie bilansu masy dla k-tej fazy

$$\frac{d\rho_k}{dt} + \rho_k \operatorname{div} \bar{w}_k = - \operatorname{div} \sum_{i=1}^N \bar{j}_{ik} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq k}^M \operatorname{diff}(\bar{j}_i)_{k,j} \quad (98)$$

gdzie ρ_k - średnia gęstość k-tej fazy.

Wielkość ρ_k oblicza się ze wzoru

$$\rho_k = \sum_{i=1}^N \rho_{ik} = x_{vk} \sum_{i=1}^N \rho_{ik}^0 \quad (99)$$

gdzie: ρ_{ik}^0 - średnia gęstość i-tego składnika w k-tej fazie,
 x_{vk} - udział objętościowy k-tej fazy ($\sum_{k=1}^M x_{vk} = 1; x_{vk} \geq 0$).

Jeżeli zsumujemy równanie (98) dla wszystkich M faz, to otrzy-
 mamy równanie zachowania masy dla układu wielofazowego z homoge-
 nicznymi fazami

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{w} = 0 \quad (100)$$

Równanie to nie zależy od wzajemnego ruchu składników faz i jest
 podobne do równania dla zachowania masy dla czystego płynu (40-1.2)
 oraz dla mieszaniny wieloskładnikowej (29-2.2).

Równanie zachowania pędu k-tej fazy układu wielofazowego ma pos-
 tać

$$\int_{V_k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^N \rho_{ik} \bar{w}_{ik} \right) dV = - \int_{\Sigma_k} \sum_{i=1}^N \rho_{ik} \bar{w}_{ik} (\bar{w}_{ik} \bar{n}) dS + \int_{\Sigma_k} \bar{T}_{nk} dS + \\ + \int_{V_k} \sum_{i=1}^N \rho_{ik} \bar{F}_{ik} dV + \int_{\sum_{k,j}^N} \sum_{i=1}^N di \left[(j_i)_{k,j} (\bar{w}_i)_{k,j} \right] dV + \int_{V_k} \sum_{j=1, j \neq k}^N (\bar{F}_j)_{k,j} dV \quad (101)$$

gdzie: V_k - objętość k -tej fazy,

$\bar{w}_{ik}$ - prędkość i -tego składnika k -tej fazy,

$(\bar{F}_j)_{k,j}$ - międzyfazowa siła objętościowa wzajemnego oddziaływania odniesiona do jednostki objętości V_k ,

$\bar{T}_{nk}$ - naprężenie wynikające od sił powierzchniowych k -tej fazy, działających na zewnątrz powierzchni otaczającej objętość V_k ,

$\bar{F}_{ik}$ - zewnętrzne siły masowe działające na element objętości i -tego składnika k -tej fazy,

$(\bar{w}_i)_{k,j}$ - prędkość ruchu masy i -tego składnika przenikającego granicę rozdziału faz $\Sigma_{k,j}$ w kierunku $j \rightarrow k$.

Czwarty człon prawej strony równania (101) określa wynikowy strumień pędu wymieniony pomiędzy fazami w wyniku przenoszenia masy przez granicę rozdziału faz

$$di \left[(j_i)_{k,j} (\bar{w}_i)_{k,j} \right] = (j_i)_{k,j} (\bar{w}_i)_{k,j} - (j_i)_{j,k} (\bar{w}_i)_{j,k} \quad (102)$$

gdzie $(j_i)_{k,j} (\bar{w}_i)_{k,j}$ - strumień pędu i -tego składnika wychodzący z j -ej fazy i wchodzący do k -tej fazy.

Sumując równanie (101) dla wszystkich faz otrzymamy równanie zachowania pędu dla układu wielofazowego

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{k=1}^M \rho_k \bar{w}_k \right) dV = - \int_{\Sigma} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N [\rho_{ik} \bar{w}_{ik} (\bar{w}_{ik} \bar{n})] dS + \\ + \int_{\Sigma} \sum_{k=1}^M \bar{T}_{nk} dS + \int_V \sum_{k=1}^M \rho_k \bar{F}_k dV \quad (103)$$

W równaniu tym

$$\rho_k \bar{w}_k = \sum_{i=1}^N \rho_{ik} \bar{w}_{ik} \quad (104)$$

$$\rho_k \bar{F}_k = \sum_{i=1}^N \rho_{ik} \bar{F}_{ik} \quad (105)$$

$$(j_i)_{k,j} = \sum_{i=1}^N (j_i)_{k,j} \quad (106)$$

$$(j_i)_{k,j} (\bar{w}_i)_{k,j} = \sum_{i=1}^N (j_i)_{k,j} (\bar{w}_i)_{k,j} \quad (107)$$

Jeżeli zastosujemy do równania (101) wzór Gaussa-Ostrogradekiego,

to otrzymamy równanie różniczkowe zachowania pędu k-tej fazy

$$\rho_k \frac{d\bar{w}_k}{dt} = - \sum_{i=1}^N \operatorname{div}(\rho_{ik} \Delta \bar{w}_{ik} \Delta \bar{w}_{ik}) + \operatorname{Div} \mathbf{S}_k + \rho_k \bar{F}_k + \\ + \sum_{j=1, j \neq k}^M (F_j)_{k,j} + \sum_{j=1, j \neq k}^M d_i \{ (j)_{k,j} (\Delta \bar{w})_{k,j} \} \quad (108)$$

gdzie: $\Delta \bar{w}_{ik} = \bar{w}_{ik} - \bar{w}_k$,

$$(\Delta \bar{w})_{k,j} = (\bar{w})_{k,j} - \bar{w}_k.$$

Jeżeli spełnione są warunki

$$(j)_{k,k} = 0 \quad (109)$$

$$(j)_{k,j} = -(j)_{j,k} \quad (110)$$

to ostatni człon równania (108) można zapisać w postaci

$$\sum_{j=1, j \neq k}^M d_i \{ (j)_{k,j} (\Delta \bar{w})_{k,j} \} = \sum_{j=1, j \neq k}^M (\bar{P})_{k,j} \quad (111)$$

gdzie $(\bar{P})_{j,k}$ - intensywność wymiany pędu pomiędzy j-ą i k-tą fazą.

Tensor naprężeń sprężystych $\mathbf{S}_k$ określa ze wzoru

$$\mathbf{S}_k = \sum_{j=1}^M x_{v,j} (\mathbf{S})_{k,j} \quad (112)$$

gdzie $(\mathbf{S})_{k,j}$ - tensor międzyfazowych sił powierzchniowych działających na zewnętrznej powierzchni ograniczającej objętość V i wynikających z oddziaływania j-ej fazy na k-tą fazę.

Sumując równanie (108) dla wszystkich M faz otrzymamy równanie zachowania pędu dla wielofazowego układu z homogenicznymi fazami

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = - \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N \operatorname{div}(\rho_{ik} \Delta \bar{w}_{ik} \Delta \bar{w}_{ik}) + \operatorname{Div} \mathbf{S} + \rho \bar{F} \quad (113)$$

Zwykle wobec małych prędkości ruchu względnego

$$(\rho_{ik} \Delta \bar{w}_{ik} \Delta \bar{w}_{ik}) \sim 0 \quad (114)$$

i równanie (108) oraz (113) można zapisać w przybliżeniu dyfuzyjnym.

Jeżeli wprowadzimy nową postać pochodnej substancjalnej

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = \rho \frac{d\bar{w}}{dt} + \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N \operatorname{div}(\rho_{ik} \Delta \bar{w}_{ik} \Delta \bar{w}_{ik}) \quad (115)$$

to równanie (113) przyjmie postać

$$\rho \frac{d^* \bar{w}}{dt} = \text{Div } \mathbf{S} + \rho \bar{\mathbf{F}} \quad (116)$$

Równanie bilansu energii właściwej k-tej fazy ma postać

$$\int_{V_k} \frac{\partial \rho_k e_k}{\partial t} dV + \int_{S_k} \rho_k e_k (\bar{\mathbf{w}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}) dS = - \int_{S_k} \rho_k e_k \Delta \bar{\mathbf{w}}_k \cdot \bar{\mathbf{n}} dS + \int_{S_k} \bar{\mathbf{T}}_{mk} \bar{\mathbf{w}}_k dS + \\ + \int_{V_k} \sum_{j=1, j \neq k}^M (E)_{kj} dV + \int_{V_k} \sum_{i=1}^N \rho_{ik} \bar{\mathbf{F}}_{ik} \bar{\mathbf{w}}_{ik} dV - \int_{S_k} \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS + \int_{V_k} \rho_k Q_k dV \quad (117)$$

gdzie: e_k - energia właściwa k-tej fazy,

$(E)_{k,j}$ - strumień energii wymienionej pomiędzy j-tą i k-tą fazami odniesiony do jednostki objętości V_k ,

Q_k - moc zewnętrznych źródeł ciepła umieszczonych w objętości V_k .

Drugi i czwarty człon prawej strony tego równania oznacza odpowiednio jednostkową pracę sił powierzchniowych i sił masowych.

Energia e_k jest sumą energii wewnętrznej i energii kinetycznej

$$e_k = u_k + 0,5 \bar{\mathbf{w}}_k^2 + \sum_{i=1}^N 0,5 \rho_{ik} \Delta \bar{\mathbf{w}}_{ik}^2 \quad (118)$$

Strumień energii $(E)_{k,j}$ określony jest sumą trzech składników

$$(E)_{kj} = (Q)_{kj} + (q)_{kj} + \sum_{i=1}^N \text{div} \{ (j)_{kj} [(u_i)_{kj} + 0,5 (\bar{\mathbf{w}}_i)_{kj}^2] \} \quad (119)$$

gdzie: $(Q)_{k,j}$ - strumień rozproszonej energii mechanicznej wynikły z pracy sił tarcia, ciśnienia, przyciągania międzyfazowego, przyłączonych mas i innych sił /,

$(q)_{k,j}$ - kontaktowa wymiana ciepła pomiędzy fazami,

$(u_i)_{k,j}$ - energia wewnętrzna elementu masy i-tej składowej przenikającej granicę rozdziału faz w kierunku $j \rightarrow k$.

Ostatni człon prawej strony zależności (119) określa zmianę energii faz w wyniku wymiany masy pomiędzy fazami.

Jeżeli zsumujemy równanie (117) dla wszystkich faz, to otrzymamy równanie zachowania energii układu wielofazowego z homogenicznymi fazami

$$\int_V \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \int_S \rho e \bar{\mathbf{w}}_s \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = - \int_S \rho e \Delta \bar{\mathbf{w}}_s \cdot \bar{\mathbf{n}} dS + \int_S \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS - \\ - \int_S \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS + \int_V \rho Q dV \quad (120)$$

Stosując do równania (117) wzór Gaussa-Ostrogradskiego oraz przyjmując, że $\Delta \bar{\mathbf{w}}_s = 0$, otrzymamy równanie różniczkowe bilansu energii k-tej fazy układu wielofazowego

$$\begin{aligned} \rho_k \frac{d}{dt} (u_k + 0,5 \bar{w}_k^2 + \sum_{i=1}^N \rho_{ik} \Delta \bar{w}_{ik}^2) = \operatorname{div}(\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{w}}_k) - \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}_k + \\ + \sum_{j=1, j \neq k}^M (Q)_{k,j} + \sum_{j=1, j \neq k}^M (Q)_{j,k} + \sum_{j=1, j \neq k}^M \operatorname{div}[(\mathbf{j})_{k,j} \{(\Delta u)_{k,j} + 0,5[(\bar{w})_{k,j}^2 - \bar{w}_k^2]\}] + \\ + 0,5 \sum_{j=1, j \neq k}^M \sum_{i=1}^N \operatorname{div}[(\mathbf{j})_{k,j} (\Delta \bar{w})_{k,i}^2] + \rho_k Q_k + \sum_{i=1}^N \rho_{ik} \bar{\mathbf{F}}_{ik} \bar{\mathbf{w}}_{ik} \end{aligned} \quad (121)$$

gdzie $(\Delta u)_{k,j} = (u)_{k,j} - u_k$

Różniczkowe równanie energii kinetycznej można otrzymać z równania (108). Mnożąc obie strony tego równania przez prędkość $\bar{\mathbf{w}}_k$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \rho_k \frac{d}{dt} 0,5 \bar{w}_k^2 = \bar{\mathbf{w}}_k \cdot \operatorname{Div} \mathbf{S}_k + \sum_{j=1, j \neq k}^M (\bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{v}})_{k,j} \bar{\mathbf{w}}_k + \rho_k \bar{\mathbf{F}}_k \bar{\mathbf{w}}_k + \\ + \sum_{j=1, j \neq k}^M \operatorname{div}[(\mathbf{j})_{k,j} (\Delta \bar{\mathbf{w}})_{k,j} \bar{\mathbf{w}}_k] \end{aligned} \quad (122)$$

Z równań (121) i (122) wynika równanie różniczkowe bilansu energii wewnętrznej

$$\begin{aligned} \rho_k \frac{du_k}{dt} = \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{T}_k - \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}_k - \sum_{j=1, j \neq k}^M (\bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{v}})_{k,j} \bar{\mathbf{w}}_k + \rho_k Q_k + \sum_{j=1, j \neq k}^M (q)_{k,j} + \\ + \sum_{j=1, j \neq k}^M \operatorname{div}[(\mathbf{j})_{k,j} (\Delta u)_{k,j}] + \sum_{i=1}^N \rho_{ik} \bar{\mathbf{F}}_{ik} \Delta \bar{w}_{ik} + \\ + \sum_{j=1, j \neq k}^M \operatorname{div}[(\mathbf{j})_{k,j} 0,5 (\Delta \bar{\mathbf{w}})_{k,j}^2] \end{aligned} \quad (123)$$

gdzie $(\Delta \bar{\mathbf{w}})^2_{k,j} = [(\bar{\mathbf{w}})_{k,j} - \bar{\mathbf{w}}_k]^2$.

Jeżeli przyjmujemy, że spełnione są warunki

$$(E)_{kk} = 0 \quad (124)$$

$$(E)_{kj} = -(E)_{jk} \quad (125)$$

oraz zsumujemy równanie (121) dla wszystkich faz, to otrzymamy równanie bilansu energii dla układu wielofazowego

$$\rho \frac{de}{dt} + \sum_{k=1}^M \operatorname{div}(\rho_k \Delta \bar{\mathbf{w}}_k \mathbf{e}_k) = \operatorname{div}(\mathbf{S} \cdot \bar{\mathbf{w}}) - \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} + \rho \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{w}} \quad (126)$$

Jeżeli wprowadzimy nową postać pochodnej subetancjalnej określoną zależnością

$$\rho \frac{d^* e}{d^* t} = \sum_{k=1}^M \left[\frac{\partial \rho_k \mathbf{e}_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{e}_k \bar{\mathbf{w}}_k) \right] = \rho \frac{de}{dt} + \sum_{k=1}^M \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{e}_k \Delta \bar{\mathbf{w}}_k) \quad (127)$$

do równania (126), to otrzymamy inną postać równania (126)

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{e}}{dt^2} = \operatorname{div}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) - \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \rho \mathbf{Q} \quad (128)$$

Równania (116) oraz (128) można stosować do opisania układów wielofazowych z homogenicznymi i heterogenicznymi fazami.

2.3.6.3. Równania mechaniki układów dyspersyjnych

2.3.6.3.1. Układy dyspersyjne jako mieszaniny heterogeniczne

Układy dyspersyjne są układami o niezmiernie skomplikowanej strukturze, określonej dużą liczbą czynników, jak:

- rodzaj fazy rozproszonej i fazy ciągłej,
- stężenie fazy rozproszonej,
- parametry fizyczne faz,
- wymiary i kształt elementów dyspersyjnych,
- wymiary liniowe aparatów z układem dyspersyjnym,
- reakcje chemiczne i fizyczne oraz przemiany fazowe,
- prędkość względna ruchu składników układu,
- zjawiska drobnych zaburzeń przepływu fazy ciągłej dokoła elementów fazy rozproszonej /promieniowa pulsacja pęcherzyków, powrotne mieszanie dokoła elementów rozproszonych, ruch chaotyczny i obrotowy elementów fazy dyspersyjnej, deformacja kropli i pęcherzyków itd. /.

Podczas formułowania równań mechaniki układów dyspersyjnych należy pamiętać, że czynnikiem wywołującym ruch fazy rozproszonej w objętości przepływu jest wysokoenergetyczny ruch fazy ciągłej, a więc podstawowymi równaniami są równania mechaniki płynów jednorodnych.

Jeżeli układy dyspersyjne są stężone, a wymiary elementów rozproszonych są małe oraz gęstości materiałów faz są prawie równe, to siły bezwładnościowe wynikłe z ruchu elementów dyspersyjnych są pomijalnie małe w porównaniu z bezwładnością fazy ciągłej. Ruch względny składników fazy rozproszonej można rozpatrywać na poziomie molekularnym, co upodabnia układ dyspersyjny do mieszaniny. Elementy fazy rozproszonej traktowane są wówczas jak cząstki jednego ze składników mieszaniny homogenicznej. Względny ruch faz można opisać równaniami mieszanin homogenicznych w przybliżeniu dyfuzyjnym.

Można założyć, że każda faza układu dyspersyjnego jest lokalnie jednorodna, tj. w każdym elemencie objętości układu faza ciągła i rozproszona w niej faza dyspersyjna są jednorodne aż do powierzchni rozdziału $\sum_{j,k}$. Wobec powyższego każdą fazę układu można zastąpić

plynem jednorodnym z parametrami obliczonymi z uwzględnieniem stęśnienia elementów dyspersyjnych. Układ dyspersyjny można więc traktować jako mieszaninę heterogeniczną. Można wreszcie taką mieszaninę zastąpić płynem jednofasowym z parametrami obliczonymi z uwzględnieniem stęśnienia faz. Przybliżenie takie dla mieszanin heterogenicznych jest bardzo sgrubne i stosuje się raczej tylko do mieszanin homogenicznych.

2.3.6.3.2. Równania w mikroskali mechaniki k-tej fazy mieszaniny heterogenicznej

Równania mechaniki k-tej fazy mieszaniny heterogenicznej, traktowanej jako ośrodek ciągły, wynikają z równań mikromechaniki przez ich uśrednienie w objętości fazy oraz na powierzchni ograniczającej objętość V_k .

W obszarze każdej k-tej fazy spełnione są następujące mikrorównania opisujące procesy zachodzące wewnątrz fazy:

$$\frac{\partial \rho_k^0}{\partial t} + \text{div}(\rho_k^0 \bar{w}_k) = 0 \quad (129)$$

$$\frac{\partial \rho_k^0 \bar{w}_k}{\partial t} + \text{div}(\rho_k^0 \bar{w}_k \bar{w}_k) = \text{Div} \bar{S}_k + \rho_k^0 \bar{F}_k \quad (130)$$

$$\frac{\partial \rho_k^0 (u_k^2 + 0.5 \bar{w}_k^2)}{\partial t} + \text{div}[\rho_k^0 \bar{w}_k (u_k^2 + 0.5 \bar{w}_k^2)] = \text{div} \bar{S}_k \bar{w}_k - \text{div} \bar{q}_k + \rho_k^0 \bar{w}_k \bar{F}_k \quad (131)$$

gdzie: $\bar{\cdot}$ - indeks oznaczający wielkość chwilową,

$\bar{S}_k = -p \bar{E} + \bar{S}'_{kK}$ - tensor mikronaprężeń sprężystych k-tej fazy,

ρ_k^0 - chwilowa gęstość właściwa k-tej fazy.

W równaniach tych użyte wielkości są uśrednione w objętości mniejszej od objętości charakterystycznej elementu fazy dyspersyjnej ($dV_k \ll d$) oraz w czasie krótszym od czasu charakterystycznego ruchu elementu ($\Delta t \ll t$). Ponadto przyrost zmiennej w operatorze div jest dużo mniejszy od wymiaru charakterystycznego osłatki dyspersyjnej ($\partial x \ll d$).

Wydzielając w mikroobjętości uśrednienia Div_k promień $\bar{F}_k$ oraz zakładając, że tensor mikroruchów jest symetryczny, z równania (130) otrzymamy dodatkowo równanie zachowania krętu

$$\frac{\partial \rho_k^0 (\bar{r}_k \times \bar{w}_k)}{\partial t} + \text{div}[\rho_k^0 \bar{w}_k (\bar{r}_k \times \bar{w}_k)] = \text{div}(\bar{r}_k \times \bar{S}_k) + \rho_k^0 (\bar{r}_k \times \bar{F}_k) \quad (132)$$

gdzie: $\bar{F}_k$ - promień wodzący punkt materialny k-tej fazy.

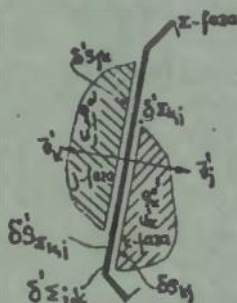
Z równania (131) oraz równania (130) wynika równanie bilansowe przepływu ciepła wzdłuż toru mikrocząsteczki fazy dyspersyjnej

$$\frac{\partial \rho_k' u_k'}{\partial t} + \text{div}(\rho_k' \vec{w}_k u_k') = S_k' T' - \text{div} \vec{q}_k' \quad (133)$$

Układ równań (129, 133) jest otwarty i w celu zamknięcia należy dołączyć równania opisujące zależność tensora naprężeń sprężystych S_k' , energii wewnętrznej u_k' od tensora deformacji T^0 , temperatury, stężeń składników w fazach oraz od innych wielkości.

2.3.6.3.3. Równania w mikroskali mechaniki na granicy rozdziału faz

Na powierzchni rozdziału faz $\Sigma_{k,j}$ zachodzą procesy wzajemnego oddziaływania faz. Ponieważ w obszarze międzyfazowym / Σ -faza/ panują krańcowo różne warunki, inne od warunków występujących w objętości fazy, to równania bilansowe powinny być formułowane oddzielnie dla tego obszaru / Σ -fazy/.



Rys. 93. Element powierzchni międzyfazowej, wg Nigmatulina

Przyjmuje się, że zjawiska międzyfazowe zachodzą w obszarze o grubości i objętości mniejszej od objętości elementu dyspersyjnego. Wobec powyższego mikroobjętość dV mieszaniny heterogenicznej rozpatrujemy jako sumę

$$dV = dV_k + dV_j + dV_{\Sigma_{k,i}} \quad (134)$$

gdzie $dV_{\Sigma_{k,i}}$ - objętość obszaru międzyfazowego / Σ -faza/.

Objętość dV ograniczona jest powierzchnią.

$$dS = dS_k + dS_j + dS_{\Sigma_{k,i}} \quad (135)$$

gdzie $dS_{\Sigma_{k,i}}$ - boczna powierzchnia przekroju Σ -fazy.

Objętość Σ -fazy ograniczona jest powierzchniami $dS_{k,i}$ i $dS_{i,k}$ oraz powierzchnią boczną $dS_{\Sigma_{k,i}}$ o grubości rzędu wymiaru oddziaływania cząsteczkowego. Powierzchnia ta równa jest iloczynowi długości δL_z oraz grubości δ_z .

Faza powierzchniowa / Σ - faza/ spełnia następujące warunki:

$$d'v_{\Sigma k_i} < d'v_k; d's_{\Sigma k_i} < d's_k; \delta_{\Sigma} < d_d \quad (136)$$

gdzie: δ_{Σ} - grubość obszaru międzyfazowego /grubość Σ -fazy/,

d_d - wymiar liniowy elementu fazy dyspersyjnej.

Na powierzchnię $d's$ ograniczającą objętość $d'v$ działają siły od strony faz j, k oraz Σ -fazy

$$\vec{F}' = \int_{d's_j} \vec{\tau}_{vj}^i d's + \int_{d's_k} \vec{\tau}_{vk}^i d's + \int_{d's_{\Sigma}} \vec{\tau}_{\Sigma}^i d's \quad (137)$$

gdzie: $\vec{\tau}_{vj}^i$ - wektor naprężenia powierzchniowego od strony j -ej fazy,
 $\vec{\tau}_{vk}^i$ - wektor naprężenia powierzchniowego wynikający od sił wzajemnego oddziaływania wewnątrz powierzchni rozdziału faz.

Wobec tego, że wielkość δ_{Σ} określająca powierzchnię $d's_{\Sigma k_i} = \delta_{\Sigma} \delta_{\Sigma}$ jest mała, naprężenie $\vec{\tau}_{\Sigma}^i$ odnosi się do długości δ_{Σ} . Wówczas ostatni składnik zależności (137) można zapisać w postaci

$$\vec{F}_{\Sigma}^i(l) = \oint_{\delta L} \vec{\tau}_{\Sigma}^i(l) d'l \quad (138)$$

gdzie: $d'l$ - element linii $\delta'L$,

$\delta'L$ - linia przecięcia powierzchni $\delta\Sigma_{k_i}$ i powierzchni granicznej $d's$.

W przypadku, gdy jedna z faz jest cieczą lub gazem, granica międzyfazowa jest cienką sprężystą błoną. Wzdłuż linii $d'l$ działa siła napięcia powierzchniowego

$$\vec{F}_{\Sigma}^i = \sigma \cdot \vec{\tau}_{\Sigma}^i \quad (139)$$

gdzie: $\vec{\tau}_{\Sigma}^i$ - wektor jednostkowy styczny do powierzchni międzyfazowej,

σ - współczynnik napięcia powierzchniowego / stała wielkość skierowana wzdłuż normalnej do linii $d'l$ i styczna do powierzchni $\delta\Sigma$ /.

Uwzględniając warunki (136) można nie uwzględniać masy obszaru zajmowanego przez Σ -fazę i w równaniach zachowania masy i pędu na powierzchni międzyfazowej $\delta's_{k_i}$ wewnątrz Σ -fazy przy $\delta_{\Sigma} \rightarrow 0$ oraz równanie zachowanie energii całkowitej Σ -fazy. Otrzymamy układ równań

$$[\rho_k^0 (\Delta \vec{w}_2)_k \vec{v}_k + \rho_j^0 (\Delta \vec{w}_2)_j \vec{v}_j] \delta' \varepsilon_{k_i} = 0 \quad (140)$$

$$[\rho_k^0 (\Delta \vec{w}_2)_k \vec{w}_k \vec{v}_k + \vec{\tau}_{vk}^i + \rho_j^0 (\Delta \vec{w}_2)_j \vec{w}_j \vec{v}_j + \vec{\tau}_{vj}^i] \delta' \varepsilon_{k_i} + \oint_{\delta L} \vec{F}_{\Sigma}^i(l) d'l \quad (141)$$

$$\frac{d}{dt}(u_{\Sigma k j}^1 \delta' \varepsilon_{k j}) = -[\rho_k^1 (\Delta \bar{w}_2)_k (u_k^1 + 0,5 \bar{w}_k^2) \bar{v}_k^1 + \rho_j^1 (\Delta \bar{w}_1)_j (u_j^1 + 0,5 \bar{w}_j^2) \bar{v}_j^1] + \\ + \bar{\tau}_{v k}^1 \bar{w}_k^1 + \bar{\tau}_{v j}^1 \bar{w}_j^1 - \bar{q}_k^1 \bar{v}_k^1 - \bar{q}_j^1 \bar{v}_j^1 + \oint_{\partial L} \bar{F}_2(l) \bar{w}_2(l) dl \quad (142)$$

gdzie: $\bar{w}_2^1$ - prędkość przemieszczania się powierzchni międzyfazowej /prędkość środka masy Σ -fazy/,

$\bar{w}_k^1$ - prędkość k-tej fazy,

$\bar{w}_2^1(l)$ - prędkość przemieszczania się granicy $d'l$ powierzchni międzyfazowej $\delta' \varepsilon_{k j}$

$\delta' \varepsilon_{k j}$ - powierzchnia boczna Σ -fazy rozgraniczająca fazy k i j,

u_k^1 - energia wewnętrzna Σ -fazy odniesiona do jednostki powierzchni $\varepsilon_{k j}$,

u_k^1 - energia wewnętrzna k-tej fazy,

$\bar{q}_k^1$ - strumień ciepła dopływający do Σ -fazy od strony k-tej fazy,

$\bar{v}^1$ - normalna do powierzchni $\varepsilon_{k j}$,

$\bar{\tau}_{v \bar{w}}^1$ - praca sił wewnętrznych powierzchniowych faz ślizgających się wzdłuż granicy międzyfazowej.

Ostatni człon równania (142) oznacza pracę sił wewnętrznych $\bar{F}^1 d'l$ wzdłuż granicy $d'l$ przy przemieszczaniu się Σ -fazy o wielkość $\bar{w}^1 dt$.

Wobec tego, że k-ta i j-ta faza znajdują się po przeciwnych stronach powierzchni $\varepsilon_{k j}$ otrzymamy

$$\bar{v}_k^1 = -\bar{v}_j^1 = \bar{v}_2^1 \quad (143)$$

Jeżeli wielkości $\bar{\tau}_{v k}^1, \bar{w}_k^1, \bar{\tau}_{v j}^1, \bar{w}_j^1$ oraz $\bar{w}_2^1$ przedstawimy w postaci sumy składowych normalnych i stycznych do powierzchni $d' \varepsilon_{k j}$, to z równania (142) otrzymamy równanie bilansu energii cieplnej dla Σ -fazy

$$\frac{d}{dt}(u_{\Sigma}^1 \delta' \varepsilon_{k j}) = -\bar{\tau}_{v k}^1 \bar{\tau}^1 (\Delta \bar{w}_1 \bar{\tau})_k + \bar{\tau}_{v j}^1 \bar{\tau}^1 (\Delta \bar{w}_2 \bar{\tau})_j + \bar{q}_k^1 \bar{v}_k^1 + \bar{q}_j^1 \bar{v}_j^1 + \\ + \rho_k^1 (\Delta \bar{w}_2)_k [u_k^1 - \frac{p_k^1}{\rho_k^1} + 0,5 (\Delta \bar{w}_k^2) \bar{v}_k^1] + \rho_j^1 (\Delta \bar{w}_1)_j [u_j^1 - \frac{p_j^1}{\rho_j^1} + 0,5 (\Delta \bar{w}_j^2) \bar{v}_j^1] + \\ + \oint_{\partial L} \bar{F}_2(l) [\bar{w}_2^1(l) - \bar{w}_2^1] dl \quad (144)$$

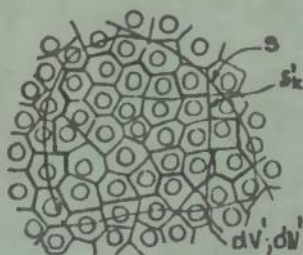
gdzie: $\bar{\tau}^1$ - wektor jednostkowy styczny do powierzchni międzyfazowej $d' \varepsilon_{k j}$ i prostopadły do $d'l$ ($\bar{\tau}_2^1 \perp \bar{v}_2^1$),

$\bar{\tau}_{v \bar{\tau}}^1$ - składowa styczna wektora naprężeń sprężystych / $\bar{\tau}_{v j}^1 = \bar{\tau}_{v v}^1 + \bar{\tau}_{v \bar{\tau}}^1$ /,

$\bar{w}_2 \bar{\tau}^1$ - składowa styczna prędkości rozchodzenia się Σ -fazy / $(\Delta \bar{w}_1 \bar{\tau})_k = \bar{w}_k^1 \bar{\tau}^1 = \bar{w}_2 \bar{\tau}^1$ /.

Fazę dyspersyjną jak również fazę ciągłą, dla której wymiary elementu płynu są tego samego rzędu co wymiary cząstek, można zastąpić

dyskretnym zbiorem statystycznym elementarnych komórek.



Rys. 94. Model komórkowy

Dowolną objętość układu dyspersyjnego dV ograniczoną powierzchnią dS można rozdzielić na dN komórek o wymiarze liniowym l , przy czym każda komórka zawiera element fazy.

Wprowadzając odpowiednie oznaczenia geometrii komórek

dN' - liczba komórek znajdujących się całkowicie w objętości dV ,

dV' - sumaryczna objętość dN' komórek,

d - część powierzchni międzyfazowej tworzonej przez dN' komórek,

dN'' - liczba komórek przecinających powierzchnię dS ,

dV'' - sumaryczna objętość dN'' komórek w obszarze objętości dV ,

d - część powierzchni międzyfazowej tworzona przez dN'' komórek,

V' - objętość komórek równa objętości elementu dyspersyjnego,

V'' - objętość komórki zajęta fazą ciągłą,

- międzyfazowa powierzchnia komórki pokrywająca się z powierzchnią elementu fazy,

- międzyfazowa powierzchnia komórki pokrywająca się z powierzchnią elementu fazy przecinającego powierzchnię dS ,

otrzymany następujące zależności

$$dV_K = dV_K' + dV_K'' = \sum_{k=1}^{dN'} (\delta V_K')_n + \sum_{k=1}^{dN''} (\delta V_K'')_n \quad (145)$$

$$dN = dN' + dN'' \quad (146)$$

$$d\Sigma_{K,ij} = d\Sigma_{K,ij}' + d\Sigma_{K,ij}'' = \sum_{k=1}^{dN'} (\delta \Sigma_{K,ij}')_n + \sum_{k=1}^{dN''} (\delta \Sigma_{K,ij}'')_n \quad (147)$$

Wydzielenie elementarnych mikroobjętości oraz mikropowierzchni pozwala uśrednić zmienne i równania mechaniki układów dyspersyjnych. Zakłada się, że w poruszającym się układzie heterofazowym można wydzielić mikroobjętość spełniającą warunek

$$d^3 \ll dV \ll L^3 \quad (148)$$

gdzie: d - wymiar elementu dyspersyjnego,

L - wymiar makroskopowy /wymiar liniowy aparatu; odległość, na której zanika działanie zakłócenia/.

Uśrednienie wielkości A'_k k-tej fazy układu dyspersyjnego w objętości dV oraz na powierzchni $d\Sigma$ dokonuje się za pomocą następujących wzorów:

$$\langle A'_k \rangle_k^{dV} = \langle A'_k \rangle_k^{dV'} + \langle A'_k \rangle_k^{dV''} = \frac{1}{dV_k} \int A'_k dV' + \frac{1}{dV_k} \int A'_k dV'' \quad (149)$$

$$\begin{aligned} \langle A'_k \rangle_{kij}^{d\Sigma} \left(\frac{d\Sigma_{kij}}{dV} \right) &= \langle A'_k \rangle_{kij}^{d\Sigma'} \left(\frac{d\Sigma_{kij}}{dV'} \right) + \langle A'_k \rangle_{kij}^{d\Sigma''} \left(\frac{d\Sigma_{kij}}{dV''} \right) = \\ &= \left(\frac{d\Sigma_{kij}}{dV} \right) \frac{1}{d\Sigma_{kij}} \int A'_k d\Sigma' + \left(\frac{d\Sigma_{kij}}{dV} \right) \frac{1}{d\Sigma_{kij}} \int A'_k d\Sigma'' \end{aligned} \quad (150)$$

Parametry uśrednione w objętości lub na powierzchni zmieniają się płynnie na odległość rzędu L . Parametry makroskopowe wyznaczone w ten sposób spełniają warunek

$$\langle A'_k \rangle_k^{V_k} = \langle A'_k \rangle_k^{S_k} = \langle A'_k \rangle_k \quad (151)$$

Wielkości A'_k wchodzące w równania mechaniki dotyczą pól prędkości, naprężeń, strumieni masy, pędu i energii w obszarze przepływu. Wielkości te są ze sobą wzajemnie powiązane w postaci skomplikowanych zależności. Uśrednienie wielkości A'_k komplikuje się jeszcze bardziej, ponieważ elementy fazy dyspersyjnej mają dowolne kształty, mogą ulegać odkształceniu statycznemu lub dynamicznemu, mogą rozdrabniać się lub zlepiać się, a na ich powierzchni mogą zachodzić przemiany fazowe.

Ogólna postać uśrednionego równania zachowania masy, pędu i energii całkowitej opisująca mikroruchy układu dyspersyjnego ma postać

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \rho'_k A'_k + \text{div} \rho'_k \bar{w}'_k A'_k \right\rangle_k = \left\langle \text{div} \psi'_k \right\rangle_k + \left\langle \rho'_k f'_k \right\rangle_k \quad (152)$$

gdzie: $A'_k=1$; $\psi'_k=0$; $f'_k=0$ - równanie zachowania masy,

$A'_k=\bar{w}'_k$; $\psi'_k=\bar{\tau}'_k$; $f'_k=\bar{g}'_k$ - równanie zachowania pędu,

$A'_k=u'_k+0,5\bar{w}'_k$; $\psi'_k=\bar{\tau}'_k\bar{w}'_k$; $f'_k=\bar{g}'_k\bar{w}'_k$ - równanie zachowania energii całkowitej.

W celu ułatwienia formułowania równań mechaniki wprowadzono pojęcie "regularny model komórkowy", w którym operuje się objętością średniej komórki. Otrzymamy związki

$$\bar{v} = \frac{dV'}{dN'} = \frac{1}{N}; \quad \bar{v}_k = \frac{dV_k}{dN'} = \frac{v_{vk}}{N} \quad (153)$$

gdzie: $\bar{v}$ - średnia objętość komórki,

$\bar{v}_k$ - średnia objętość k-tej fazy znajdującej się w komórce,

N - liczba elementów dyspersyjnych,

v_{vk} - udział objętościowy k-tej fazy znajdującej się w komórce.

2.3.6.3.4. Równania w makroskali mechaniki układów dyspersyjnych

Najczęściej spotykanymi w praktyce dyspersyjnymi układami są układy dwufazowe /dwukontinualne/. W odrębnych przypadkach, gdy wymiary elementów dyspersyjnych pozwalają wyodrębnić je jako osobne kontinuum, otrzymujemy wielofazowe układy dyspersyjne.

Jeżeli dowolnie mały element układu $dV \rightarrow 0$ zachowuje we wszystkie makroskopowe własności fizyczne układu, to równania bilansowe masy, liczby elementów dyspersyjnych, pędu, energii, energii wewnętrznej k -tej fazy dyspersyjnej, energii wewnętrznej Σ -fazy oraz energii ruchu pulsacyjnego mają postacie

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \bar{w}_k) = N_{j,k,i} \quad (154)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div}(N \bar{w}_k) = \Psi \quad (155)$$

$$\rho_k \frac{d\bar{w}_k}{dt} = \text{Div} \bar{S}_k^* + N(\bar{F}_n)_{k,i} + N_{j,k,i}[(\bar{w}_{j,i,k} - \bar{w}_k) + \rho_k \bar{F}_k] \quad (156)$$

$$\rho_k \frac{de_k}{dt} = \text{div}[S_k \bar{w}_k]^* - \bar{q}_k^* + N(A_{\Sigma})_k + N(q_{\Sigma})_k + N_{j,k,i}[(e_{j,i,k} - e_k) + \rho_k \bar{F}_k \bar{w}_k] \quad (157)$$

$$\frac{du_k^0}{dt} = -(\Delta A_{\Sigma})_{j,k} - (\Delta q_{\Sigma})_{j,k} - j_{j,k}[(e_{j,i,k} - e_k)] \quad (158)$$

$$\rho_k \frac{du_k}{dt} = -\text{div} \bar{q}_k^* + N(A_{\Sigma})_k + N_{j,k,i}[(u_{j,i,k} - u_k) + \rho_k A_k] \quad (159)$$

$$\rho_k \frac{de_k}{dt} = \text{div}(S_k \bar{w}_k)^* - \bar{w}_k \text{Div} \bar{S}_k^* - \rho_k A_k + N(A_{\Sigma})_k - N(\bar{F}_n)_{k,i} \bar{w}_k + N_{j,k,i}[(e_{j,i,k} - e_k)] \quad (160)$$

gdzie: $j_{j,k}$ - intensywność przejścia masy k -tej fazy do j -ej fazy

$$/ i_{k,i} = -j_{j,k} /$$

N - liczba elementów dyspersyjnych,

Ψ - wielkość charakteryzująca zmianę liczby elementów dyspersyjnych w wyniku procesu rozpadu elementów, łączenia się ich w aglomeraty oraz tworzenia się nowych elementów,

- $\bar{w}_k$ - prędkość k-tej fazy,
 $\bar{w}_{k,j}$ - prędkość przejścia fazowego $k \rightarrow j$,
 S_k^* - tensor naprężeń uśredniony na powierzchni $dS_k + d\Sigma_{k,j}$,
 $(F_n)_k$ - siła, z jaką faza ciągła działa na cząstkę fazy rozproszonej /suma wszystkich sił działających na cząstkę fazy rozproszonej/,
 $\bar{F}_k$ - siła masowa o intensywności $\bar{F}_k$,
 e_k - energia całkowita k-tej fazy / $e_k = U_k + 0,5 \bar{w}_k^2 + 0,5 \langle \bar{w}_k^2 \rangle$ /,
 U_k - energia wewnętrzna k-tej fazy,
 $e_k 0,5 \bar{w}_k^2$ - energia kinetyczna k-tej fazy,
 $E_k = 0,5 \langle \bar{w}_k^2 \rangle$ - energia kinetyczna ruchu pulsacyjnego k-tej fazy,
 $\bar{w}_k$ - pulsacja prędkości k-tej fazy,
 $\bar{q}_k^*$ - strumień ciepła uśredniony na powierzchni $dS_k + d\Sigma_{k,j}$,
 $(A_\Sigma)_k$ - praca sił międzyfazowych,
 $(q_\Sigma)_k$ - wymiana ciepła międzyfazowa,
 $(e_{k,j})_k$ - energia całkowita przejścia fazowego / $(U_{k,j})_k + (e_{k,j})_k + (E_{k,j})_k$ /,
 $(U_{k,j})_k$ - energia wewnętrzna przejścia fazowego $k \rightarrow j$,
 $(e_{k,j})_k = 0,5 \langle \bar{w}_{k,j}^2 \rangle_k$ - energia kinetyczna przejścia fazowego $k \rightarrow j$,
 $(E_{k,j})_k = 0,5 \langle \bar{w}_{k,j}^2 \rangle_k$ - energia kinetyczna ruchu pulsacyjnego przejścia fazowego $k \rightarrow j$,
 u_Σ - energia wewnętrzna /powierzchniowa/ międzyfazowa odniesiona do jednej cząstki,
 A_k - praca sił wewnętrznych k-tej fazy.

Równania (154+160) znacznie upraszczają się/szczególnie dotyczy członów tych równań, które opisują zjawiska na granicy rozdziału faz/, jeżeli wprowadzimy założenia:

- cząstki, pęcherzyki oraz krople mają kształt kulisty o średnicy d ,
- nie uwzględnia się efektów wynikających z ruchu chaotycznego, ruchu obrotowego oraz deformacji elementów fazy rozproszonej,
- nie uwzględnia się efektów związanych z oddziaływaniem elementów fazy rozproszonej pomiędzy sobą,
- nie występują procesy rozpadania się elementów fazy rozproszonej, ich łączenia się w elementy większe oraz powstawanie nowej fazy.

Jeżeli nie występuje ruch chaotyczny oraz ruch obrotowy elementów fazy dyspersyjnej, to $S_k^* = S_k$ oraz $\bar{q}_k^* = q_k$, tj. zachodzi zgodność tych wielkości w fazie ciągłej z wielkościami dla układu.

Do układu równań (154+160) można dołączyć równanie bilansu krętu /nie uwzględnia się przejść fazowych/

$$\begin{aligned}
 S_k \frac{d}{dt} [(\bar{r} \times \bar{w}_k) + \bar{M}_k^i] &= \text{div} [\bar{r} \times S_k] + S_k [\bar{r} \times \bar{F}_k] + (\bar{M}_{k,j})_k + \\
 &+ [\bar{r} \times (\bar{F}_{\Sigma k,j})_k] + S_k \bar{M}_k^e + \text{div } M_k - \text{div} \langle \Delta \bar{w}_k^i [\Delta \bar{r}^i \times \bar{w}_k^j] \rangle_k \quad (161)
 \end{aligned}$$

- gdzie: $\vec{r}$ - promień-wektor łączący środek masy objętości elementarnej dV z początkiem układu współrzędnych $\vec{r} = \vec{r} + \Delta\vec{r}$,
 $\Delta\vec{r}$ - promień-wektor łączący środek masy ze środkiem mikroobjętości $d'V$ lub mikropowierzchni $d'S$ $\langle \Delta\vec{r} \rangle = 0$,
 $\vec{M}_k$ - gęstość momentu pędu wewnętrznego ruchu pulsacyjnego $\vec{M}_k = \langle \Delta\vec{r} \times \Delta\vec{w}_k \rangle_k$,
 $(\vec{M}_{kij})_k$ - gęstość momentów sił powierzchniowych oddziaływania międzyfazowego /odniesiona do jednostki objętości układu/ $(\vec{M}_{kij})_k = \sum_{ij} \langle \Delta\vec{r} \times \vec{S}_{kij} \rangle_k$,
 $\vec{M}_k^e$ - gęstość masowa objętościowych momentów zewnętrznych $\vec{M}_k^e = \langle \Delta\vec{r} \times \vec{q}_k \rangle_k$,
 $\vec{M}_k$ - tensor momentu naprężeń powierzchniowych wynikły z pulsacji tensora powierzchniowych sił wewnętrznych k-tej fazy $\vec{M}_k = \chi_{vk} (\Delta\vec{r} \times \Delta\vec{S}_{vk})$.
Wprowadzając zależność (91-1.2) dla k-tej fazy ($\vec{S}_k = \vec{S}_k^s$)

$$\text{div}(\vec{r} \times \vec{S}_k) = \vec{r} \times \text{Div} \vec{S}_k \quad (162)$$

do równania (161) oraz odejmując równanie bilansu pędu k-tej fazy, otrzymamy równanie momentu ruchu pulsacyjnego

$$\rho_k \frac{d\vec{M}_k^e}{dt} + \text{div} \vec{M}_k + (\vec{M}_{kij})_k + \rho_k \vec{M}_k^e \quad (163)$$

W przypadkach praktycznych, gdy ruchy elementów układu nie są uporządkowane, znikają składniki równania (162) i równanie to staje się tożsamością.

W wielu przypadkach układy heterofazowe /suspensje włókniste/ mogą być traktowane jako cieczy niencwtonowukie. Do opisanie ruchu takich układów wykorzystuje się równanie Naviera i Stokesa, z tym jednak zastrzeżeniem, że tensor naprężeń sprężystych ma postać (89b-1.2)

$$\vec{S}_s = \mu \{ [E(i)] T^s \} \quad (164)$$

- gdzie: $\vec{S}_s$ - tensor naprężeń sprężystych dla suspensji,
 $\{ [E(i)] \}$ - funkcja uwzględniająca wpływ fazy dyspersyjnej na lepkość płynu,
 $\dot{\gamma}$ - prędkość odkształcenia,
 E - wielkość dysypacji energii mechanicznej.

W przypadku symetryczności tensora prędkości deformacji $T = T^s$ intensywność prędkości deformacji określa się z zależności

$$E(i) = \{ 2[\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + \dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_z^2] \}^{1/2} \quad (165)$$

Wprowadzając nową postać tensora naprężeń sprężystych (164) do równania ruchu (101-1.2) otrzymamy dla suspensji nieściśliwej symetrycznym tensorem naprężeń następującą postać równania ruchu

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = \rho F - \text{grad } p + \mu \{f[E]\} \Delta \bar{w} + 2\mu \frac{df[E]}{dE} (T^s \cdot \text{grad } E) \quad (166)$$

Dla płynów newtonowskich $\{f[E]\} = 1$. Dla suspensji funkcję tę określa się doświadczalnie.

Problemy związane z analizą zachowania się układów heterofazowych są niezwykle skomplikowane. Występują takie zjawiska jak: przemiany fazowe, reakcje chemiczne, wymiana ciepła, oddziaływania siłowe, trwałość mechaniczna, efekty kapilarne, ruch pulsacyjny, chaotyczny oraz obrotowy, zderzenia się elementów fazy dyspersyjnej, rozdrabnianie się i koagulacja elementów itp. Nieznane są wystarczająco warunki występowania tych zjawisk, co wywołuje rozbieżność pomiędzy teorią a badaniami doświadczalnymi.

W celu opisanie teoretycznego układów dyspersyjnych potrzebne są modele matematyczne. Modele takie powinny zawierać:

- opisanie procesów zachodzących w odrębnych fazach z uwzględnieniem zjawisk w mikroskali,
- opisanie struktury i efektów oddziaływań międzyfazowych.

Wyprowadzone równania bilansowe masy, pędu i energii układów dyspersyjnych, mieszanin oraz płynów czystych nie uwzględniają ładunków powstających podczas ruchu elementów, wzajemnych oddziaływań dipolowych, podwójnych warstw i innych zjawisk występujących w ośrodku w wyniku działania zewnętrznego pola elektromagnetycznego.

3. MECHANIKA PŁYNÓW W POLU ELEKTROMAGNETYCZNYM

3.1. Wstęp

Ruch płynu w polu elektromagnetycznym zależy od tego, czy cząstki płynu mają ładunek elektryczny, czy mogą być naładowane, czy są obojętne względem pola elektromagnetycznego.

Ruch cieczy przewodzącej prąd lub gazu zjonizowanego wytwarza pole elektromagnetyczne oraz podlega działaniu elektromagnetycznego pola zewnętrznego. Przewodność cieczy wynika z obecności swobodnych ładunków/jonów lub elektronów/ oraz ładunków związanych /dipoli/. Przewodność zjonizowanego gazu określona jest obecnością elektronów i dodatnich jonów. W układach dyspersyjnych, na skutek niejednorodności

powierzchni elementu fazy dyspersyjnej, w wyniku procesu adsorpcji tworzą się dipole, t.j. zachodzi proces polaryzacji spontanicznej. Dipole w układach heterofazowych wytwarzane są również w wyniku polaryzacji polem zewnętrznym elektrycznym lub magnetycznym. Na sposób polaryzacji w znacznym stopniu wpływa struktura układu dyspersyjnego.

W procesie przepływu cieczy przewodzącej prąd występują równocześnie, we wzajemnym powiązaniu, przepływ elektryczny, przepływ magnetyczny oraz przepływ hydrodynamiczny /aerodynamiczny/. Ruch cieczy przewodzącej prąd lub dyfuzyjny sjonizowanego gazu wytwarzają pole elektryczne. Ruch ładunków w płynie wytwarza własne pole magnetyczne. Jeżeli pole to zmienia się w czasie, to w płynie indukuje się pole elektryczne.

Ruch cieczy przewodzącej prąd w poprzecznym polu magnetycznym indukuje prąd elektryczny, a we wzajemnym oddziaływaniu z polem powstaje objętościowa siła elektromagnetyczna. Doprowadzony prąd w cieczy przewodzącej wytwarza własne pole magnetyczne, które we wzajemnym oddziaływaniu z zewnętrznym polem elektrycznym wytwarza siłę elektromagnetyczną ściskającą ciecz.

Prąd indukowany oraz siły elektromagnetyczne mogą osiągać znaczne wartości. Dla ciekłego aluminium /Powch, Czekin/ przy zewnętrznym polu magnetycznym $1,7\text{ T}$ i gęstości prądu zewnętrznego $28 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2$ powstająca siła objętościowa elektromagnetyczna ma wartość dla oddziaływania pól $47,5 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$, dla oddziaływania prądu indukowanego i własnego pola magnetycznego $0,475 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ oraz oddziaływania zewnętrznego pola magnetycznego i prądu indukowanego $800 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$. Gęstość prądu indukowanego wynosi $475 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2$.

W wyniku działania pola elektromagnetycznego zmieniają się własności reologiczne oraz charakter ruchu płynu.

Pod działaniem pola magnetycznego na skutek orientacji dipoli hamuje się ruch obrotowy cząstek i wzrasta lepkość układu dyspersyjnego. Ruch obrotowy elementów dyspersyjnych ustanie, jeżeli moment obrotowy sił tarcia będzie mniejszy od momentu obrotowego zewnętrznego pola magnetycznego. W wyniku działania krzyżowego pola elektrycznego i magnetycznego, gdy kierunek działania objętościowej siły elektromagnetycznej pokrywa się z kierunkiem ruchu kropli cieczy, zanika ruch drgający kropli i przyjmuje ona kształt kulisty. Znacznie wzrasta prędkość ruchu kropli. Jeżeli ciecz jest dielektrykiem, to zewnętrzne pole elektryczne deformuje kroplę, a przy dużym natężeniu krople mogą być rozrywane.

Elektromagnetyczne własności płynów wykorzystywane są w procesach technologicznych, jak np. przy usuwaniu osadu powstającego w procesie demineralizacji wód gruntowych z kopalń, w separacji magnetycznej, w procesie filtracji elektrostatycznej itp.

Dużo prac poświęcono zagadnieniom elektryczności atmosferycznej,

polu magnetycznemu jądra ziemi oraz problemu plazmy gwiazd.

3.2. Zarys historyczny

Zarys historyczny rozwoju mechaniki płynów w polu elektromagnetycznym omówiono podobnie jak przy opracowaniu innych tematów. Wymieniono tematy oraz podano nazwiska autorów, którzy wnieśli największy wkład w rozwój tej dziedziny. Podano również datę pojawienia się publikacji dotyczącej omawianego problemu.

Są to problemy:

- ogólna teoria elektromagnetohydrodynamiki - Lundquist/1952/, Elsasser/1955/, Cole/1956/, Berkowicz/1958/, Ferraro/1961/, Plumpton/1961/, Chandrasekhar/1961/, Cambel/1962/, Schercliff/1965/, Soo/1971/ ,
- wpływ pola elektromagnetycznego na przepływ płynu - Faraday/1832/, Langmuir i Blondett/1924/, Lockwood i Hamza/1962/, Stuetzer/1962/, Kirko/1964/, Soo/1965/, Golfat, Lielausis i Szczerbin/1976/ ,
- siła wyporu i oporu - Jastrow i Rearse/1957/, Syrobotskij i Czesalin/1963/, Andreew i Anderz/1964/, Jaszczenko/1974/, Fowch i Czekin/1975/ ,
- plazma/gaz zjonizowany - Bigelow/1889/, Larmor/1918/, Petersen/1919/, Alfven/1942/, Cruscal/1954/, Rose i Clark/1961/, Thompson/1962/, Resen/1962/, Cambel/1963/, Whiter/1963/, Pai/1964/, Dinick/1964/ ,
- zachowanie się układów dyspersyjnych w polu elektromagnetycznym - Wilson/1925/, Arendt/1926/, Buchner i van Royen/1929/, White i Penney/1951/, O'koneki/1955/, Reyleigh/1955/, Murphy/1955/, Kao/1961/, Ailam/1962/, Gallily/1962/, Schwarz/1962/, Allan i Masson/1962/, Taylor/1964/ ,
- elektryczność atmosferyczna - Rudger/1913/, Mason/1957/, Cobine/1958/, Friedman/1960/, White/1963/, Thrane/1964/, Szyszkina/1965/, Latham i Miller/1965/, Machotkin/1965/, Coronti/1965/, Chalmers/1967/ ,
- układy dyspersyjne/różne zagadnienia - Leenow i Kolin/1954/, Kraenogorska/1963/, Soo i Trezek/1966/, Klase i Martinek/1967/, Lawrow/1967/, Bibik/1970/ ,
- magnetodynamika kosmiczna - Ferraro/1937/, Alfven/1942/, Walen/1946/, Bondi i Gold/1950/, Dungey/1953/, Sweet/1958/, Herzenberg/1958/, Hoyle i Ireland/1960/, Childress/1967/, Roberts/1970/, Schmidt, Weiss i Wilson/1974/.

3.3. Podstawowe równania pola elektromagnetycznego

Pole elektromagnetyczne charakteryzuje się wektorami natężenia $\vec{E}$ i indukcji $\vec{D}$ pola elektrycznego oraz wektorami natężenia $\vec{H}$ i indukcji $\vec{B}$ pola magnetycznego. Wielkości te powiązane są ze sobą równaniami

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} + \text{rot } \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{J}^e \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_e - \text{div } \vec{P} = \rho_e - \rho_{ep} \quad (4)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu_m \vec{H} \quad (6)$$

$$\vec{J}' = \sigma \vec{E}' \quad (7)$$

- gdzie: $\vec{M}$ - wektor polaryzowalności magnetycznej,
 $\vec{P}$ - wektor polaryzowalności elektrycznej,
 ρ_{ep} - gęstość ładunków polaryzacji,
 c - prędkość światła w próżni $/\epsilon_0 \mu_m = c^2/$,
 $\vec{J}$ - gęstość objętościowa prądu elektrycznego przewodnościowego,
 $\vec{J}^e$ - gęstość prądu elektrycznego powstającego w wyniku działania obcych pól oraz obcych sił nieelektrycznych,
 $\vec{J}^p$ - gęstość prądu przesunięcia $/\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}^p/$,
 ρ_e - gęstość objętościowa ładunków znajdujących się w ośrodku,
 ϵ - tensor dielektryczny, który dla układów izotropowych jest wielkością stałą $/\epsilon = \epsilon \vec{E}/$ i oznacza przenikalność elektryczną względną $/\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}/$,
 μ_m - tensor przenikalności magnetycznej, który dla układów izotropowych jest wielkością stałą $/\mu_m = \mu_m \vec{H}/$ i oznacza przenikalność magnetyczną względną $/\mu_m = 4 \cdot 10^{-7} \text{ H/m}/$,
 σ - przewodność elektryczna.

Układ równań (1+7) nazywany jest układem równań Maxwella. Równanie (1) wskazuje, że wirowe pole magnetyczne wytwarza się prądem przesunięcia $/\partial \vec{D}/\partial t/$, prądem przewodnościowym ($\vec{J}$) oraz prądem powstałym w wyniku działania obcych sił elektodynamicznych. Równanie (2) oznacza, że w każdym punkcie pola magnetycznego zmniejszającego się w czasie

wytwarza się wirowe pole elektryczne /prawo Faradaya/. Równanie (3) wskazuje, że wirowe pole magnetyczne jest bezźródłowe. Źródłem pola elektrycznego są ładunki objętościowe (4) /twierdzenie Gaussa w postaci różniczkowej/. Równania (5+7) nazywane są równaniami stanu elektromagnetycznego. Wiążą one ze sobą różne elektryczne i magnetyczne charakterystyki ośrodków. Równania te wynikają ze wzorów określających strumienie elektryczny / w objętości V ograniczonej zamkniętą powierzchnią S znajduje się ładunek przestrzenny - gęstość zjonizowany / i magnetyczny

$$\Psi = \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div } \vec{D} dV = \int_V \rho_e(v) dV \quad (8)$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (9)$$

gdzie: Ψ - strumień elektryczny,
 Φ - strumień magnetyczny.

Równanie (7) jest uogólnionym równaniem Ohma dla ośrodka. Jeżeli ładunek oraz prąd przemieszczają się wraz z ośrodkiem, to równanie (7) w nieruchomym układzie współrzędnych przyjmie postać

$$\vec{J}' = \rho_e \vec{w} + \sigma [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})] \quad (10)$$

gdzie $\rho_e \vec{w} = \vec{J}^q$ - prąd wytwarzany przez ruch ładunków.

Wektory pola elektromagnetycznego płynu spolaryzowanego w ruchomym układzie odniesienia oraz nieruchomym układzie powiązane są zależnościami

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{w} \times \vec{B}' \quad (11)$$

$$\vec{H}' = \vec{H} - \vec{w} \times \vec{D}' \quad (11a)$$

$$\vec{P}' = \vec{P} - \vec{w} \times \vec{M}' \quad (11b)$$

$$\vec{M}' = \vec{M} + \vec{w} \times \vec{P}' \quad (11c)$$

$$\vec{J}' = \vec{J} + \rho_e \vec{w} \quad (12)$$

gdzie $\vec{w}$ - prędkość płynu /prędkość ruchomego układu odniesienia/.

Do układu równań należy dołączyć równanie zachowania ładunków. Równanie to otrzymuje się z równań (1) oraz (4). Stosując operację div do równania (1), zakładając $\vec{J}^q = 0$

$$\text{div rot } \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} + \text{div } \vec{J} \quad (13)$$

oraz wykorzystując wzór (4) otrzymamy

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\gamma} = 0 \quad (14)$$

Wychodząc ze wzoru określającego napięcie magnetyczne oraz wykorzystując wzór (1) otrzymamy zależność

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{\gamma} d\vec{S} \quad (15)$$

gdzie: l - długość przewodnika,

S - przekrój poprzeczny przewodnika,

$\vec{J} = \vec{J}^e + \vec{J}^p$ - gęstość prądu elektrycznego całkowitego.

Z zależności (14) wynika wzór opisujący różniczkowe prawo przepływu prądu /prawo Ampera/

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{\mu_m} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\gamma}^e + \vec{\gamma}^p = \vec{\gamma} \quad (16)$$

Wobec zależności (3) wzór ten przyjmuje postać /pierwsze prawo Kirchhoffa/

$$\operatorname{div} \vec{\gamma} = 0 \quad (17)$$

Ze wzoru (17) wynika, że gęstość prądu całkowitego jest wektorem bezźródłowym.

3.4. Potencjał skalarowy i potencjał wektorowy pola elektromagnetycznego

W celu określenia pola elektromagnetycznego należy wyznaczyć wektory $\vec{E}$ oraz $\vec{H}$. W wielu przypadkach zagadnienie daje się uprościć. Zamiast sześciu składowych tych wektorów wyznacza się jeden skalar φ oraz jeden wektor $\vec{A}$.

Dla ośrodka jednorodnego nieruchomego /próżnia/ wobec wzoru (3) równanie Maxwella (1) przyjmie postać

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (18)$$

Stąd wynika, że wektor $\vec{H}$ jest solenoidalny i może być przedstawiony za pomocą innego wektora

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (19)$$

Z równania (2) oraz zależności (19) wynika wzór

$$\operatorname{rot} \left[\vec{E} + \mu_m \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (20)$$

określający związek pomiędzy skalarą φ i wektorem $\vec{A}$

$$\bar{E} + \mu_m \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\text{grad} \psi'' \quad (21)$$

Jeżeli nie uwzględnimy zjawisk polaryzowalności, to wzór (1) można zapisać w postaci

$$\text{rot rot } \bar{A} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \sigma \bar{E} + \bar{j}^e \quad (22)$$

Wykorzystując zależności (21) i (22) oraz wzór z analizy wektorów

$$\text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \Delta \bar{A} \quad (23)$$

otrzymamy

$$\text{grad}(\text{div } \bar{A} + \epsilon \frac{\partial \psi''}{\partial t} + \sigma \psi'') - \Delta \bar{A} = -\epsilon \mu_m \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \mu_m \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \bar{j}^e \quad (24)$$

Obliczone z równania (24) potencjały wektorowy $\bar{A}$ oraz skalarowy są niesjednoczesne. Wprowadza się więc dodatkowy warunek / warunek Lorenza/

$$\text{div } \bar{A} + \epsilon \frac{\partial \psi''}{\partial t} + \sigma \psi'' = 0 \quad (25)$$

Zgodnie z tym warunkiem równanie (24) uprości się do postaci

$$\Delta \bar{A} - \epsilon \mu_m \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \mu_m \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \bar{j}^e \quad (26)$$

Potencjał ψ'' określa się z równania otrzymanego drogą podobnych przekształceń

$$\Delta \psi'' - \epsilon \mu_m \frac{\partial^2 \psi''}{\partial t^2} - \mu_m \sigma \frac{\partial \psi''}{\partial t} = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (27)$$

Jeżeli brak jest ładunków swobodnych / $\rho_e = 0$, to dla $\psi'' = 0$ pole elektromagnetyczne określone jest przez wektor-potencjał $\bar{A}$ spełniający dodatkowy warunek

$$\text{div } \bar{A} = 0 \quad (28)$$

Wykorzystując równania (5), (6) oraz (10) można równanie (1) przekształcić do innej postaci

$$\text{rot } \bar{W} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \sigma [\bar{E} + (\bar{W} \times \mu_m H)] + \rho_e \bar{W} \quad (29)$$

Jeżeli płyn jest jednorodny i nieruchomy, to stosując operacje rot do równania (29) otrzymamy

$$\text{rot rot } \bar{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \bar{E} + \sigma \text{rot } \bar{E} \quad (30)$$

Wykorzystując zależności (2), (3), (6) oraz (22) otrzymamy inną postać równania (30) zapisaną dla wektora $\vec{H}$

$$\Delta \vec{H} = \epsilon \mu_m \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \sigma \mu_m \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (31)$$

Analogicznie można otrzymać równanie określające wielkość $\vec{E}$

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \mu_m \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu_m \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (32)$$

Jeżeli w ośrodku jednorodnym przewodzącym prąd ustalony o gęstości $\vec{J}$ nie ma źródeł prądu, to w przypadku procesu ustalonego, pole elektryczne jest bezwirowe. Wobec powyższego zależność (26) upraszcza się do postaci

$$\Delta \psi = 0 \quad (33)$$

tj. potencjał pola elektrycznego prądu ustalonego spełnia równanie Laplace'a. Jeżeli są ładunki ρ_e , to równanie (26) przyjmie postać równania Poissona

$$\Delta \psi = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (34)$$

Względne wartości ϵ oraz μ_m dla próżni są równe jedności, a dla innych ośrodków różne od jedności. Względna wartość wielkości ϵ dla ośrodków jest zawsze większa od jedności. Wartość względnej przenikalności magnetycznej jest większa od jedności $[\mu_m > 1]$ dla paramagnetyków, mniejsza od jedności $[\mu_m < 1]$ dla diamagnetyków oraz znacznie większa od jedności dla ferromagnetyków $[\mu_m \gg 1]$. We wzorach teorii pola elektromagnetycznego w celu racjonalizacji opuszcza się wielkość 4π przy odpowiednich charakterystykach ośrodków ϵ i μ_m .

3.5. Unoszenie pola magnetycznego płynem dobrze przewodzącym prąd elektryczny

Z równań (26) oraz (27) wynika, że w ośrodkach nie przewodzących prąd elektryczny $\sigma = 0$ / procesy elektromagnetyczne rozchodzą się niegasnąco z prędkością $c = \sqrt{\epsilon \mu_m}^{-1}$, natomiast w ośrodkach o dużej przewodności $\sigma = \text{const}$ / można nie brać pod uwagę prądów przesunięcia, a uwzględniać tylko prąd przewodnościowy $[\vec{J}]$. Dla ośrodków o doskonałej przewodności $\sigma = \infty$ / z równania (30) wynika, że linie siłowe pola magnetycznego przenoszą się razem z płynem / zjawisko "wmożenia" pola magnetycznego/.

Wykorzystując równania (2), (10) oraz (15) otrzymamy zależność

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma \mu_m} \text{rot } \vec{B} - (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (35)$$

Stosując operację rot do równania (35) oraz wykorzystując wzory (2), (3) oraz (23) zapisany dla wektora $\vec{H}$ i zakładając, że wielkość $(6\mu_m)^{-1} = \text{const}$ otrzymamy

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{w} \times \vec{B} - \frac{\vec{J}}{\sigma}) = \text{rot}(\vec{w} \times \vec{B}) + \nu_m \Delta \vec{B} \quad (36)$$

gdzie $\nu_m = (6\mu_m)^{-1}$ - lepkość magnetyczna /współczynnik dyfuzji pola magnetycznego/ tłumiąca ruch płynu prostopadły do linii pola.

Dla płynu nieściśliwego przy wykorzystaniu zależności (2) oraz wzoru analizy wektorowej

$$\text{rot}(\vec{w} \times \vec{B}) = (\vec{B} \text{grad})\vec{w} - (\vec{w} \text{grad})\vec{B} + \vec{w} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{w} \quad (37)$$

równanie (36) można zapisać w innej postaci

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + (\vec{w} \text{grad})\vec{H} - (\vec{H} \text{grad})\vec{w} = \nu_m \Delta \vec{H} \quad (38)$$

Równanie (36) podobne jest do równania ruchu płynu w postaci Friedmana /79-1.2/.

Jeżeli $\vec{w} = 0$, to prawa strona równania (36) redukuje się do członu dysypacyjnego

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nu_m \Delta \vec{B} \quad (39)$$

Zgodnie z równaniem (39) pole magnetyczne przenika/dyfunduje/przez ośrodek i ulega tłumieniu lepkością magnetyczną ośrodka.

Jeżeli $\vec{w} \neq 0$, a ośrodek ma mały opór elektryczny / $\sigma = 0$ /, to prawa strona równania (36) redukuje się do członu konwekcyjnego /równanie Walena/

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{w} \times \vec{B}) \quad (40)$$

Z równania (40) wynika, że linie pola magnetycznego poruszają się razem z płynem i są niby "warczone" w płyn. Ruch ośrodka jest wówczas w poprzek linii pola magnetycznego i unosi to pole.

3.6. Siła pola elektromagnetycznego

3.6.1. Wstęp

W wyniku działania stałego pola elektromagnetycznego na element płynu poza siłą masową i siłą powierzchniową działa dodatkowa siła elektromagnetyczna objętościowa odniesiona do jednostki objętości/dla płynu niepolarnego/. Siła ta zależy od parametrów pola elektromagnetycznego oraz własności elektromagnetycznych ośrodka.

Siłę pola elektromagnetycznego wyznacza się z zależności

$$\vec{F}_{em} = \rho_e \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \text{grad} \epsilon - \frac{1}{2} \vec{H}^2 \text{grad} \mu_m + \frac{1}{2} \text{grad} (\vec{E}^2 \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}) + \frac{1}{2} \text{grad} (\vec{H}^2 \rho \frac{\partial \mu_m}{\partial \rho}) + \vec{J} \times \vec{B} + \rho_m \vec{H} \quad (41)$$

gdzie: ρ - gęstość płynu,

ρ_m - gęstość ładunków magnetycznych.

Siłę pola elektromagnetycznego $\vec{F}_{em}$ można przedstawić w postaci sumy dwóch składowych

$$\vec{F}_{em} = \vec{F}_e + \vec{F}_m \quad (42)$$

gdzie: $\vec{F}_e$ - siła wynikająca z działania pola elektrycznego,

$\vec{F}_m$ - siła wynikająca z działania pola magnetycznego.

Występowanie tylko jednej składowej siły (42) podczas przepływu płynu zależy od przewodności elektrycznej płynu. Jeżeli płyn nie przewodzi prądu elektrycznego, to zachowaniem się takich płynów w polu elektromagnetycznym zajmuje się elektrodynamika. Badaniem ruchu płynów przewodzących prąd elektryczny zajmuje się magnetohydrodynamika.

3.6.2. Siła pola elektrycznego

Podczas ruchu płynu z ładunkami jednoimiennymi lub dipolami w silnym polu elektrycznym powstają siły elektrostatyczne współmierne z siłami hydrodynamicznymi. Siły te zmieniają hydrodynamikę przepływu, który z kolei wywołuje zmianę przyłożonego pola.

W układach elektrodynamiki:

- pole elektryczne zewnętrzne jest znacznie silniejsze od indukowanego pola elektrycznego / $\vec{E} \gg \vec{E}_{ind.}$ /,
- pole magnetyczne zewnętrzne jest znacznie silniejsze od indukowanego pola magnetycznego / $\vec{H} \gg \vec{H}_{ind.}$ /,
- energia pola elektrycznego jest znacznie większa od energii pola magnetycznego / $\epsilon \vec{E}^2 \gg \mu_m \vec{H}^2$ /.

W wyniku działania zewnętrznego pola elektrycznego dielektryk polaryzuje się. Wektor polaryzacji elektrycznej jest sumą dwóch składników: wektora polaryzacji dipoli trwałych / $\vec{P}_{dip.}$ / oraz wektora polaryzacji wynikającego z deformacji elementów płynu / $\vec{P}_{def.}$ /. Wektor polaryzacji elektrycznej określony jest zależnością / $\vec{P} \ll \epsilon^2$ /

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon) \vec{E} = K \vec{E} \quad (43)$$

gdzie: ϵ - tensor dielektryczny,

ϵ - tensor jednostkowy,

K - tensor podatności elektrycznej.

Uwzględniając zależność (43) równanie bilansu gęstości pędu / określenie Abrahama / pola elektromagnetycznego /wektor Poyntinga/ przyjmie postać

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \bar{E} \times \mu_m \bar{H}) = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{D} \times \bar{B}) - \frac{\partial}{\partial t} (\bar{P} \times \bar{B}) \quad (44)$$

Jeżeli równania Maxwella

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} &= \text{rot } \bar{H} - \bar{j}^q \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} &= -\text{rot } \bar{E} \end{aligned} \quad (45)$$

pomnożymy wektorowo odpowiednio przez $\bar{B}$ oraz $\bar{D}$ i dodamy oraz wyko-
rzystamy wzór z analizy wektorów

$$\text{rot } \bar{a} \times \bar{b} = \text{div}(\bar{b} \bar{a} - \bar{a} \bar{b} \epsilon) - \bar{a} \text{div } \bar{b} + (\text{grad } \bar{b}) \cdot \bar{a} \quad (46)$$

gdzie: ϵ - jednostkowa diada przestrzenna,

$\bar{a} \bar{b}$ - iloczyn diadowy,

to otrzymamy zależność

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{D} \times \bar{B}) = \text{div}(\bar{D} \bar{E} - \bar{E} \cdot \bar{D} \epsilon) - \rho_e \bar{E} + (\text{grad } \bar{D}) \cdot \bar{E} \quad (47)$$

Wykorzystując zależność

$$(\text{grad } \bar{D}) \cdot \bar{E} = \text{div} \{ (\bar{P} \cdot \bar{E} + 0,5 \epsilon \bar{E}^2) \epsilon \} - (\text{grad } \bar{E}) \cdot \bar{P} \quad (48)$$

wzór (47) przyjmie postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \bar{E} \times \mu_m \bar{H}) &= \text{div}(\bar{D} \bar{E} - 0,5 \epsilon \bar{E}^2 \epsilon) - \rho_e \bar{E} - (\text{grad } \bar{E}) \cdot \bar{P} - \\ &- \frac{d}{dt} (\bar{P} \times \bar{B}) + \text{div} \{ \bar{w} (\bar{P} \times \bar{B}) \} \end{aligned} \quad (49)$$

Równanie to można zapisać w postaci zwartej /przy $\epsilon = \text{const}$ /

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\Pi}_e = \text{Div } \bar{S}_e - \bar{F}_e \quad (50)$$

gdzie: $\bar{\Pi}$ - wektor Poyntinga (W/m^2),

$\bar{S}_e$ - tensor naprężeń,

$\bar{F}_e$ - siła elektryczna odniesiona do jednostki objętości

$$\bar{\Pi} = \epsilon \bar{E} \times \mu_m \bar{H} \quad (51)$$

$$\bar{S}_e = \epsilon \bar{E} \bar{E} - 0,5 \epsilon \bar{E}^2 \epsilon + \bar{w} (\bar{P} \times \bar{B}) \quad (52)$$

$$\bar{F}_e = \rho_e \bar{E} + (\text{grad } \bar{E}) \cdot \bar{P} + \frac{d}{dt} (\bar{P} \times \bar{B}) \quad (53)$$

Przedostatni człon prawej części równania (53) oznacza siłę Kelvina, t.j. siłę oddziaływania pola elektrycznego na dipol. Ostatni człon tego równania oznacza siłę magnetyczną Lorenza działającą na dipol, t.j. siłę z jaką pole magnetyczne o indukcji $\vec{B}$ działa na prąd polaryzacji $d\vec{P}/dt$. W elektrodynamice składnik ostatni w równaniu (53) pomija się.

Wykorzystując wzory (6) oraz (41) otrzymamy nową postać równania (53)

$$\vec{F}_{e,2} = \rho_e \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \text{grad } \epsilon \quad (54)$$

Jeżeli podczas deformacji płynu zachodzi zmiana własności dielektrycznych, to pojawia się dodatkowa siła elektrostrykcyjna

$$\vec{F}_{e3} = \frac{1}{2} \text{grad} (\vec{E}^2 \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}) \quad (55)$$

Dodając składniki (54) oraz (55) otrzymamy wyrażenie na całkowitą siłę panderomotoryczną pola elektrycznego

$$\vec{F}_e = \rho_e \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \text{grad } \epsilon + \frac{1}{2} \text{grad} (\vec{E}^2 \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho})_T \quad (56)$$

Pierwszy składnik wyrażenia (56) jest siłą Coulomba działającą na swobodne ładunki, drugi składnik - siłą strykcyjną, a trzeci oznacza siłę panderomotoryczną.

Jeżeli uwzględnimy indukowane pola elektryczne i magnetyczne oraz założymy, że czas charakterystyczny zmian pola magnetycznego jest duży, to otrzymamy układ równań Maxwella (1+7) dla elektrodynamiki

$$\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot } \vec{H} = -\vec{j}^q \quad (57)$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (58)$$

$$\text{div} \{ \mu_m \vec{H} + (\epsilon \mu_m - 1) (\vec{E} + \vec{w}) \} = 0 \quad (59)$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (60)$$

$$\vec{D} = \epsilon (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ind}}) \quad (61)$$

$$\vec{B} = \mu_m (\vec{H} + \vec{H}_{\text{ind}}) \quad (62)$$

$$\vec{j} = \rho_e (\vec{w} + k \vec{E}) - D_e \text{grad } \rho_e \quad (63)$$

gdzie: $\vec{w}$ - prędkość płynu,

k - współczynnik ruchliwości jonów,

D_0 - współczynnik dyfuzji jonów.

W zagadnieniach praktycznych nie uwzględnia się wyrażenia $D_0 \text{ grad}$.

3.6.3. Siła pola magnetycznego

W płynie przewodzącym prąd elektryczny poddanym działaniu pola magnetycznego indukują się pola elektryczne i pojawiają się prądy elektryczne. Prądy te zmieniają zewnętrzne pole magnetyczne i wywołują siły mechaniczne. Stosunek objętościowych sił magnetycznych wzajemnego oddziaływania prądu indukowanego i pola magnetycznego do sił lepkości określa liczba Hartmanna $Ha = BL (\sigma/\rho)^{1/2}$ /L-wymiar liniowy, ν - lepkość kinematyczna płynu, σ - przewodność elektryczna/.

Jeżeli $Ha \ll 1$, to pole magnetyczne nie wpływa siłowo na przepływ płynu przewodzącego prąd elektryczny.

Charakter przepływu płynu określa magnetyczna liczba Reynoldsa $Re_m = \mu_m \sigma \omega L \nu^{-1} \cdot (\mu_m \sigma)^{-1} = \nu_m$ - lepkość magnetyczna/. Przy $Re_m \ll 1$ pomija się wpływ indukowanego pola magnetycznego na pole zewnętrzne. W celu wyjaśnienia stopnia oddziaływania siłowego sił elektromagnetycznych na ruch płynu wprowadzono liczbę Stewarta $St = Ha^2/Re$, $Re = \omega L/\nu$ - liczba Reynoldsa hydrodynamiczna/.

Jeżeli $Ha \gg 1$, a $Ha^2/Re \ll 1$, to wtórne objętościowe siły elektromagnetyczne w porównaniu z siłami inercyjnymi są małe i nie wpływają na ruch płynu. Przy $Ha \gg 1$ i $Ha^2/Re \gg 1$ siły te mają istotny wpływ na ruch płynu. W tym przypadku na skutek oddziaływania lepkości magnetycznej ν_m zanika ruch płynu prostopadły do linii pola magnetycznego. Wprowadzono dodatkowy kompleks $K = BEL \sigma / \rho \omega^2$ charakteryzujący stosunek pierwotnych objętościowych sił elektromagnetycznych wynikających ze wzajemnego oddziaływania prądu zewnętrznego i pola magnetycznego do sił bezwładnościowych. Jeżeli $Ha^2/Re \ll 1$, a $K \gg 1$, to pomija się wpływ wtórnych sił elektromagnetycznych na ruch płynu. Jeżeli wartości tych kompleksów są zbliżone do jedności, to należy w równaniu ruchu płynu uwzględnić te siły.

W płynie przewodzącym prąd elektryczny uwzględnia się prąd przewodnościowy, a pomija się prąd konwekcyjny i prąd dyfuzyjny przenoszenia ładunków. W takich przypadkach wielkości elektromagnetyczne wyraża się przez wielkości charakteryzujące pole magnetyczne.

Układ równań Maxwella (1+7) dla magnetodynamiki ma postać

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_m \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_m \vec{j} \quad (64)$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (65)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (66)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (67)$$

$$\vec{J} = \sigma [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})] \quad (68)$$

Do układu równań należy dołączyć równania (5), (6) oraz (14).

Wzajemne oddziaływanie prądu elektrycznego oraz pola magnetycznego o indukcji $\vec{B}$ wytwarza jednostkową objętościową siłę panderomotoryczną $\vec{F}_{m1}$

$$\vec{F}_{m1} = \vec{J} \times \vec{B} = \sigma [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})] \times \vec{B} \quad (69)$$

Jeżeli pole elektromagnetyczne jest ustalone, a $\mu_m = \text{const}$, to wykorzystując zależność (64) oraz analizy

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} \vec{B}^2 = (\vec{B} \cdot \operatorname{grad}) \vec{B} + \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} \quad (70)$$

otrzymamy inne wyrażenie na siłę $\vec{F}_{m1}$ /bez polaryzacji/

$$\vec{F}_{m1} = \frac{1}{\mu_m} \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B} = -\frac{1}{2\mu_m} \operatorname{grad} \vec{B}^2 + \frac{1}{\mu_m} (\vec{B} \cdot \operatorname{grad}) \vec{B} - \frac{1}{2\mu_m} \operatorname{grad} \vec{B}^2 + \frac{1}{\mu_m} \operatorname{div} (\vec{B} \vec{B}) \quad (71)$$

gdzie: $\frac{1}{\mu_m} \vec{B} \vec{B}$ - tensor naprężeń magnetycznych,

$\frac{1}{2\mu_m} \vec{B}^2$ - naprężenie ciśnienia /ciśnienie magnetyczne/.

Tensor naprężeń $\vec{B} \vec{B} / \mu_m$ wytwarza siłę powierzchniową, która działając na powierzchnię dS , równa jest $\vec{B} \vec{n} dS / \mu_m$. Siła objętościowa $\operatorname{div} (\vec{B} \vec{B})$ ma składową $\partial(B^2 / \mu_m) / \partial l$ działającą wzdłuż elementu dl linii pola oraz składową $K B^2 / \mu_m$ prostopadłą do elementu dl / K -krzywizna linii siłowej/.

Ciśnienie magnetyczne oraz naprężenie magnetyczne działają wzdłuż linii pola magnetycznego.

Jeżeli płyn przewodzący prąd elektryczny $\vec{J}$ przepływa z prędkością $\vec{w}$ kanałem o przekroju prostokątnym przez obszar działania poprzecznego jednorodnego pola magnetycznego o indukcji $\vec{B}$, to w płynie pojawiają się prądy indukowane. Gęstość tych prądów zgodnie ze wzorem (69) jest równa

$$\vec{J}_z = \sigma (E_z + \vec{w} \times \vec{B}_y) \quad (72)$$

gdzie J_z - prąd indukowany polem magnetycznym.

Wobec zamkniętych obwodów przepływu prądu sumaryczny prąd w poprzecznym przekroju kanału jest równy zero. Otrzymamy równanie

$$E_z = B \cdot w_{\perp r} \quad (72a)$$

gdzie w_{sr} - średnia prędkość przepływu płynu w kanale. Ze wzorów (69) (72) oraz (72a) wynika zależność określającą siłę $\bar{F}_{m1}$

$$F_{m1} = \sigma B^2 (w_{sr} - w_x) \quad (73)$$

Znak różnicy $w_{sr} - w_x$ określa kierunek przepływu prądu, a tym samym oddziaływanie siły $\bar{F}_{m1}$ na przepływ płynu. W środku przekroju kanału przepływ jest hamowany, a przyspieszany w pobliżu ścianek.

Jeżeli do płynu doprowadzimy prąd elektryczny J_x , to wystąpi wzajemne oddziaływanie tego prądu i zewnętrznego pola magnetycznego. Powstaje siła

$$(\bar{F}_{m1})_x = j_x B \quad (74)$$

gdzie J_x - zewnętrzny prąd elektryczny doprowadzony elektrodami ustawionymi w kierunku osi kanału x .

Prąd wewnętrzny wytwarza w płynie własne pole magnetyczne. Pole to może oddziaływać na zewnętrzne pole magnetyczne. Na skutek oddziaływania prądu i indukowanego pola powstaje siła ściskająca płyn. Jeżeli w przekroju poprzecznym kanału gęstość prądu elektrycznego jest stała, to siła ta ściska płyn jednakowo ze wszystkich stron. W przypadku niejednorodnego rozkładu prądu w przekroju ściskająca siła magnetyczna jest niejednakowa.

Wzajemne oddziaływanie prądu indukowanego zewnętrznym polem magnetycznym z poprzeczną składową pola magnetycznego indukowanego przez ten prąd wywołuje siłę magnetyczną, która w górnej części kanału działa w kierunku przeciwnym do przepływu płynu, a w części dolnej zgodnie z kierunkiem przepływu.

Jeżeli pole elektryczne jest potencjalne

$$\bar{E} = -\text{grad } \psi \quad (75)$$

to ze wzoru

$$\bar{F}_{m1} = -\sigma \text{grad } \psi \times \bar{B} \quad (76)$$

wynika, że działanie siły zależy od rozkładu potencjału pola elektrycznego.

Jeżeli w płynie przewodzącym prąd elektryczny są cząstki ciała stałego, to na cząstkę działa siła

$$\bar{F}_{m1} = \int_{V_{cz}} (\bar{j}_1 \times \bar{B}) dV \quad (77)$$

gdzie: V_{cz} - objętość cząstki,

$\bar{j}_1$ - gęstość prądu w cząstce.

W przypadku jednorodnych cząstek kulistych zależność pomiędzy gę-

tością prądu przepływającego przez ciecz, a wielkością $\bar{J}_1$ jest natężająca

$$\bar{J}_1 = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_1 + 2\epsilon} \bar{J} \quad (78)$$

gdzie: $\bar{J}$ - średni wektor gęstości prądu elektrycznego w płynie poza obszarem oddziaływania osątki,

ϵ, ϵ_1 - przewodności właściwe elektryczne cieczy oraz materiału osątki.

Układ składający się z dużej liczby osątek zawieszonych w koloidalnym roztworze nazywano ferrocieczą.

Jeżeli w płynie występuje gradient przenikalności magnetycznej, to należy uwzględnić drugi składnik siły magnetycznej $\bar{F}_m$ (42)

$$\bar{F}_{m2} = -\frac{1}{2} \bar{H}^2 \text{grad } \mu_m \quad (79)$$

Siła $\bar{F}_{m2}$ wciąga paramagnetyki i ferromagnetyki tam, gdzie indukują pola magnetyczne na wartość maksymalną, natomiast diamagnetyki wypycha z obszaru $\bar{H}_{\max}$. W płynach niemagnetycznych siła $\bar{F}_{m2}$ nie występuje.

Jeżeli płyn jest ściśliwy, to w wyniku zmiany gęstości płynu zmienia się przenikalność magnetyczna i należy uwzględnić siłę magnetystrykcyjną

$$\bar{F}_{m3} = \frac{1}{2} \text{grad } (\bar{H}^2 \epsilon \frac{\partial \mu_m}{\partial \epsilon}) \quad (80)$$

Jeżeli w płynie są ładunki magnetyczne, należy uwzględnić dodatkową siłę

$$\bar{F}_{m4} = \rho_m \bar{H} \quad (81)$$

gdzie ρ_m - gęstość ładunków magnetycznych.

Sumując składniki (69), (79), (80) oraz (81) otrzymamy wyrażenie na całkowitą siłę pędząco-motoryczną pola magnetycznego

$$\bar{F}_m = \bar{J} \times \bar{B} - \frac{1}{2} \bar{H}^2 \text{grad } \mu_m + \frac{1}{2} \text{grad } (\bar{E}^2 \epsilon \frac{\partial \mu_m}{\partial \epsilon}) + \rho_m \bar{H} \quad (82)$$

Pierwszy składnik wzoru (82) jest siłą działającą na element płynu przewodzącego prąd powstającą w wyniku wzajemnego oddziaływania prądu elektrycznego i pola magnetycznego. Składnik ten ma największy udział tak, że w wielu przypadkach praktycznych tylko ten składnik określa siłę $\bar{F}_m$.

3.7. Elektrodynamika

Elektrodynamika zajmuje się badaniem ruchu płynu polaryzującego się w polu elektrycznym. Rozpatruje ona również zastosowanie praktyczne, efektywne oddziaływanie pomiędzy przepływem płynu a powstającymi siłami elektrycznymi. Wyróżnia się dwa krańcowe przypadki:

- w płynach nie przewodzących prąd elektryczny wytwarzają się ładunki /jony/, których ruch można przyspieszać polem elektrycznym - pompy elektrodynamiczne,
- ładunki w przepływającym płynie są zbierane i na kolektorze wytwarza się prąd elektryczny - generatory elektrodynamiczne.

Jeżeli ośrodek ciągły znajduje się pod działaniem pola elektrycznego, to układ równań zachowania masy, ładunku, pędu i energii całkowitej ma postać /wektor natężenia momentowego oraz wektor momentów masowych wykonują pracę tylko na przesunięciu ruchu obrotowego wewnętrznego/

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (83)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{w} dV = \int_S \bar{\tau}_n ds + \int_V \rho \bar{F} dV \quad (84)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V (\rho [\bar{\omega} + \rho (\bar{r} \times \bar{w})] dV) \right] = \int_S (\bar{r} \times \bar{\tau}_n) ds + \int_V (\bar{r} \times \bar{F}_e) dV + \int_V \rho (\bar{r} \times \bar{F}) dV + \int_S \bar{\mu}_n ds + \int_V \rho \bar{M}^i dV \quad (85)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V \left(\frac{1}{2} \rho \bar{w}^2 dV + \int_V \frac{1}{2} \rho [\bar{\omega}^2 dV + \int_V \rho u dV] \right) \right] = \int_S \bar{\tau}_n \bar{w} ds + \int_S \bar{\mu}_n \bar{\omega} ds + \int_V \rho \bar{\omega} \bar{M}^i dV + \int_V A_e dV - \int_S \bar{q}_n ds \quad (86)$$

gdzie A_e - dopływ energii do jednostki objętości kołkiem wewnętrznego pola elektrycznego / $A_e = \bar{F}_e \bar{w} = \bar{E} \cdot (\bar{j} + \frac{d\bar{P}}{dt})$, $\bar{j}$ - prąd dyfuzyjny/.

Stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego otrzymamy układ równań różniczkowych /pomija się siły strykyjne/

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{w} = 0 \quad (87)$$

$$\rho \frac{d\bar{w}}{dt} = \rho \bar{F} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \bar{w} + \left(\frac{1}{3} \mu_1 + \mu_2 \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{w} + \mu_1 \operatorname{rot} [2\bar{\omega} - \operatorname{rot} \bar{w}] + \rho_e \bar{E} - \frac{1}{2} \bar{E}^2 \operatorname{grad} \epsilon \quad (88)$$

$$\rho I \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \mu_1 (\operatorname{rot} \bar{w} - 2\bar{\omega}) + (\mu_0 + \mu_3 - \mu_4) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{\omega} + (\mu_3 + \mu_4) \Delta \bar{\omega} + \rho \bar{M}^i \quad (89)$$

gdzie μ_o, μ_s, μ_a - współczynniki lepkości momentowej.

Do układu równań należy dołączyć równanie zachowania pędu pola elektrycznego (50).

Równanie (86) można przedstawić w postaci trzech równań różniczkowych

$$\rho \frac{d0,5\bar{w}^2}{dt} = \text{div}(\bar{S} \cdot \bar{w}) - \bar{S} : \bar{T} + \rho_e \bar{E} \cdot \bar{w} + \text{div}(\bar{P} \cdot \bar{E} \bar{w}) + \bar{E} \frac{d\bar{P}}{dt} - \bar{E} \frac{d\bar{P}}{dt} \quad (90)$$

$$\rho I \frac{d0,5\bar{\omega}^2}{dt} = \text{div}(\bar{M} \cdot \bar{\omega}) - \bar{M} : \bar{\omega} + 2\bar{S}_\mu^a \bar{\omega} + \rho \bar{M}^i \quad (91)$$

gdzie: $\bar{\omega}$ - prędkość kątowa wewnętrznych elementów płynu,

$\bar{\omega}$ - diada pola $\bar{\omega}$.

$$\rho \frac{du}{dt} = \bar{S} : \bar{T} - 2\bar{S}_\mu^a \bar{\omega} + \bar{M} : \bar{\omega} - \text{div} \bar{q} + \bar{\gamma}^d \cdot \bar{E} + \bar{E} \cdot \frac{d\bar{P}}{dt} \quad (92)$$

Wykorzystując równanie Maxwella (57) otrzymamy równanie bilansu energii elektrycznej

$$\frac{\partial}{\partial t}(0,5\epsilon \bar{E}^2) = -(\rho_e \bar{w} + \bar{\gamma}^d) \cdot \bar{E} - \text{div}(\epsilon \bar{E} \times \mu_m \bar{H}) \quad (93)$$

Z równań (90), (91) oraz (93) wynika, że zmiana w czasie sumy energii kinetycznej i elektrycznej jest równa strumieniowi energii Q oraz wydajności źródła energii Q_2

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \rho \bar{w}^2 \bar{w} = \bar{S} \cdot \bar{w} - \bar{P} \cdot \bar{E} \bar{w} + (\epsilon \bar{E} \times \mu_m \bar{H}) + \frac{1}{2} \rho I \bar{\omega}^2 \bar{w} - \bar{M} \bar{\omega} \quad (94)$$

$$Q_2 = -\bar{S} : \bar{T} - \bar{M} : \bar{\omega} + 2\bar{S}_\mu^a \bar{\omega} - \bar{\gamma}^d \cdot \bar{E} - \bar{E} \frac{d\bar{P}}{dt} \quad (95)$$

Równanie zachowania energii całkowitej ma postać

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \text{div}(\bar{q} + \bar{Q}) = 0 \quad (96)$$

Wykorzystując równanie termodynamiczne Gibbsa dla płynu polaryzującego się

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + P \frac{d(\frac{1}{\rho})}{dt} - \bar{E} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{P}}{dt} \quad (97)$$

oraz równanie (92) otrzymamy równanie bilansu entropii

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} \text{div} \bar{q} + \frac{1}{T} \left[-q \frac{\text{grad} T}{T} + \mu_v (\text{div} \bar{w})^2 + (\bar{S}^s : \bar{T}) + 2\bar{S}_\mu^a \cdot (\text{rot} \bar{w} - \bar{\omega}) + \mu_o \left(\frac{1}{3} \bar{M} : \bar{E} \right) \text{div} \bar{\omega} + \bar{M}^s \cdot \bar{\omega}^s + \bar{M}^a \cdot \bar{\omega} + \bar{\gamma}^d \cdot \bar{E} \right] \quad (98)$$

Składnik równania (98) ujęty w nawiasie $\{ \}$ stanowi źródło entropii

$$\zeta_s \geq 0 \quad (99)$$

w którym siłami termodynamicznymi są: skalar $\text{div} \vec{w}$, wektory $\text{grad} T$ oraz $\vec{E}$, diada symetryczna $\vec{T}^s$, pseudowektor $\text{rot} \vec{w} - 2\vec{\omega}$, pseudoskalar $\text{div} \vec{\omega}$, pseudodiada symetryczna $\vec{\omega}^s$ oraz pseudodiada antysymetryczna $\vec{\omega}^a$.

3.8. Magnetohydrodynamika

Magnetohydrodynamika rozpatruje oddziaływanie pola elektromagnetycznego na płyn przewodzący prąd elektryczny. Pole magnetyczne w sposób istotny wpływa na ruch ośrodka, tj. gęstość energii pola magnetycznego porównywalna jest z gęstością energii kinetycznej płynu.

Magnetohydrodynamika znalazła zastosowanie:

- w procesach sterowania syntezą jądrową /plazmą/,
- w tyglach elektromagnetycznych celem otrzymania czystych stopów /podwieszenie metali w stopach/,
- w silnikach plazmowych i generatorach prądu.

Podstawowy układ równań całkowych z uwzględnieniem sił magnetycznych jest układem równań (83+86) z tym, że wielkości $\vec{F}_m$ oraz Λ_m zastępuje się wielkościami $\vec{F}_m$ oraz Λ_m . Otrzymamy układ równań

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{w}) = 0 \quad (100)$$

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{F} + \text{Div} \vec{S} + \vec{\gamma} \times \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{H}^2 \text{grad} \mu_m \quad (101)$$

$$\rho I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \text{Div} \vec{M} + \rho \vec{M}' + 2\vec{S}_\mu^a \quad (102)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \vec{S} : \vec{T} - 2\vec{S}_\mu^a \vec{\omega} + \vec{M} : \vec{\omega} - \text{div} \vec{q} - \vec{w} \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{B}) + \vec{\gamma} \cdot \vec{E} \quad (103)$$

Wielkości $\vec{E}$ oraz $\vec{\gamma} \cdot \vec{E}$ są wielkościami, których wartości zależą od układu odniesienia. W równaniu (103) nie uwzględnia się $\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{B})$ ponieważ siła ta działa prostopadle do ruchu płynu.

Przedostatni człon równania (103) można zapisać w innej postaci

$$\vec{w} \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{B}) = -\vec{\gamma} \cdot (\vec{w} \times \vec{B}) \quad (104)$$

Uwzględniając przekształcenie (104) w równaniu (103) otrzymamy zależność określającą energię pola magnetycznego

$$A_m = A_d + A_k = \vec{\gamma} \cdot \vec{E} + \vec{w} \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{B}) \quad (105)$$

gdzie: A_m - energia dopływająca do jednostki masy w wyniku działania zewnętrznego pola elektromagnetycznego,

A_d - energia dysepacyjna,

A_k - energia ruchu konwekcyjnego.

Wielkość A_d nazywana jest dysypacją omową lub ciepłem Joule'a.

Drugi człon sumy (105) stanowi pracę sił zewnętrznego pola elektromagnetycznego podczas ruchu cieczy. Praca ta zużywana jest albo na rozpędzenie cieczy i zwiększenie energii kinetycznej albo na pokonanie oporów ruchu.

Do równania (101) należy dołączyć równanie zachowania pędu pola elektromagnetycznego /indukowane pole elektryczne/ przy $\mu_m = \text{const}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B})_m = \text{Div } S_m - \vec{F}_m \quad (106)$$

gdzie: $\vec{D} \times \vec{B}$ - wektor Poyntinga,

S_m - tensor naprężeń magnetycznych,

$\vec{F}_m$ - siła magnetyczna odniesiona do jednostki objętości,

$$S_m = \frac{1}{\mu_m} \vec{B} \vec{B} - 0,5 \frac{1}{\mu_m} \vec{B}^2 \vec{E} + \vec{w} (\vec{M} \times \frac{\vec{D}}{E}) + \vec{M} \cdot \vec{B} \cdot \vec{E} \quad (107)$$

$$\vec{F}_m = \vec{\gamma} \times \vec{B} + (\text{grad } B) \cdot \vec{M} - \frac{d}{dt} (\vec{M} \times \frac{\vec{D}}{E}) \quad (108)$$

Jeżeli płyn jest neutralny, to $M=0$ i znikają dwa ostatnie składniki równania (108).

3.9. Elektromagnetohydrodynamika

Mechanika płynów w polu sił objętościowych/masowych/ nieelektrycznych oraz sił elektromagnetycznych opisana jest układem równań bilansu masy, pędu oraz energii. Siła elektromagnetyczna (41) jest siłą objętościową i w mechanice płynów w polu elektromagnetycznym należy ją dodać do sił zachowawczych.

Jeżeli ośrodek ciągły znajduje się pod działaniem ustalonego pola elektromagnetycznego, to układ równań zachowania masy, ładunku, pędu i energii całkowitej otrzymuje się przez sumowanie odpowiednich równań elektrodynamiki i magnetohydrodynamiki.

Równania znacznie upraszczają się, jeżeli:

- parametry fizyczne ośrodka są stałe,
- nie uwzględnia się wektorów polaryzacji elektrycznej i magne-

tycznej,

- rozpatruje się mechanikę płynu w sensie klasycznym /po czasie relaksacji/.

Otrzymamy układ równań zachowania masy, ładunku, pędu i energii całkowitej

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{w}) = 0 \quad (109)$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div} \bar{j} = 0 \quad (110)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \bar{w} + (\epsilon \bar{E} \times \mu_m \bar{H})] + \text{Div}(\rho \bar{w} \bar{w} - \bar{S} - \bar{S}_{em}) = \rho \bar{F} \quad (111)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [0,5(\bar{w}^2 + \epsilon \bar{E}^2 + \mu_m \bar{H}^2) + \text{div} [0,5 \bar{w}^2 \bar{S} \bar{w} + (\epsilon \bar{E} \times \mu_m \bar{H})] - \bar{S} : \bar{T} - \bar{j}(\bar{E} + \bar{w} \times \bar{B})] \quad (112)$$

Energia kinetyczna całkowita nie jest zachowana ponieważ dwa ostatnie człony równania bilansu energii kinetycznej (112) określają dysypację energii /dla płynu przewodzącego prąd elektryczny pomija się energię $\rho_e \bar{E} \cdot \bar{w} = 0$ / . Człony te stanowią źródło energii wewnętrznej, której równanie bilansowe ma postać

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \text{div}(\rho u \bar{w} + \bar{q}) = \bar{S} : \bar{T} + \bar{j}(\bar{E} + \bar{w} \times \bar{B}) \quad (113)$$

Sumując stronami równanie (112) oraz (113) otrzymamy równanie zachowania energii całkowitej

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho e + \text{div} \bar{j}_e = 0 \quad (114)$$

gdzie:

$$\rho e = \rho u + 0,5(\rho \bar{w}^2 + \epsilon \bar{E}^2 + \frac{\bar{B}^2}{\mu_m})$$

$$\bar{j}_e = \bar{q} + 0,5 \rho \bar{w}^3 + \rho u \bar{w} - \bar{S} \cdot \bar{w} + \Pi$$

Energia całkowita pola elektromagnetycznego jest równa sumie energii pola elektrycznego i pola magnetycznego. Równanie bilansu tej energii ma postać

$$\frac{\partial}{\partial t} 0,5(\epsilon \bar{E}^2 + \frac{1}{\mu_m} \bar{B}^2) = -\text{div} \Pi - \bar{j}' \cdot \bar{E}' \quad (115)$$

W równaniu (115) wektory $\bar{j}'$ oraz $\bar{E}'$ określone są wzorami (11) oraz (12) .

Wektor Poyntinga (51) ma kierunek zgodny z kierunkiem rozprzestrzeniania się energii pola elektromagnetycznego. Wielkość tego wektora

równa jest ilości energii przepływającej przez jednostkę powierzchni S prostopadłej do wektora $\vec{n}$, tj. w kierunku rozchodzenia się fali elektromagnetycznej.

Strumień wektora $\vec{n}$ przez zamkniętą powierzchnię S ograniczającą objętość V określa się ze wzoru Umowa-Poyntinga

$$-\oint_S \vec{n} d\vec{s} = -\int_V \text{div } \vec{n} dV = \frac{d}{dt} \int_V W_{em} dV + \int_V \epsilon W_r dV - \int_V \epsilon W_o dV \quad (116)$$

gdzie: $\frac{d}{dt} \int_V W_{em} dV$ - akumulacja energii elektromagnetycznej w objętości V ,
 $\int_V \epsilon W_r dV$ - rozproszenie części mocy pola elektromagnetycznego,
 $\int_V \epsilon W_o dV$ - moc elektromagnetyczna wytwarzana obcymi polami oraz obcymi prądami.

Wektor pędu pola elektromagnetycznego dla płynu spolaryzowanego określony jest relacją

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E} \times \mu_m \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{P} \times \vec{B}) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{M}) \quad (117)$$

Wykorzystując wzory (52), (53), (107) oraz (108) otrzymamy nową postać równania (117) $\epsilon = \text{const}$, $\mu_m = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ /

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E} \times \mu_m \vec{H}) = \text{Div } \vec{S}_{em} - \vec{F}_{em} \quad (118)$$

$$\text{gdzie: } \vec{S}_{em} = \epsilon \vec{E} \vec{E} + \frac{1}{\mu_m} \vec{B} \vec{B} - (0,5 \epsilon \vec{E}^2 + 0,5 \frac{1}{\mu_m} \vec{B}^2 - \vec{M} \cdot \vec{B}) \vec{E} + \vec{w} (\vec{P} \times \vec{B}) - \vec{w} (\vec{M} \times \frac{\vec{D}}{\epsilon}) \quad (119)$$

$$\vec{F}_{em} = \rho_e \vec{E} + \vec{\gamma} \times \vec{B} + (\text{grad } \vec{E}) \cdot \vec{P} + (\text{grad } \vec{B}) \cdot \vec{M} + \frac{d}{dt} (\vec{P} \times \vec{B}) - \frac{d}{dt} (\vec{M} \times \frac{\vec{D}}{\epsilon}) \quad (120)$$

Z równania pędu całkowitego

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \vec{w} + (\epsilon \vec{E} \times \mu_m \vec{H})] + \text{Div} (\rho \vec{w} \vec{w} - \vec{S} - \vec{S}_{em}) = 0 \quad (121)$$

oraz równania (118) otrzymamy równanie ruchu płynu spolaryzowanego w polu elektromagnetycznym po czasie relaksacji $2\vec{w} = \text{rot } \vec{w}$ /

$$\rho \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \rho (\vec{w} \cdot \text{grad}) \vec{w} = \text{Div } \vec{S} + \vec{F}_{em} + \rho \vec{F} \quad (122)$$

Bilans energii kinetycznej płynu oraz gęstość energii elektromagnetycznej opisuje zależność /wykorzystano wzory (11+12)/

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ 0,5 [\varrho \bar{w}^2 + \varepsilon \bar{E}^2 + \frac{1}{\mu_m} \bar{B}^2] - \bar{M}' \cdot \bar{B} + \bar{E}' \cdot (\bar{w} \times \bar{M}') \right\} = \text{div} [0,5 \varrho \bar{w}^3 + \bar{S} \cdot \bar{w} + (\bar{P}' \cdot \bar{E} + \bar{M}' \cdot \bar{B}) \bar{w} - (\varepsilon \bar{E} \times \mu_m \bar{H}) - \bar{S} : \bar{T} - \bar{\gamma} \cdot \bar{E}' - \bar{E}' \frac{d\bar{P}'}{dt} - \bar{B}' \frac{d\bar{M}'}{dt}] \quad (123)$$

Z równania bilansu energii kinetycznej i elektromagnetycznej wynika, że część energii jest przekształcana w energię cieplną ze źródłem o wydajności

$$Q_2 = \bar{S} : \bar{T} + \bar{\gamma} \cdot \bar{E}' + \bar{E}' \frac{d\bar{P}'}{dt} + \bar{B}' \frac{d\bar{M}'}{dt} \quad (124)$$

Równanie bilansu energii wewnętrznej ma postać

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho u = -\text{div} (\varrho u \bar{w} + \bar{q}) + \bar{S} : \bar{T} + \bar{\gamma} \cdot \bar{E}' + \bar{E}' \frac{d\bar{P}'}{dt} + \bar{B}' \frac{d\bar{M}'}{dt} \quad (125)$$

3.10. Uprozczone równania ruchu płynu w polu elektromagnetycznym

Jeżeli we wzorze (120) zachowamy pierwsze dwa najważniejsze składniki oraz założymy, że $\bar{S}_\mu^a = 0$, to po wykonaniu operacji div otrzymamy nową postać równania (122)

$$\varrho \frac{d\bar{w}}{dt} = -\text{grad } p + (\mu_v + \frac{1}{3} \mu) \varrho \text{div} \bar{w} + \mu \Delta \bar{w} + \varrho_e \bar{E} + \bar{\gamma} \times \bar{B} + \varrho \bar{F} \quad (126)$$

Dla płynów nieściśliwych oraz nie przewodzących prąd elektryczny równanie (126) przyjmie postać

$$\varrho \frac{d\bar{w}}{dt} = -\text{grad } p + \mu \Delta \bar{w} + \varrho_e \bar{E} + \varrho \bar{F} \quad (127)$$

W przypadku płynów przewodzących prąd elektryczny można nie brać pod uwagę siły elektrycznej $\varrho_e \bar{E}$ i równanie (126) przyjmie postać

$$\varrho \frac{d\bar{w}}{dt} = -\text{grad } p + \mu \Delta \bar{w} + \bar{\gamma} \times \bar{B} + \varrho \bar{F} \quad (128)$$

Wykorzystując wzory (1), (6) oraz (71) można równanie (126) dla płynu doskonałego, ruchu ustalonego oraz braku sił masowych zapisać w postaci

$$\varrho (\bar{w} \cdot \text{grad}) \bar{w} + \text{grad} \left(p + \frac{\bar{B}^2}{2\mu_m} \right) - (\bar{B} \cdot \text{grad}) \frac{\bar{B}}{\mu_m} = 0 \quad (129)$$

Z równania tego wynika, że siła bezwładności i efekty naprężenia w liniach siłowych pola są wzajemnie zrównoważone. Wzdłuż linii si-

lowych spełnione jest równanie Bernoulliego, ponieważ linia działania siły jest prostopadła do linii prądu / $\psi = \text{const}$ /.

Jeżeli parametry magnetyczne nie zmieniają się w kierunku pola magnetycznego, to drugi człon równania (71) znika i siła $\vec{F}_{m1}$ jest siłą potencjalną

$$\vec{F}_{m1} = -\text{grad} \frac{B^2}{2\mu_m} = -\text{grad} p_m \quad (130)$$

gdzie p_m - ciśnienie pola magnetycznego.

Jeżeli siły masowe są potencjalne, a płyn jest doskonały, to równanie (128) przyjmie postać

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + (\bar{\Omega} \times \bar{w}) + \text{grad} \left(\frac{\bar{w}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{p_m}{\rho} + qz \right) = 0 \quad (131)$$

Jest to całka równania ruchu płynu w polu elektromagnetycznym.

Dla ruchu bezwzirowego otrzymamy równanie Cauchy'ego

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\bar{w}^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} + qz + \frac{p_m}{\rho} = c(t) \quad (132)$$

gdzie ψ - potencjał pola prędkości.

Jeżeli siła $\vec{F}_{m1}$ nie jest potencjalna, a ciecz jest nielepka, to równanie (132) można zapisać w postaci Friedmana

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} - (\bar{\Omega} \cdot \text{grad}) \bar{w} + \bar{\Omega} \text{div} \bar{w} = \text{rot} \vec{F} + \frac{1}{\rho^2} (q \text{grad} \rho \times q \text{grad} \rho) + \frac{1}{\rho} \{ (\bar{B} \cdot \text{grad}) \vec{J} - (\vec{J} \cdot \text{grad}) \bar{B} \} \quad (133)$$

3.11. Elektromagnetohydrostatyka

Równanie równowagi płynu w polu elektromagnetycznym ma postać

$$0 = \rho \vec{F} - \text{grad} p + \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} + \rho g \text{grad} \left\{ \frac{1}{2} \vec{E}^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \vec{H}^2 \frac{\partial \mu_m}{\partial \rho} \right\} \quad (134)$$

Jeżeli $\vec{F} = 0$, $\rho_e = 0$ oraz $\vec{J} = 0$, to ciśnienie płynu p , a stąd i gęstość zależy od zjawiska elektrostrykacji oraz zjawiska magnetostrykacji. Ze wzrostem $\vec{E}$ oraz $\vec{H}$ wzrastają siły strykcyjne i ciśnienie wzrasta.

Jeżeli parametry fizyczne są stałe / $\rho = \text{const}$, $\epsilon = \text{const}$, $\mu_m = \text{const}$ /, to równanie (134) poza siłami masowymi / $\rho \vec{F}$ / i powierzchniowymi / $\text{grad} p$ / zawiera dwie główne składowe siły $\vec{F}_{om}$.

$$0 = \rho \vec{F} - \text{grad} p + \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (135)$$

Z równania (135) wynikają dwa równania

- elektrostatyki

$$0 = \rho \bar{F} - \text{grad } p + \rho_e \bar{E} \quad (136)$$

- magnetostatyki

$$0 = \rho \bar{F} - \text{grad } p + \rho (\bar{E} \times \bar{B}) \quad (137)$$

Jeżeli wektor $\bar{E} \parallel \bar{B}$, to równanie (136) przyjmie postać

$$q + \rho_e - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = 0 \quad (138)$$

gdzie $\rho_e = \frac{\rho_e}{\rho} E_z$ - składowa elektryczna.

Po scałkowaniu równania (138) otrzymamy zależność

$$p = p_0 + \rho (q + \rho_e) h \quad (139)$$

gdzie: p_0 - ciśnienie na powierzchni płynu,

$h = z - z_0$ - głębokość zanurzenia,

p - ciśnienie w cieczy w polu elektrycznym.

Ze wzoru (139) wynika, że w cieczy nie przewodzącej prąd elektryczny za pomocą ładunków elektrycznych można wpływać na siłę wyporu przypadającą na jednostkę objętości ciała zanurzonego w płynie. Faktyczna siła wyporu odniesiona do jednostki objętości dla płynu nie przewodzącego prąd elektryczny jest równa

$$G_{we}^1 = G^1 + \rho_e E_z \quad (140)$$

gdzie G^1 - siła odniesiona do jednostki objętości.

Jeżeli w płynie znajduje się dielektryk o stałej dielektrycznej ϵ różnej od ϵ_{cieczy} , to we wzorze (136) należy uwzględnić drugi składnik siły (54).

Jeżeli wektor $\bar{E} \times \bar{B}$ działa wzdłuż linii działania wektora $\bar{g}$, to

$$(\bar{E} \times \bar{B})_x = (\bar{E} \times \bar{B})_y = 0; \quad \rho (\bar{E} \times \bar{B})_z = \rho_m g \quad (141)$$

gdzie $\rho_m = \frac{\rho}{c} (\bar{E} \times \bar{B})_z$ - składowa magnetyczna.

Wobec zależności (141) równanie (137) przyjmie postać

$$\rho g dz - dp + \rho (q + \rho_m) dz = 0 \quad (142)$$

Po scałkowaniu równania (142) otrzymamy wzór manometryczny

$$p = p_0 + \rho (q + \rho_m) h \quad (143)$$

Faktyczna siła wyporu odniesiona do jednostki objętości dla płynu przewodzącego prąd elektryczny jest równa

$$G'_{wm} = G' + \epsilon (\vec{j} \times \vec{B})_z \quad (144)$$

Jeżeli nie uwzględnia się lokalnych zmian pola elektromagnetycznego w pobliżu cząstki ciała stałego, to siłę jednostkową działającą na tę cząstkę określa się z zależności

$$G'_w = (\rho - \rho_{cs}) q + (\epsilon - \epsilon_{cs}) q_m \quad (145)$$

gdzie: G'_w - siła wypadkowa odniesiona do jednostki objętości działająca na cząstkę ciała stałego w obecności pola elektromagnetycznego,

ρ - gęstość cieczy,

ρ_{cs} - gęstość ciała stałego,

ϵ - przewodność elektryczna cieczy,

ϵ_{cs} - przewodność elektryczna materiału cząstki.

Ze wzorów (140), (144) oraz (145) wynika, że za pomocą pola elektromagnetycznego można sterować równowagą ciał zanurzonych.

BIBLIOGRAFIJA

1. Lamb G.: *Gidrodinamika*, M.-L., Gostekhnizdat 1947.
2. Sauer R.: *Ecoulements des Fluides Compressibles*, Paris et Liege 1951.
3. Sleskin N.A.: *Dinamika vjazkoj neszhimaznoj zhidkosti*, M., Gostekhnizdat 1955.
4. Frenkel M.Z.: *Gidravlika*, K. 1956.
5. Levich V.G.: *Fiziko-khimicheskaja gidromekhanika*, M., Fizmatgiz 1959.
6. Birkhoff G.: *Hydrodynamics*, Princeton, N.Y., Princeton University Press 1960.
7. Goldstein S.: *Lecture of fluid mechanics*, Interscience, N.Y. 1960.
8. Landau L.D., Lifshic E.M.: *Elektrodinamika sploshnykh sred*, Fizmatgiz, M. 1960.
9. Bird R.B., Stewart W.W., Lightfoot E.N.: *Transport Phenomena*, N.Y., L., John Wiley and Sons, Inc. 1960.
10. Chandrasekhar S.: *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Cambridge Univ. Press 1961.
11. Ferraro V.C.A., Plumpton C.: *Magneto-fluid mechanics*, Oxford Univ. Press 1961.
12. Shames I.H.: *Mechanics of fluids*, N.Y., McGraw-Hill 1962.
13. Bratsznajder S.: *Własności gazów i cieczy*, WNT, Warszawa 1962.
14. Aris R.: *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Englewood Cliffs, N.Y., Prentice-Hall 1962.
15. Chudakovskij A.F.: *Teplofizicheskie kharakteristiki dispersnykh materialov*, M., Fizmatgiz 1962.
16. De Groot S.R., Mazur P.: *Non-equilibrium Thermodynamics*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1962.
17. Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V.: *Teoreticheskaja gidromekhanika*, Fizmatgiz, L., M. 1963.
18. Kendall P.C., Plumpton C.: *Magnetohydrodynamics*, Pergamon Press 1964.
19. Shercliff J.A.: *A textbook of magnetohydrodynamics*, Pergamon Press 1965.
20. Djurina A.K., Borschevskij Ju.T.: *Osnovy mekhaniki mnogokomponentnykh potokov*, Novosibirsk 1965.
21. Happel J., Brenner H.: *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1965.
22. Schlichting H.: *Grenzschicht-Theorie*, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1965.
23. Soo S.L.: *Fluid dynamics of multi-phase systems*, Toronto-London 1967.
24. Fortier A.: *Mecanique des suspensions*, Paris 1967.
25. Dejch M.E., Filippov G.A.: *Gazodinamika dvukhfaznykh sred*, Energia 1968.
26. Whitaker S.: *Introduction of fluid mechanics*, Prentice-Hall 1968.

27. Povkh I. L.: Tekhnicheskaja gidrodinamika, L., Mashinostroenie 1969.
28. Wallis G. B.: One-dimensional two-phases flow, McGraw-Hill Book Comp. 1969.
29. Batchelor G. K.: An introduction to fluid dynamics, Cambridge Univ. Press 1970.
30. Mkhatarjan A. M.: Aerodinamika, Mashinostroenie, L. 1970.
31. Prosnak W. J.: Mechanika plynów, PWN, Warszawa 1971.
32. Sisson L. E., Pitts D. R.: Elements of transfer phenomena. McGraw - Hill 1972.
33. Locjanskij L. G.: Mekhanika zhidkosti i gasa, M., Nauka 1973.
34. Vereschagin N. P., Levitov V. I., Mirzabekjan G. Z., i inni: Osnovy elektrogazodinamiki dispersnykh sistem, M., Energiya 1974.
35. White F. M.: Viscous fluid flow, McGraw-Hill, Inc. 1974.
36. Voloshchuk B. M., Sedunov Ju. S.: Processy koagulacji w dispersnykh sistemakh, Gidrometeoizdat 1975.
37. Slattery J. C.: Teorja perenosa impulsa, energii i masy v sploshnykh sredakh, M., Energiya 1976.
38. Krasnov H. F.: Aerodinamika, M., Vysshaja shkola 1976.
39. Brounshtejn B. I., Fishbein G. A.: Gidrodinamika masso- i teplo obmena v dispersnykh sistemakh, Khimia 1977.
40. Nigmatulin R. I.: Osnovy mekhaniki geterogennykh sred, M., Nauka 1978.
41. Cowling T. G.: Magnetohydrodynamics, Atcmizdat, M. 1978.
42. Terentev O. A.: Gidrodinamika voloknistykh suspenzji v celulozno-bumazhnom proizvodstvie, M., Lesnaja Prom. 1980.
43. Bibik E. E.: Reologija dispersnykh sistem, L., Izd. Leningrad. Univ. 1981.
44. Dejch M. E., Zarjanshin A. E.: Gidrogazodinamika, M., Energoatomizdat 1984.
45. Petrosjan L. G.: Nekotoryje voprosy mekhaniki zhidkosti s niesimetriczeskim tensorom naprjazhenij, E., Izd. Univ. Krevan 1984.
46. Protodjakov I. O., Ljublinskaja I. E., Rzhkov A. E.: Gidrodinamika i massobmen v dispersnykh sistemakh zhidkost-tverdoje telo, L., Khimia 1987.

SKOROWIDZ RZECZOWY

- adiabatą Hugoniota 146
 antysymetryczna część tensora S 41
 barodyfuzja 179
 bilans entropii 242
 bilans masy 27
 ciecz barotropna 48
 ciepło właściwe 101
 ciśnienie atmosferyczne 36
 ciśnienie magnetyczne 238
 cyrkulacja prędkości 19
 czas relaksacji 43
 czwarta zasada termodynamiki 45
 deformacja kropli 203
 dwupunktowy współczynnik korelacji 65
 dyfuzja wirów 49
 dyfuzyjny strumień energii 53, 178
 dynamiczny współczynnik dyfuzji 172
 dysypacja energii mechanicznej 54
 dźwiękowy przepływ gazu 139
 element płynu 12
 elipsa prędkości 129
 energia fal 91
 energia pola elektromagnetycznego 245
 energia wewnętrzna 55, 56
 entalpia reakcji chemicznej 105
 entropia 57, 101
 ferrociecze 239
 funkcja burzliwej dysypacji energii 67
 funkcja rozkładu średnic 193
 gęstość strumienia masy 174
 helmholcjan 39
 hipoteza Prandtla 70
 izotermiczny współczynnik ściśliwości 98
 kawitacja 92
 kinetyczny współczynnik lepkości burzliwej 70
 konwekcja wymuszona 46
 kręt wewnętrzny 37
 kręt zewnętrzny 37
 krzywa granulometryczna 194
 liczba Knudsen'a 127
 liczba Macha 114
 liczba Reynoldsa 64
 linia prądu 15
 linia wirowa 20
 lokalna równowaga 44
 masowa prędkość dyfuzji 171
 miara liniowa strat energii 79
 miara liniowa strat pędu 78
 model Bibika 191
 model Frisnkiele-Eyringa 191
 model komórkowy 220
 naddźwiękowy przepływ gazu 139
 naprężenia tarcia 69
 nierówność entropii 68, 102, 144, 184
 odkształcenie objętościowe 25
 odkształcenie postaciowe 25
 operator bieżącej średniej 63
 opór całkowity 94
 parametry krytyczne 114
 pierwsze prawo Kirchhoffa 230
 podobieństwo procesów fizycznych 95, 124
 podstawowe prawo hydrauliki 152
 podwójny iloczyn skalarowy dwóch tensorów 51
 pole 13
 potencjał pola wektorowego 18
 potencjał siły masowej 52, 178
 potencjał zespolony 82, 83
 powierzchnia ekwipotencjalna 155
 powierzchnia międzyfazowa 206

- prawo Ampera 230
 prawo Archimidesa 159
 prędkość dźwięku 113
 prędkość kątowna 17
 prędkość przemieszczania się 141
 prędkość rozchodzenia się 141
 przepływ burzliwy 63
 przepływ płaski ustalony 110
 przepływ uwarstwiony 63
 regularny model komórkowy 221
 rotacja pola wektorowego 18
 równanie Bernoulliego 67
 równanie Bjerknesa 88
 równanie Eulera 38, 152
 równanie bilansu energii 50
 równanie bilansu krętu k-tej fazy 223
 równanie Cauchyego 248
 równanie de Groota 46
 równanie energii powierzchniowej 219
 równanie kinetyki ruchu wirowego 122
 równanie krętu 37
 równanie Naviera i Stokesa 45
 równanie Oseena 48
 równanie pola elektromagnetycznego 228
 równanie pulsacji parametrów 138
 równanie Prandtla 74
 równanie Reynoldsa 67
 równanie ruchu falowego 90
 równanie ruchu obrotowego 43
 równanie ruchu w postaci Friedmana 39
 równanie ruchu w postaci Lamba 38
 równanie stanu gazu 99
 równanie Umowa 58, 181
 równanie zachowania pędu 35
 równowaga chemiczna 161
 rurka wirowa 20
 ruch bezwirowy 21
 ruch lokalny płynu 23
 ruch wakantów 192
 ruch względny 49
 zigma-faza 217
 skala burzliwości 66
 silne nieciągłości 143, 146
 siła Magnusa 196
 siły masowe 30, 32
 siła napięcia powierzchniowego 218
 siły powierzchniowe 30, 31
 siła ruchu obrotowego 199
 stała uniwersalna Prandtla-Karmana 71
 stopień burzliwości 65
 stateczność pływającego ciała 160
 strumień masowy 16, 29, 172
 strumień objętościowy 16
 swobodny przepływ burzliwy 128
 ślad tensora 24
 średnia prędkość przepływu 30
 średniokwadratowa prędkość pulsacji 64
 tensor burzliwości 67
 tensor ciśnienia 33
 tensor naprężeń elektromagnetycznych 246
 tensor naprężeń momentowych 33
 tensor naprężeń sprężystych dla płynów nienewtonowskich 41
 tensor naprężeń sprężystych 33
 tensor prędkości deformacji 23
 tensor prędkości zpinowej 25
 termodyfuzja 173
 tor 16
 trzecia zasada termodynamiki 103
 twierdzenie Helmholtza 20, 26, 39
 twierdzenie Lagrange'a 89
 twierdzenie Tomsona 88

- uderzenie hydrauliczne 92
- warstwa przyścienna 73, 130
- warunki graniczne 61
- warunek nieprzenikalności ścis-
nek 62
- warunki Lorenza 231
- wektor osiowy 155
- wektor polaryzacji elektrycznej
234
- wektor Poyntinga 235
- wektor Umowa 181
- wir 18
- współczynnik burzliwej przewod-
ności cieplnej 72
- współczynnik dyfuzji temperatu-
rowej 58
- współczynnik lepkości krzyżowej
41
- współczynnik lepkości objętoś-
ciowej 40
- współczynnik oporu 94
- współczynnik lepkości obrotowej
41
- współczynniki Onsagera 45
- względna prędkość kątowa cząstki
196
- wzór barometryczny 154
- wzór Basseta 196
- wzór całkowity Karmana 78
- wzór Cauchyego-Helmholtza 26
- wzór manometryczny 153
- wzory izentropowe 118
- zasada D'Alemberta 34
- źródło energii wewnętrznej 53
- źródło entropii 60, 183



W 117758

W 117758

Biblioteka Główna
Politechniki Szczecińskiej

W. 117758



012-117758-00-0